THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lyon - École Normale Supérieure de Lyon

Spécialité : **Mathématiques**

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

École Doctorale de Mathématiques et Informatique Fondamentale

présentée et soutenue publiquement le 7 décembre 2010 par

Paul LAURAIN

Comportement asymptotique des surfaces à courbure moyenne constante

---

Directeur de thèse : Olivier Druet

Après avis de : Tristan Rivière
Antonio Ros

Devant la commission d'examen formée de :

Olivier Druet	*Directeur*
Étienne Ghys	*Membre*
Emmanuel Hebey	*Président*
Petru Mironescu	*Membre invité*
Tristan Rivière	*Membre/Rapporteur*
Antonio Ros	*Membre/Rapporteur*

Numéro d'ordre : 599
Numéro attribué par la bibliothèque : __ENSL599

À Anne.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Olivier Druet qui m'a proposé ce très beau thème de mathématiques et qui a patiemment guidé mes premiers pas dans la recherche. Ce fut une chance de pouvoir ainsi profiter de sa connaissance de l'analyse géométrique et plus généralement de sa vision des mathématiques. Durant ce cheminement commun, Olivier a toujours été présent pour répondre à mes questions, écouter mes intuitions et orienter mes recherches. Pour tout cela, je lui suis profondément reconnaissant.

Ma reconnaissance va également à Tristan Rivière et Antonio Ros pour avoir rapporté ma thèse. C'est pour moi une grande joie de savoir que ceux à travers lesquels j'ai appris s'intéressent à mon travail. Je remercie également Étienne Ghys, Emmanuel Hebey et Petru Mironescu d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres de l'U.M.P.A, passés et présents. C'est un lieu propice au travail mathématique où règne une atmosphère conviviale. Ici j'aimerais remercier plus particulièrement Magalie, Virginia et Gérard pour leur travail, sans lequel l'ambiance ne serait pas la même.

Un merci particulier à Jean-Claude, Bruno, Maxime et Pierre pour les échanges mathématiques que nous avons pu avoir au cours de ces dernières années.

Je tiens également à remercier mes cobureaux successifs : Valérie, Ana, Jenya, Camille, Émeric, Agnès et Frédéric, ainsi que l'ensemble des thésards de l'U.M.P.A. pour leur bonne humeur, sans oublier Daniel Morin, Didier Porte et les séminaires du Ninkasi.

Je remercie également le *Pacific Institute for the Mathematical Sciences* qui m'a accueilli pendant 6 mois à Vancouver, et plus particulièrement Ivar Ekeland et Nassif Ghoussoub. Ce fut une expérience inoubliable.

Je n'oublie pas Stéphanie, Théophile et Éléonore que je prive régulièrement d'Olivier et qui m'ont accueilli si chaleureusement à Vancouver.

N'oublions pas non plus ceux qui sont à mes côtés depuis le début de l'aventure. Merci à mes parents, Julia, Marc, Michèle et Jean-Jacques qui m'ont accompagné jusqu'ici. J'ai également une pensée pour les différents enseignants qui m'ont donné le goût des études et qui m'ont encouragé dans cette voie, je pense tout particulièrement à M. Touron et Mme Robelais.

Comment ne pas remercier mes copains pour les moments de détente à la « cantoche » ou pendant les « soirées entre amis ». Merci encore à Joan, Gabi et Booli avec qui cela sera toujours un plaisir de parler mathématiques.

Un grand merci à tous ceux qui, comme Laurin, m'ont offert de leur temps pour relire mon manuscrit et me faire des remarques pertinentes.

Enfin, je voudrais remercier celle sans qui ce manuscrit n'aurait jamais vu le jour, dont le soutien a été sans défaut et qui m'a remis en selle sans relâche. Celle qui équilibre ma vie avec douceur, merci Anne.

Table des matières

Introduction **xi**
Présentation des résultats . . . xv
Organisation de la thèse . . . xvii
Liste des travaux de l'auteur . . . xviii

1 Généralités concernant la courbure moyenne **1**
1.1 Définition générale . . . 1
1.2 Rigidité de la notion de courbure et premiers exemples . . . 2
1.3 Première et seconde variations . . . 4
1.4 Le problème isopérimétrique . . . 6
1.5 Le cas particulier des surfaces . . . 7

2 Courbure moyenne des surfaces de l'espace euclidien **13**
2.1 Zoologie des surfaces à courbure moyenne constante . . . 13
2.2 Quelques obstructions pour la courbure moyenne des surfaces compactes . . . 22

3 Surfaces à courbure moyenne constante dans une variété courbée **35**
3.1 Dans les espaces modèles . . . 35
3.2 Le cas général . . . 35
3.3 Obstruction et unicité . . . 39
3.4 Preuve du corollaire 3.3.1 . . . 40

4 Preuve du théorème 3.3.3 **43**
4.1 L'équation de courbure moyenne dans une variété riemannienne de dimension 3 43
4.2 Préliminaires . . . 47
4.3 Décomposition de u^ε comme somme de sphères. . . . 51
4.4 Estimée forte . . . 65
4.5 Preuve du théorème . . . 73
4.6 Estimée sur l'interaction entre les bulles . . . 75
4.7 Résultats techniques . . . 83

5 Surfaces à courbure moyenne constante à bord dans l'espace euclidien **87**
5.1 Le problème de Plateau . . . 87
5.2 Surfaces à courbure moyenne constante à bord libre . . . 90
5.3 Régularité et estimée *a priori* sur les surfaces à courbure moyenne constante à bord libre . . . 92

6 Preuve du théorème 5.2.4 **95**
6.1 Décomposition de u^ε en somme de sphères et d'hémisphères. 96
6.2 Il y a au moins un hémisphère dans la décomposition 107
6.3 Preuve du théorème 5.2.4 111
6.4 Résultats annexes 113

7 Annexes et résultats généraux **117**
7.1 L'équation linéarisée 117
7.2 Inégalités de Wente classiques et généralisées 122
7.3 Espaces de Lorentz et application à l'inégalité de Wente 125

Bibliographie **127**

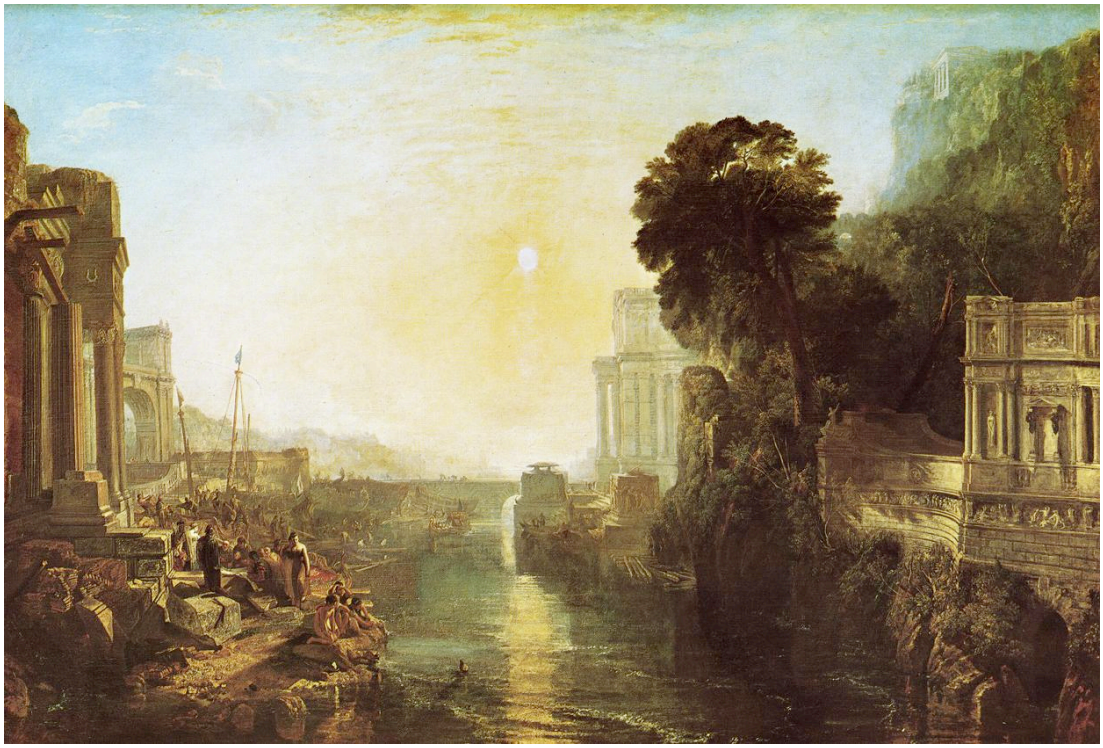


Figure 1 – Didon construisant Carthage, Turner 1815

Introduction

Nous introduisons les différents thèmes abordés au cours de cette thèse avant d'énoncer clairement les résultats nouveaux qui s'y trouvent. Enfin, nous résumons brièvement le contenu des divers chapitres qui constituent celle-ci.

Le Problème isopérimétrique

Vers 814 av. J.-C., la princesse phénicienne Didon, cherchant à s'installer non loin de l'actuelle Tunis, demande au roi de Numidie, Iarbas, l'octroi d'un terrain. Iarbas, réticent, lui accorda le droit de choisir un lopin de terre que pourrait contenir la peau d'un bœuf. La rusée Didon découpa la peau en une fine lamelle, qui devint une longue lanière de 4 km de long. Puis elle fit étendre cette lanière sur un demi-cercle dont les deux extrémités touchaient la côte. La reine venait intuitivement de trouver la solution au « problème isopérimétrique » dans un demi-plan [1].

Le problème isopérimétrique consiste à déterminer le domaine ayant la plus grande surface possible avec un périmètre donné. Dans le cas d'un demi-plan euclidien, le demi-cercle est en effet la courbe qui délimite la plus grande surface possible. Dans le cas du plan tout entier, la solution est cette fois-ci le cercle. Cette solution conduit à l'inégalité isopérimétrique standard pour un domaine quelconque :

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

où A est l'aire du domaine et L son périmètre.

On peut ensuite généraliser ce problème aux dimensions supérieures et à des espaces ambiants plus généraux. Soient $(\mathcal{N}, g)$ une variété riemannienne de dimension $n+1$, $n \geq 1$, et une constante $0 < v < \mathrm{Vol}(\mathcal{N})$, on cherche à déterminer le ou les domaines Ω de $\mathcal{N}$ dont la mesure n-dimensionnelle du bord $\mathrm{Vol}(\partial\Omega)$ est minimale parmi tous les domaines dont la mesure $(n+1)$-dimensionnelle $\mathrm{Vol}(\Omega)$ est égale à v. En fait, le problème est énoncé ici sous sa forme duale, mais on se convainc facilement qu'un tel domaine est nécessairement isopérimétrique au sens usuel.

L'existence de tels domaines n'est pas toujours garantie. Il existe des variétés pour lesquelles on sait montrer que le problème isopérimétrique n'a pas de solution. Toutefois, pour des variétés plus raisonnables comme $\mathbb{R}^n$ ou des variétés compactes, l'existence de domaine isopérimétrique est assurée. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la première preuve rigoureuse est due à Schwarz à la fin du XIXe siècle, s'appuyant sur des idées de Minkowski et Steiner, voir la section 6.1 de [83], mais il existe aujourd'hui une pléïade d'alternatives permettant de démontrer que les boules rondes sont bien

1. voir le commentaire de Servius [107] sur le vers I.367 de l'Énéide.

les seuls domaines isopérimétriques de l'espace euclidien. Dans le cas des variétés compactes, c'est la théorie de la mesure géométrique qui permet d'apporter une réponse à ce problème. En effet, on sait qu'il existe (au moins) un domaine Ω de $(\mathcal{N}, g)$ dont la mesure n-dimensionnelle du bord est minimale parmi tous les domaines dont la mesure $(n+1)$-dimensionnelle est égale à v. De plus, le bord d'un tel domaine est lisse en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff au plus $n-7$. Si ce résultat nous assure l'existence d'un domaine solution du problème isopérimétrique, la détermination du domaine lui même reste un problème compliqué. La caractérisation des solutions du problème isopérimétrique reste un domaine de recherche particulièrement actif dans lequel de nombreuses questions restent ouvertes. On pourra à ce sujet se référer à la revue de Ros [98].

Toutefois, même si on ne sait pas caractériser de tels domaines, on en connaît quelques propriétés géométriques, la plus importante étant la suivante : le bord d'un domaine isopérimétrique est une hypersurface plongée dont la courbure moyenne est constante en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff au plus $n-7$.

L'équation de courbure moyenne

Soient $(\mathcal{N}, g)$ une variété de dimension 3 et (Σ, h) une surface. On considère $u : \Sigma \to \mathcal{N}$ une immersion conforme. Sa courbure moyenne $H(u)$ est alors donnée dans des cartes par l'équation

$$\Delta_h u^j - h^{\alpha\beta}\Gamma^j_{ik}(u)\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} = -2H(u)\frac{\sqrt{|g|}g^{ij}(u)\nu_i}{\sqrt{|h|}} \text{ pour } j \in \{1,2,3\}, \tag{1}$$

où

$$\nu_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial u}{\partial x^2}\right)_i \text{ et les } \Gamma^j_{ik} \text{ sont les symboles de Christoffel de la métrique } g.$$

Cette équation est quasi-linéaire et uniformément elliptique. Cependant, elle est critique au sens des injections de Sobolev puisque le terme dominant à gauche de l'équation est Δu et le terme dominant à droite se comporte comme $|\nabla u|^2$. Cela était d'ailleurs prévisible puisqu'elle est invariante par reparamétrage conforme. Cette invariance permet d'obtenir des suites de solutions non-compactes dès que le groupe des difféomorphismes conformes de Σ, $\mathrm{Conf}\, f(\Sigma)$, n'est pas compact, ce qui est le cas lorsque $\Sigma = S^2$ ou $\mathbb{D}$. Cette équation est donc naturellement sujette à des phénomènes de concentration. Il est ainsi difficile, voire impossible sans hypothèses supplémentaires, d'obtenir des estimées a priori sur les solutions de cette équation. Toutefois, la structure particulière de cette équation fait qu'elle est également soumise à des phénomènes de compacité par compensation, phénomènes mis en lumière par Coifman, Lions, Meyer et Semmes dans les années 80 [25] et plus récemment par Rivière pour des problèmes généraux possédant une invariance conforme [96]. D'ailleurs, on pourra consulter les notes de cours de Rivière [95] qui sont très éclairantes sur ces phénomènes de compensation.

L'étude des suites de solutions de (1) est réellement née dans les années 80 avec les travaux de Brezis et Coron [12], inspirés de ce qui avait été fait par Sacks et Uhlenbeck pour les applications harmoniques [104], équation d'ailleurs très proche de l'équation de courbure moyenne. Dans [12], il est montré qu'une suite de surfaces à courbure moyenne constante égale

à 1 bordant une courbe dont le diamètre tend vers zéro converge faiblement (i.e dans H^1) vers une union de sphères.

Cette première analyse étant faite, il va être intéressant d'obtenir des estimées plus précises, notamment sur ces phénomènes d'explosion, afin de mieux comprendre le comportement asymptotique des suites de solutions.

Une telle analyse a déjà été menée dans le cas d'une équation géométrique elle aussi critique et conformément invariante, l'équation de courbure scalaire prescrite dans une classe conforme, voir [41],

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g u = S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{2}$$

où $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$. Nous allons donc retrouver un certain nombre de problèmes déjà rencontrés dans l'étude des suites de solutions de (2). Cependant, le système (1) étant fortement couplé, de nouvelles difficultés vont se présenter. En effet, son caractère de système enlève à l'équation de courbure moyenne des propriétés essentielles que possède l'équation de type courbure scalaire : principe du maximum et inégalité de Harnack. C'est pourquoi l'étude de (1) est plus délicate que celle de (2). Si les phénomènes de concentration dans ces deux équations ont un lien de parenté, leur compréhension passe par des outils relativement différents [2].

Classification des surfaces à courbure moyenne constante de $\mathbb{R}^3$

Avant de s'intéresser au comportement asymptotique des suites de surfaces à courbure moyenne constante, il est utile de regarder la classification des surfaces à courbure moyenne constante dans l'espace euclidien.
Les surfaces à courbure moyenne constante généralisant les domaines isopérimétriques, il est naturel de se demander s'il en existe qui ne sont pas des sphères. Comme nous le verrons avec le théorème d'Aleksandrov, théorème 2.1.3, la réponse est négative dans le cas des surfaces compactes plongées. Toutefois, si on remplace « plongées » par « immergées », comme l'ont montré notamment Wente et Kapouleas, il existe beaucoup d'exemples. Même si on s'intéressera principalement au comportement de suites de surfaces compactes, la classification des surfaces complètes n'est pas sans intérêt pour notre problème. En effet, le cas des surfaces complètes peut apparaître comme situation limite infinitésimale des surfaces à grande courbure moyenne : en dilatant l'espace autour d'un point, on peut normaliser la courbure moyenne de la suite à 1 et le diamètre des surfaces tend alors vers l'infini.

Cette étude préliminaire est présentée à la section 2.1, sous la forme d'une brève revue des résultats de classification.

Le problème de courbure moyenne prescrite dans l'espace euclidien

Une autre question naturelle à laquelle je me suis intéressé pendant ma thèse concernant le comportement de la courbure moyenne d'une surface est de savoir quelles fonctions sont potentiellement la courbure moyenne d'une surface donnée. La notion de courbure moyenne

2. D'ailleurs je me suis également intéressé au cours de ma thèse à l'analyse asymptotique des équations de type courbure scalaire, notamment dans un travail en collaboration avec Olivier Druet où il est question de la stabilité de l'obstruction de Pohožaev [42].

étant extrinsèque, il est assez logique de considérer des fonctions de l'espace ambiant. On formule alors ce problème de la manière suivante :

Etant donnée une fonction $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lisse, existe-t-il une hypersurface Σ de $\mathbb{R}^n$ ayant pour courbure moyenne $H(p)$ pour tout $p \in \Sigma$?

Dans le cas $H \equiv \text{Cst} \neq 0$, les sphères répondent parfaitement au problème. Toutefois, lorsque $H \neq \text{Cst}$, les choses sont beaucoup moins claires, même pour des fonctions quasi-constantes. D'ailleurs il existe un certain nombre d'obstructions que nous présentons à la section 2.2 . On s'est largement inspiré du problème de courbure de Gauss prescrite pour attaquer ce problème. En effet, dans les années 70, Kazdan et Warner ont largement étudié cette question des obstructions au problème de courbure de Gauss prescrite. Dans la section 2.2.2 , nous généraliserons, dans l'esprit du théorème des quatre sommets, un résultat de Kirsch qui nous assure que la courbure moyenne d'une surface plongée ne peut être strictement croissante dans une direction donnée. Plusieurs nouveaux résultats d'obstruction sont présentés dans ce chapitre.

Surfaces à courbure moyenne constante dans une variété

Considérons maintenant des surfaces compactes dans une variété $\mathcal{N}$ de dimension 3. Il serait trop ambitieux pour l'instant d'espérer une classification de ces surfaces à courbure moyenne constante à l'image de celle du cas euclidien. Pourtant, dans le cas particulier des surfaces minimales ($H = 0$), une ébauche de classification a commencé à se mettre en place notamment grâce aux efforts de Colding, Meeks, Minicozzi, Ros et Rosenberg. On citera notamment l'ouvrage collectif édité par Hoffman [57] et la suite de papiers de Colding et Minicozzi [27], [28], [29] et [30]. Ce domaine de recherche reste d'ailleurs très actif compte tenu de ces liens étroits avec la topologie des variétés de dimension 3.
Afin de commencer l'exploration de l'espace des surfaces à courbure moyenne constante, on va regarder ce qui se passe dans le cas des surfaces de petit volume (ou encore à grande courbure moyenne). Quitte à dilater notre espace, on peut normaliser la courbure moyenne de nos surfaces à 1 et l'espace ambiant devient en quelque sorte quasi-euclidien. Afin d'obtenir des exemples explicites de surfaces à courbure moyenne constante, une idée naturelle est de perturber des surfaces à courbure moyenne constante de l'espace euclidien pour obtenir des surfaces à courbure moyenne constante de notre espace quasi-euclidien. Cette idée s'est avérée très fructueuse et est à l'origine de nombreux exemples, voir la section 3.2, avec notamment les travaux de Ye, Pacard, Mazzeo et Butscher. Mais chaque construction exige une condition sur la géométrie de la variété au point de concentration. Une question naturelle afin d'avancer dans l'exploration de cet espace de module est la question de la nécessité de ces conditions géométriques. Car si on arrivait à montrer que ces conditions sont nécessaires, on aurait une image plus claire de cet espace de module, du moins pour les surfaces de petit diamètre. Un première réponse a été donnée par Druet dans le cas des domaines isopérimétriques. En démontrant une inégalité isopérimétrique optimale pour les domaines de petit volume, il montre que ces domaines se concentrent nécessairement au point de maximum de la courbure scalaire, voir théorème 3.3.2. Ce résultat, accompagné des constructions évoquées ci-dessus, conduit naturellement à la question suivante :

Étant donnée une suite de surfaces à courbure moyenne constante dans une variété compacte $\mathcal{N}$ de dimension 3 dont le diamètre tend vers 0, celles-ci se concentrent-elles nécessairement en un point critique de la courbure scalaire ?

Cette question sera explorée à la section 3.3.

Problème de partitionnement et surfaces à courbure moyenne constante à bord

On peut également considérer le problème isopérimétrique pour un domaine à bord. Dans ce cas, on l'appelle problème de partitionnement, puisqu'il s'agit de trouver dans un domaine Ω, pour v fixé plus petit que $\mathrm{Vol}(\Omega)$, une surface d'aire minimale séparant le domaine en deux régions de volumes v et $\mathrm{Vol}(\Omega) - v$, voir figure 1.3. Ici encore on montre qu'une telle surface est lisse et à courbure moyenne constante en dehors d'un ensemble de dimension plus petite que $n - 7$ et qu'elles rencontrent le bord orthogonalement. Une fois de plus, l'existence de telles surfaces est assurée par la théorie géométrique de la mesure, mais on ignore quasiment tout de leur géométrie et de leur topologie pour des domaines généraux. Comme pour les surfaces à courbure moyenne constante dans une variété, afin de débroussailler leur espace de module, il semble raisonnable de commencer par des surfaces de petit diamètre. Dans ce cas, la topologie du domaine n'a aucune importance et l'influence de la géométrie est bien contrôlée. Un certain nombre de résultats similaires à ceux évoqués pour les surfaces à courbure moyenne constante dans une variété ont été démontrés récemment dans ce cadre par Fall. Tout d'abord, il montre l'existence de petites surfaces à courbure moyenne constante rencontrant le bord orthogonalement autour d'un point critique non dégénéré de la courbure moyenne du bord du domaine. Puis il démontre que pour les domaines isopérimétriques cette condition est nécessaire en montrant que ces domaines se concentrent vers des points de maximum de la courbure moyenne du bord. Ces deux résultats conduisent naturellement à la question suivante :

Étant donnée une suite de surfaces à courbure moyenne constante dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dont le diamètre tend vers 0 et rencontrant le bord orthogonalement, cette suite se concentre-t-elle nécessairement en un point critique de la courbure moyenne du bord ?

Cette question sera explorée à la section 5.2.

Présentation des résultats

De nouvelles obstructions

Comme Kirsch l'a démontré dans sa thèse, la courbure moyenne d'une surface plongée ne peut être strictement croissante dans une direction. Peut-on relaxer l'hypothèse de plongement ? Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose la surface qu'immergée ? Comme on l'a déjà fait remarquer, la courbure moyenne a un comportement beaucoup moins rigide pour des surfaces immergées. Toutefois, si on se restreint au cas des courbes, le théorème suivant, démontré en collaboration avec Kirsch, généralise le résultat de ce dernier :

Théorème. *Soient $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction Lipchitz positive et $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ vérifiant*

$$\langle \nabla H(x), \vec{e} \rangle > 0 \quad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

Il n'existe aucune courbe fermée C^1 immergée dans $\mathbb{R}^2$ dont la courbure en tout point x est $H(x)$.

La preuve de ce résultat est donnée à la section 2.2.2. Du reste, dans cette section, on présente également de nouvelles obstructions et on donne de nouvelles démonstrations (éclairantes) d'obstructions connues concernant plus spécifiquement les surfaces.

Comportement asymptotique des surfaces à courbure moyenne constante dans une variété

Lorsque Druet montre que les domaines isopérimétriques se concentrent en un point de maximum de la courbure scalaire, il s'appuie sur un résultat de Johnson et Morgan qui stipule que de tels domaines tendent à devenir des quasi-sphères. Mais si on souhaite généraliser le résultat de Druet aux surfaces à courbure moyenne constante générales, on se heurte à la diversité topologique et géométrique des exemples donnés à la section 3.2. Toutefois, quitte à mettre des hypothèses raisonnables, comprenant une bonne partie des exemples de la section 3.2.1, nous montrons que le fait que le gradient de la courbure scalaire s'annule au point de concentration est nécessaire :

Théorème. *Soient $(\mathcal{N}, g)$ une variété compacte de dimension 3 et Σ_H une suite de surfaces simplement connexes plongées à courbure moyenne constante égale à H vérifiant les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} \delta(\Sigma_H) = o(1) \\ A(\Sigma_H) = O\left(\frac{1}{H^2}\right) \end{cases} \qquad \text{quand } H \to +\infty. \tag{3}$$

Alors Σ_H converge vers un point critique de la courbure scalaire.

La preuve de ce théorème étant difficile et technique, elle donne lieu à un chapitre entier, chapitre 4. De plus, en suivant une idée de Ye, on montre que les hypothèses de ce théorème peuvent être totalement relaxées si on suppose que les surfaces sont stables, voir sections 3.3 et 3.4.

Comportement asymptotique des surfaces à courbure moyenne constante bordant une surface

En utilisant une partie des techniques développées pour démontrer le théorème précédent mais aussi de manière judicieuse la formule de l'équilibre, on démontre le théorème suivant :

Théorème. *Soient Ω un domaine lisse de $\mathbb{R}^3$ et une suite de disques plongés Σ^ε dans Ω vérifiant les hypothèses suivantes :*

(i) $\partial\Sigma^\varepsilon \subset \partial\Omega$ et $\partial\Sigma^\varepsilon$ et $\partial\Omega$ s'intersectent orthogonalement,

(ii) Σ^ε est à courbure moyenne constante égale à $\frac{1}{\varepsilon}$,

(iii) Le diamètre et l'aire de Σ^ε sont respectivement un $O(\varepsilon)$ et un $O(\varepsilon^2)$.

Alors, à une sous-suite près, Σ^ε converge vers $p \in \partial\Omega$ et on a nécessairement $\nabla H(p) = 0$.

La preuve de ce théorème donne elle aussi lieu à un chapitre entier, chapitre 6.

Organisation de la thèse

Cette thèse se présente sous la forme de six chapitres et de trois annexes.

Chapitre 1 On y définit la notion de courbure moyenne que l'on compare notamment dans le cas des surfaces avec celle mieux connue de courbure de Gauss. On y développe aussi le concept de coordonnées conformes et on y donne la démonstration de la formule de l'équilibre exprimant l'effet du bord sur la forme d'une surface à courbure moyenne constante.

Chapitre 2 Après une brève revue de l'état de la classification des surfaces à courbure moyenne constante dans l'espace euclidien, on démontre de nouvelles obstructions sur la courbure moyenne d'une surface de l'espace euclidien. Une de celles-ci a d'ailleurs fait l'objet d'une publication [70]. On donne également de nouvelles démonstrations d'obstructions classiques qui éclairent celles-ci.

Chapitre 3 et 4 On commence par donner un certain nombre de résultats d'existence de surface à courbure moyenne constante dans une variété courbée avant de s'intéresser à la question de l'unicité de telles constructions. Le chapitre 4 est entièrement consacré à la démonstration du résultat principal de ce chapitre qui va faire l'objet d'une publication, [75].

Chapitre 5 et 6 Dans le chapitre 5, on introduit le problème des surfaces à bord ayant une courbure moyenne constante, notamment le problème de Plateau et celui des surfaces à bord libre. Puis on démontre dans le chapitre 6 un résultat sur les lieux de concentration de certaines surfaces à courbure moyenne constante et à bord libre. Ce résultat va également être l'objet d'une publication, [74].

Liste des travaux de l'auteur

(1) Asymptotic analysis for surfaces with large constant mean curvature and free boundaries, Prépublication (2010).

(2) Concentration of CMC surfaces in a Riemannian manifold, Prépublication (2010).

(3) An obstruction to the existence of immersed curves of prescribed curvature, Potential Anal. 32 (2010),(avec S. Kirsch).

(4) Stability of the Pohožaev obstruction in dimension 3, J.E.M.S, Volume 12, Issue 5, 2010, (avec O. Druet).

L'article 4 ne traitant pas de courbure moyenne ne fait l'objet d'aucune discussion dans ce mémoire, pour des raisons de cohérence.

Chapitre 1

Généralités concernant la courbure moyenne

Ce chapitre a pour but de présenter les définitions et les propriétés classiques concernant la courbure moyenne.

1.1 Définition générale

Soient $(\mathcal{M}, h)$ et $(\mathcal{N}, g)$ deux variétés riemanniennes orientées de dimensions respectives n et $n+1$ et $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une immersion isométrique. Pour simplifier les notations, on confondra parfois $\mathcal{M}$ et $f(\mathcal{M})$.

Pour tout $p \in \mathcal{M}$, on a la décomposition suivante de l'espace tangent

$$T_p\mathcal{N} = T_p\mathcal{M} \oplus (T_p\mathcal{M})^{\perp}.$$

On notera respectivement $\nabla^{\mathcal{M}}$ et $\nabla^{\mathcal{N}}$ les connexions de Levi-Civita de $(\mathcal{M}, h)$ et $(\mathcal{N}, g)$. On commence par s'intéresser à la différence entre la connexion ambiante et celle induite. Soient X et Y deux champs de vecteurs définis sur un voisinage de $\mathcal{M}$, alors

$$B(X, Y) = \nabla^{\mathcal{N}}_X Y - \nabla^{\mathcal{M}}_X Y$$

est un champ de vecteurs orthogonaux à $\mathcal{M}$. De plus B est bilinéaire, symétrique et $B(X, Y)_p$ ne dépend que de la valeur de X et Y au point p. Nous sommes maintenant en mesure de définir la seconde forme fondamentale de notre immersion.

Définition 1.1.1. *Soit* $\mathrm{N} \in (T\mathcal{M})^{\perp}$ *le champ de vecteur unitaire associé à l'orientation de* $\mathcal{M}$*, on définit alors la seconde forme fondamentale de* f *en* p *comme la forme quadratique suivante sur* $T_p\mathcal{M}$*,*

$$II_p(x) = g\left(B(x, x), N(p)\right) \ \textit{pour } x \in T_p\mathcal{M}.$$

On remarquera que II dépend de l'orientation choisie. A cette forme quadratique on peut associer un endomorphisme symétrique, parfois appelé « opérateur de forme » [1], $S : T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{M}$ défini par

$$g\left(S(x), y\right) = g\left(B(x, y), N(p)\right) \ \text{pour tous } x, y \in T_p\mathcal{M}.$$

1. traduction de shape operator.

Cet endomorphisme peut s'interpréter comme la projection de la dérivée covariante de N sur $T_p\mathcal{M}$ puisque

$$S(x) = -\left(\nabla_x^{\mathcal{M}} N\right)^T.$$

Comme S est symétrique, il existe une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$. On dit alors que les e_i sont les directions de courbure principale et que les κ_i sont les courbures principales de f. On définit la courbure moyenne de l'immersion en un point p par

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \kappa_i.$$

Comme II, H dépend de l'orientation choisie. Plus généralement on définit la k^{ime} courbure moyenne H_k de f en p comme la $k^{\text{ième}}$ fonction symétrique (normalisée) des κ_i :

$$H_k(p) = \frac{k}{n}\sum_{i_1<\cdots<i_k} \kappa_{i_1}\ldots\kappa_{i_k}.$$

H_n est appelée courbure de Gauss.

La seconde forme fondamentale mesure en un certain sens la « différence de courbure » de l'immersion par rapport à celle de l'espace ambiant, ce que l'on exprime usuellement sous la forme du théorème suivant.

Théorème 1.1.1 (de Gauss)**.** *Soit $p \in \mathcal{M}$, x et y dans $T_p\mathcal{M}$, alors*

$$K^{\mathcal{M}}(x,y) - K^{\mathcal{N}}(x,y) = g\left(B(x,x), B(y,y)\right) - |B(x,y)|_g^2,$$

où $K^{\mathcal{M}}$ et $K^{\mathcal{N}}$ désignent respectivement les courbures sectionnelles de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$.

Dans le cas d'une surface immergée dans $\mathbb{R}^3$, on observe que la courbure sectionnelle et la courbure de Gauss correspondent. Ce qui implique le *Theorema Egregium* de Gauss qui affirme que la courbure de Gauss est invariante par isométrie.

1.2 Rigidité de la notion de courbure et premiers exemples

Le *Theorema Egregium* nous assure que la courbure de Gauss est invariante par isométrie, alors que la courbure moyenne ne l'est clairement pas puisque si on considère la symétrie centrale de $\mathbb{R}^3$ la courbure moyenne change de signe par changement d'orientation. Mais on peut considérer des exemples moins triviaux. Par exemple, il existe une isométrie envoyant une partie du plan sur un cylindre droit [2], dans ce cas la courbure de Gauss reste nulle car il y a une courbure principale nulle correspondant à l'axe du cylindre, par contre la courbure moyenne qui est la moyenne des courbures principales devient non-nulle, en fait égale à $\frac{1}{2}$ dans le cas d'un cylindre de rayon 1.

2. On peut penser à la feuille de papier que l'on courbe.

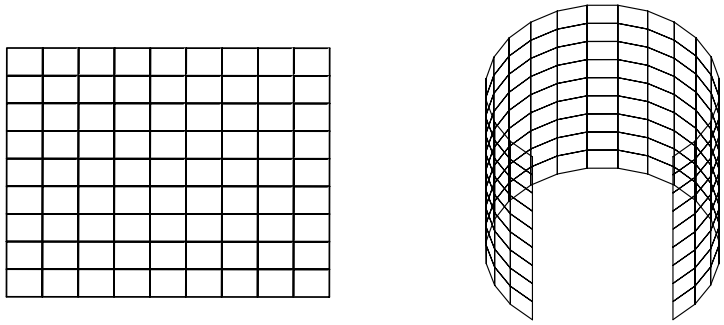


FIGURE 1.1 – Le plan et le cylindre : deux surfaces localement isométriques mais de courbures moyennes différentes.

Inversement, est-ce que la courbure détermine la surface ? Dans le cas de la courbure de Gauss constante, le théorème suivant répond par l'affirmative.

Théorème 1.2.1. *Deux surfaces lisses ayant des courbures de Gauss constantes et égales sont localement isométriques.*

Quitte à remplacer la courbure de Gauss par la courbure sectionnelle, ce théorème se généralise en toutes dimensions. En d'autres termes, toute variété à courbure sectionnelle constante est localement isométrique à l'un des espaces modèles que sont : l'espace euclidien, la sphère ronde et l'espace hyperbolique.

Par contre dans le cas de la courbure moyenne la réponse est clairement négative puisque la sphère de rayon 2 et le cylindre de rayon 1 sont toutes les deux à courbure moyenne constante égale à $\frac{1}{2}$. On verra beaucoup d'autres exemples de surfaces différentes ayant des courbures moyennes constantes et égales dans la section 2.1.

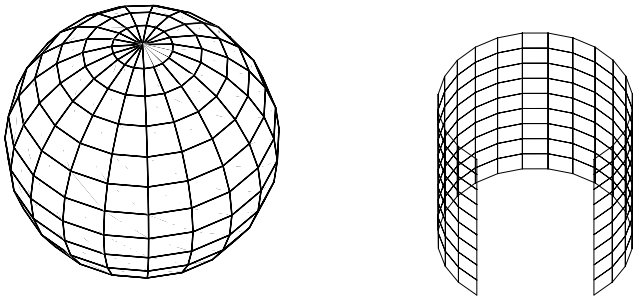


FIGURE 1.2 – La sphère de rayon 2 et le cylindre de rayon 1 : deux surfaces à courbure constante moyenne constante égale à $\frac{1}{2}$.

Il est clair que, du moins localement, la courbure moyenne ne semble pas donner beaucoup d'informations sur la forme de la variété que l'on observe. Toutefois il ne faudrait pas s'arrêter à ce manque de rigidité locale, car comme le montre la section suivante la courbure moyenne encode bien des informations essentielles sur la forme de la variété considérée.

1.3 Première et seconde variations

Soient $(\mathcal{M}, h)$ et $(\mathcal{N}, g)$ deux variétés riemanniennes orientées de dimensions respectives n et $n+1$ et $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une immersion isométrique. Notre but ici est de considérer des petites perturbations de f et de regarder le comportement de quantités géométriques comme l'aire ou le volume.

Définition 1.3.1. *Une variation de f est une application $F :]-1,1[\times\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ lisse telle que*

$$\begin{cases} F(t,.) \text{ est une immersion pour tout } t \in]-1,1[, \\ F(t,x) = f(x) \text{ pour tout } (t,x) \in]-1,1[\times\partial\mathcal{M}, \\ F(0,.) = f. \end{cases}$$

On définit alors deux fonctions associées à une telle variation, l'aire et le volume,

$$A(t) = \int_{\mathcal{M}} dv_{h_t},\ V(t) = \int_{[0,t]\times\mathcal{M}} F^*(dv_g)$$

où $h_t = F(t,.)^*(g)$ est la métrique induite sur $F(t,M)$. On peut interpréter $V(t)$ comme le volume algébrique entre $F(0,M)$ et $F(t,M)$. On voit facilement que A et V sont lisses sur un voisinage de 0 et on calcule leurs dérivées en ce point :

$$A'(0) = \int_{\mathcal{M}} div(X)\, dv_h = -n \int_{\mathcal{M}} Hg\,(X,N)\ dv_h, \tag{1.1}$$

où $div(X) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$ avec (e_i) une base locale orthonormée de $T\mathcal{M}$, et

$$V'(0) = \int_{\mathcal{M}} g\,(X,N)\ dv_h, \tag{1.2}$$

où $X = \frac{\partial F}{\partial t}(0,.)$, N est le champ de vecteurs normal unitaire associé à l'orientation de $\mathcal{M}$ et H la courbure moyenne de f. On remarque d'une part que seule la partie orthogonale de la variation entre en jeu, puisque la partie tangente induit un difféomorphisme qui laisse invariant les quantités considérées. D'autre part on remarque que c'est la courbure moyenne qui mesure la variation de l'aire, en particulier on remarque que l'aire décroît dans la direction$H\,N$ [3]. Si notre surface minimise l'aire selon toute variation, on a alors $H = 0$. Par extension, on appelle surface minimale toute surface vérifiant $H = 0$.

On dira qu'une variation préserve le volume si $V(t)$ ne dépend pas de t. Ceci signifie, dans le cas où $\mathcal{M}$ est compacte et que f est un plongement, que le volume que borde $F(t,\mathcal{M})$ est constant. En particulier, dans le cas d'une variation préservant le volume, on a

$$\int_{\mathcal{M}} g\,(X,N)\ dv_h = 0,$$

ce qui nous amène à la caractérisation suivante des hypersurfaces à courbure moyenne constante.

3. Il est à noter que bien que H et N dépendent de l'orientation choisie, HN lui reste invariant par changement d'orientation. Dans le cas de la sphère unité munie de la normale extérieure la courbure moyenne est alors -1 et donc l'aire décroît bien vers l'intérieur.

Proposition 1.3.1. *Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une immersion, f est à courbure moyenne constante si et seulement si $A'(0) = 0$ pour toute variation préservant le volume.*

Cependant, on peut également caractériser les surfaces à courbure moyenne constante donnée en terme d'une seule fonctionnelle :

$$J_{H_0}(t) = A(t) + nH_0\, V(t).$$

Proposition 1.3.2. *Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une immersion, f est à courbure moyenne constante égale à H_0 si et seulement si $J'_{H_0}(0) = 0$ pour toute variation.*

Il peut s'avérer utile de s'intéresser à une classe de points critiques un peu plus restreinte en considérant parmi eux les hypersurfaces à courbure moyenne constante qui minimisent l'aire localement.

Définition 1.3.2. *On dira qu'une hypersurface à courbure moyenne constante est stable*[4] *si $A''(0) \geq 0$ pour toute variation préservant le volume.*

Soit $u : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse à support compact dans $\mathcal{M}$ et telle que

$$\int_{\mathcal{M}} u\, dv_h = 0,$$

alors $F(t, x) = f(x) + tu(x)N$ définit une variation préservant infinitésimalement le volume[5] et dans ce cas on a

$$A''(0) = \int_{\mathcal{M}} \left(u\Delta u - \left(\|S\|^2 + nRic^{\mathcal{N}}(N, N) \right) u^2 \right)\, dv_h,$$

où $Ric^{\mathcal{N}}$ désigne la courbure de Ricci de $\mathcal{N}$ et $\|S\|^2 = \kappa_1^2 + \cdots + \kappa_n^2$ est le carré de la norme de la seconde forme fondamentale. Ceci nous amène à la caractérisation suivante des hypersurfaces à courbure moyenne constante stables.

Proposition 1.3.3. *Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une immersion à courbure moyenne constante, f est stable si et seulement si*

$$\textit{l'opérateur } \Delta - \left(\|S\|^2 + nRic^{\mathcal{N}}(N, N) \right) \textit{ est positif sur } \left\{ u \in C_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \textit{ t.q. } \int_{\mathcal{M}} u\, dv_h = 0 \right\}.$$

L'opérateur $\Delta - \left(\|S\|^2 + nRic^{\mathcal{N}}(N, N) \right)$ est appelé opérateur de Jacobi. Par exemple, si $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M} = S^2$, l'opérateur de Jacobi devient $\Delta - 2$, qui est positif sur l'ensemble des fonctions de moyenne nulle de S^2. Donc la sphère unité est une surface à courbure moyenne constante stable. Par contre il est clair que $\Delta - 2$ n'est pas positif sur l'ensemble des fonctions lisses de S^2. Toutefois il peut être intéressant dans certains cas d'avoir une notion plus forte de stabilité, c'est-à-dire telle que $A''(0) \geq 0$ pour toute variation.

4. Attention, parfois dans la littérature, on parle dans ce cas de « faiblement stable » par opposition à « stable » qui concerne les surfaces à courbure moyenne constante telle que $A''(0) \geq 0$ pour toutes les variations, y compris celles ne préservant pas le volume.

5. En fait, il existe une variation $\tilde{F}$ préservant réellement le volume telle que $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = uN$; c'est d'ailleurs le point clef des propositions 1.3.1 et 1.3.3, dont on trouvera une preuve dans [7].

Définition 1.3.3. *On dira qu'une hypersurface à courbure moyenne constante est fortement stable si $A''(0) \geq 0$ pour toute variation, c'est-à-dire si*

$$\textit{l'opérateur } \Delta - \left(\|S\|^2 + nRic^{\mathcal{N}}(N,N)\right) \textit{ est positif sur } C_c^\infty(\mathcal{M},\mathbb{R}).$$

Cette notion de stabilité est plus adaptée aux hypersurfaces à bord. Par exemple, pour$\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$, on remarquera que tout morceau de la sphère unité contenu dans un hémisphère est fortement stable.

Dans la section suivante, on s'intéresse à une classe spéciale d'hypersurfaces à courbure moyenne constante qui sont stables au sens précédent, celles qui minimisent la fonctionnelle d'aire globalement.

1.4 Le problème isopérimétrique

Un sujet fortement relié à celui des hypersurfaces à courbure moyenne constante stables est celui des domaines isopérimétriques d'une variété complète ($\mathcal{N}$,g), c'est-à-dire des domaines $\Omega \subset \mathcal{N}$ de volume fixé dont l'aire du bord est minimale. Le bon cadre pour attaquer un tel problème est celui de la théorie géométrique de la mesure dont on trouvera une présentation claire et concise dans [84]. En effet dans ce cadre on considère des objets moins rigides que les hypersurfaces : les courants. L'espace des courants peut s'interpréter comme la complétion de l'espace des hypersurfaces pour une norme adaptée. De sorte que tout ensemble de courants borné est précompact. Ceci permet d'obtenir des résultats d'existence que la non complétude de l'espace des hypersurfaces rendait impossible. En revanche le prix à payer pour cela est de sacrifier la régularité. Toutefois on possède aujourd'hui une théorie de la régularité pour de tels courants minimisants. Cette théorie a été développée dans les années 60, notamment par Almgren, Bombieri, De Giorgi, Guisti et Fleming, voir le chapitre 8 de [84]. Le résultat essentiel de cette théorie réside dans le théorème suivant.

Théorème 1.4.1. *Soit T un courant rectifiable de dimension n d'aire minimale à volume prescrit. Alors T est une hypersurface lisse à courbure moyenne constante en dehors d'un ensemble singulier de dimension au plus $n-7$.*

Lorsque l'on a existence de tels domaines, ce qui n'est pas automatique, toutefois c'est le cas dans une variété compacte ou un espace modèle[6], reste à déterminer leur forme. Dans le cas euclidien, on sait que ces hypersurfaces sont nécessairement des sphères. D'ailleurs il existe une multitude de preuves de ce résultat, comme le principe de symétrisation de Steiner, voir Burago-Zalgaller [15] ou encore la preuve très élégante due à Gromov présentée dans Berger-Gostiaux [8]. Mais on peut appliquer le résultat de Barbosa et do Carmo, théorème 3.1.2 de la section 3.1, pour obtenir le théorème suivant.

Théorème 1.4.2. *Dans un espace modèle, les solutions du problème isopérimétrique sont nécessairement des sphères géodésiques.*

Dans le cas d'une variété compacte générale, la situation semble beaucoup plus compliquée. On aura toutefois quelques éléments de réponse dans la section 3.3.

6. Le terme espace modèle désigne une variété simplement connexe dont la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n$, S^n ou $\mathbb{H}^n$.

On peut également s'intéresser à un problème semblable : le problème de partitionnement. On se donne un domaine Ω d'une variété riemannienne $(\mathcal{N}, g)$, $\sigma \in]0,1[$ et on considère le problème suivant :

Déterminer les hypersurfaces d'aire minimale dont le bord est contenu dans $\partial\Omega$ et qui divise Ω en deux ouverts Ω_1, Ω_2 tels que $|\Omega_1|_g = \sigma|\Omega|_g$ et $|\Omega_2|_g = (1-\sigma)|\Omega|_g$.

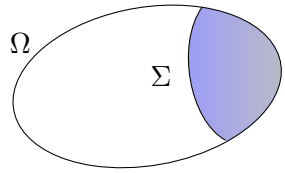


FIGURE 1.3 – Région isopérimétrique dans un domaine Ω

Comme pour le problème classique, la théorie géométrique de la mesure assure l'existence de telles hypersurfaces ; de plus, l'intérieur d'une telle hypersurface est lisse et à courbure moyenne constante, en dehors d'un ensemble singulier de dimension au plus $n-7$. En fait, dans le cas d'un domaine lisse de $\mathbb{R}^3$ on sait même que les solutions sont régulières jusqu'au bord et rencontrent le bord de $\partial\Omega$ orthogonalement, voir section 5.3.

1.5 Le cas particulier des surfaces

Ici on présente le cas des surfaces (i.e. $n = 2$) qui est tout à fait spécifique, notamment vis-à-vis du comportement conforme. En effet, outre l'existence de coordonnées conformes, l'invariance conforme d'un certain nombre de quantités comme l'énergie fait que la courbure moyenne possède un très bon comportement en dimension 2.

1.5.1 Théorie des surfaces de $\mathbb{R}^3$ en notation classique

On va développer le cas euclidien pour des questions de clarté, mais il n'y a aucune difficulté à considérer des surfaces dans des espaces ambiants plus généraux, comme nous le verrons au chapitre 3.

Soit D un domaine du (x,y)-plan et $u : D \to \mathbb{R}^3$ une immersion lisse. La première forme fondamentale est alors

$$I_u = Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2,$$

où $E = \langle u_x, u_x\rangle$, $F = \langle u_x, u_y\rangle$ et $G = \langle u_y, u_y\rangle$. On définit alors l'application de Gauss $\vec{n} : D \to S^2$ par

$$\vec{n} = \frac{u_x \wedge u_y}{\|u_x \wedge u_y\|}.$$

On peut alors calculer la seconde forme fondamentale en considérant les dérivées de $\vec{n}$ puis en les projetant sur le plan tangent. On obtient alors

$$II_u = Ldx^2 + Mdxdy + Ndy^2,$$

où $L = -\langle n_x, u_x\rangle = \langle n, u_{xx}\rangle$, $M = -\langle n_x, u_y\rangle = \langle n, u_{xy}\rangle$ et $N = -\langle n_y, u_y\rangle = \langle n, u_{yy}\rangle$.

Maintenant en calculant le déterminant et la trace de la seconde forme par rapport à la première forme, on obtient les expressions suivantes pour la courbure de Gauss et la courbure moyenne :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{1.3}$$

et

$$H = \frac{1}{2}\frac{GL + EN - 2FM}{EG - F^2}. \tag{1.4}$$

1.5.2 Les coordonnées conformes

Les expressions ci-dessus, exprimant la courbure en fonction des dérivées de u sont hautement non linéaires. Toutefois, en choisissant un système de coordonnées particulières, elles se simplifient.

Définition 1.5.1. *On dit qu'une application $u : D \to \mathbb{R}^3$ est conforme si*

$$E = G \text{ et } F = 0,$$

c'est-à-dire lorsque la première forme fondamentale est proportionnelle à la forme canonique $dx^2 + dy^2$.

Lorsque u est conforme, (1.3) et (1.4) deviennent respectivement

$$K = \frac{\Delta Log(\lambda^2)}{2}, \tag{1.5}$$

et

$$H = \frac{1}{2}\frac{L + N}{\lambda^2}, \tag{1.6}$$

où $\lambda^2 = E = G$. Par exemple, si on considère une immersion conforme $u : D \to \mathbb{R}^3$, l'équation de courbure moyenne devient

$$\Delta u = -2H(u)\, u_x \wedge u_y,$$

qui est une équation elliptique quasilinéaire.

Attention, l'existence de telles coordonnées est loin d'être complètement triviale, puisqu'elle revient à résoudre l'équation de Beltrami, cependant c'est toujours possible sur un domaine simplement connexe comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.5.1. *Soit I une forme quadratique lisse définie positive sur un ouvert D simplement connexe du plan, alors il existe $\phi \in Diff(D)$ tel que $\phi^*(I) = \rho(dx^2 + dy^2)$ où ρ est une fonction lisse et positive de D.*

On trouvera une preuve relativement classique dans [24] et une utilisant de manière très astucieuse l'étoile de Hodge dans [34].

1.5.3 Correspondance entre surfaces à courbure moyenne constante et applications harmoniques

Comme on l'a vu dans la section précédente, toute immersion d'une surface Σ dans $\mathbb{R}^3$ admet localement en tout point un paramétrage conforme. En particulier une telle immersion si elle est munie d'une orientation peut être considérée comme une surface de Riemann. Son application de Gauss est alors une application de cette surface de Riemann dans la sphère de Riemann.

Dans le cas des surfaces minimales, il est bien connu que l'application de Gauss est holomorphe et qu'étant donnée une telle application on peut construire une surface minimale correspondante, c'est la **représentation d'Enneper-Weierstrass** que l'on rappelle ici, voir [88] pour plus de détails.

Théorème 1.5.2. *Soient D un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ et $u : D \to \mathbb{R}^3$ une immersion minimale ($H = 0$) alors $g = \vec{n} : D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe et il existe $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que*

$$u(\xi) = \Re\left(\int_0^\xi f(1-g^2)\,dz, \int_0^\xi i\,f(1+g^2)\,dz, 2\int_0^\xi fg\,dz\right) \text{ pour tout } \xi \in D.$$

De plus f a un zéro d'ordre au moins $2m$ là où g a un pôle d'ordre m.
Réciproquement, pour toute application méromorphe de D, il existe une surface minimale ayant cette application comme application de Gauss.

Dans le cas des surfaces à courbure moyenne constante, la notion d'application holomorphe va être remplacée par celle d'application harmonique, que l'on définit comme suit.

Définition 1.5.2. *Soit $f \in C^2\left((\mathcal{M}, h), (\mathcal{N}, g)\right)$ une application entre variétés riemanniennes, on définit son* **énergie** *comme*

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2\,dv_h.$$

On dit que f est **harmonique** *si elle est point critique de la fonctionnelle d'énergie E.*

L'équation d'Euler-Lagrange associée à E est

$$-\frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{|h|}h^{\alpha\beta}\frac{\partial f^k}{\partial x^\beta}\right) = h^{\alpha\beta}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j}{\partial x^\beta}, \tag{1.7}$$

où Γ_{ij}^k est le symbole de Christofell associé à g_{ij}. En particulier lorsque l'espace cible est $\mathbb{R}$, on retrouve le laplacien de Beltrami et les fonctions harmoniques au sens classique. Lorsque l'espace de départ est S^1, on retrouve l'équation des géodésiques.

Le lien entre applications harmoniques et surfaces à courbure moyenne constante est clairement établie par le résultat suivant dû à Ruh et Vilms [103].

Théorème 1.5.3. *Soit $u : D \to \mathbb{R}^3$ une immersion, alors son image est à courbure moyenne constante si et seulement si son application de Gauss $\vec{n} : D \to S^2$ est harmonique.*

Dans ce cas (1.7) devient

$$\Delta\vec{n} = |\nabla\vec{n}|^2\,\vec{n}. \tag{1.8}$$

En fait en guise de preuve on donne l'équation générale vérifiée par l'application de Gauss d'une immersion u,

$$\Delta\vec{n} = |\nabla\vec{n}|^2\,\vec{n} - 2|\nabla u|^2\,\nabla H(u). \tag{1.9}$$

D'autre part, la réciproque est également vraie. Etant donnée $n : \mathbb{D} \to S^2$ harmonique, alors il existe une immersion à courbure moyenne constante admettant n comme application de Gauss, voir chapitre 1 de [54].

Enfin, on notera qu'il existe une représentation de type Enneper-Weierstrass pour les surfaces à courbure moyenne constante, voir section 8.3 de [68].

1.5.4 Effet du bord sur la forme d'une surface à courbure moyenne constante : la formule d'équilibre

Dans cette section on présente une formule découverte par Kusner pendant sa thèse concernant les surfaces à courbure moyenne constante. Cette formule lie la forme du bord et celle de la surface, voir [72].

Considérons une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ ayant pour bord $\partial S \neq \emptyset$ et $\vec{X}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La formule de la première variation (1.1) donne alors

$$\delta_{\vec{X}}(A(S)) = \int_S div(\vec{X})\,d\sigma = \int_S 2H\langle\vec{N},\vec{X}\rangle\,d\sigma + \int_{\partial S}\langle\vec{\eta},\vec{X}\rangle\,ds, \tag{1.10}$$

où $\vec{N}$ est la normale extérieure, H la courbure moyenne par rapport à la normale intérieure [7] et $\vec{\eta}$ la conormale extérieure. Contrairement à (1.1), on a en plus un terme de bord puisqu'*a priori* la variation est non-nulle au bord. Si on choisit pour $\vec{X}$ un champ de vecteurs constant alors le flot engendré par $\vec{X}$ est une simple translation et donc $\delta_{\vec{X}}(A(S)) = 0$. En appliquant cette remarque à tous les champs de vecteurs constants, on obtient

$$2\int_S H\vec{N}\,d\sigma + \int_{\partial S}\vec{\eta}\,ds = 0. \tag{1.11}$$

On choisit maintenant Σ une surface « refermant » S, c'est-à-dire telle que $\partial\Sigma = \partial S$ et on note Ω le volume bordé par $S \cup \Sigma$, voir figure 1.4.

On peut s'intéresser aux variations du volume de Ω sous l'action d'un champ de vecteur $\vec{X}$. D'après (1.2), on a

$$\delta_{\vec{X}}(V(\Omega)) = \int_S\langle\vec{N},\vec{X}\rangle d\sigma + \int_\Sigma\langle\vec{\nu},\vec{X}\rangle d\sigma, \tag{1.12}$$

où $\vec{\nu}$ est la normale sortante de Σ. D'après la proposition 1.3.2, une condition nécessaire et suffisante pour que S soit une surface à courbure moyenne constante H_0 est que

$$\delta_{\vec{X}}(A(S) - 2H_0V(\Omega)) = 0 \text{ pour tout } \vec{X}.$$

7. On calcule habituellement la courbure moyenne par rapport à la normale intérieure de sorte que celle de la sphère unité vaille 1. Ceci explique le changement de signe dans (1.10) par rapport à (1.1).

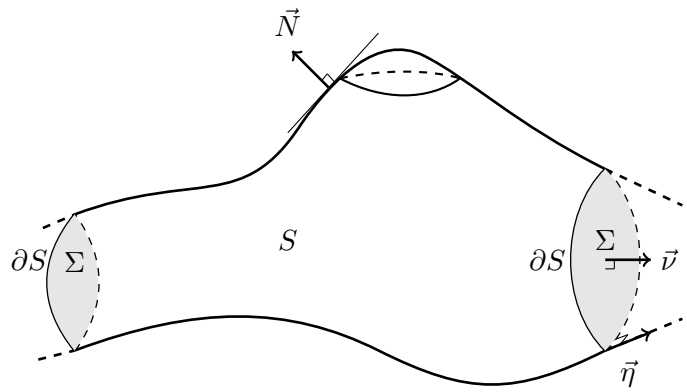


FIGURE 1.4 – une surface à bord.

Ceci donne d'après (1.10) et (1.12) la formule de l'équilibre.

Théorème 1.5.4. *Soit $f : S \to \mathbb{R}^3$ un plongement propre d'une surface à bord dans $\mathbb{R}^3$, si f est à courbure moyenne constante égale à H_0 alors*

$$\int_{\partial S} \vec{\eta}\, ds = 2H_0 \int_{\Sigma} \vec{\nu}\, d\sigma. \tag{1.13}$$

Supposons que le bord de la surface considérée ait k composantes connexes, notées C_k et refermées par k surfaces Σ_k, alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{C_k} \vec{\eta}\, ds - 2H_0 \int_{\Sigma_k} \vec{\nu}\, d\sigma = 0. \tag{1.14}$$

On observe donc qu'un phénomène d'équilibrage est nécessaire entre les différents bouts, d'où le nom de la formule. On verra à la section 2.1.2 comment utiliser cette formule afin de construire de nouvelles surfaces à courbure moyenne constante.

Chapitre 2

Courbure moyenne des surfaces de l'espace euclidien

Le but de ce chapitre est de donner un bref panorama des surfaces à courbure moyenne constante, mais aussi d'essayer de comprendre quelles courbures moyennes sont admissibles pour une surface. Comme on l'a vu dans la section 1.2, contrairement à la courbure de Gauss, la courbure moyenne n'est pas très rigide, du moins localement. Cependant nous allons voir que globalement nous possédons quelques théorèmes de classification. Nous verrons également qu'il existe des restrictions d'ordre global sur les courbures moyennes de surfaces.

2.1 Zoologie des surfaces à courbure moyenne constante

2.1.1 Les surfaces de révolution de $\mathbb{R}^3$

Tout commence en 1841 avec Delaunay qui classifia les surfaces de révolution à courbure moyenne constante [33].

Soient Γ une courbe lisse contenue dans le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un paramétrage de Γ par la longueur d'arc. Supposons de plus que $\gamma_2(s) > 0$ pour tout $s \in I$. On note S la surface engendrée par la rotation de la courbe C autour de l'axe x, soit

$$S = \{(x(s), y(s)cos(\theta), y(s)sin(\theta)) \mid s \in I,\ \theta \in [0, 2\pi]\},$$

avec $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$. On peut alors calculer les deux formes fondamentales :

$$\begin{aligned} &I_S = ds^2 + y(s)d\theta^2 \\ &\text{ et} \\ &II_S = (x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s))ds^2 + x'(s)y(s)d\theta^2. \end{aligned}$$

Donc trouver les surfaces de révolution à courbure moyenne constante revient à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1, \\ \frac{x'(s)+x''(s)y'(s)-x'(s)y''(s))ds^2+x'(s)y(s)}{y(s)} = H. \end{cases}$$

Après l'avoir normalisé, on trouve trois familles de courbes : les chaînettes pour $H = 0$, et deux familles de courbes engendrées par des intégrales elliptiques pour $H = 1$. En fait ces familles étaient connues depuis longtemps, elles correspondent à la trace du foyer d'une conique qui roule sans glisser le long d'un axe.

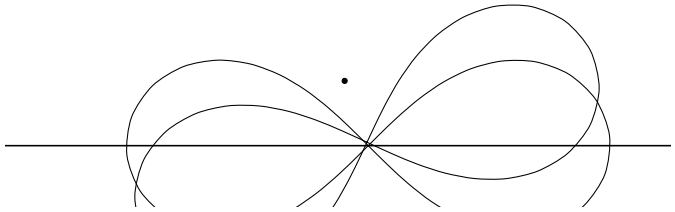


FIGURE 2.1 – La chaînette

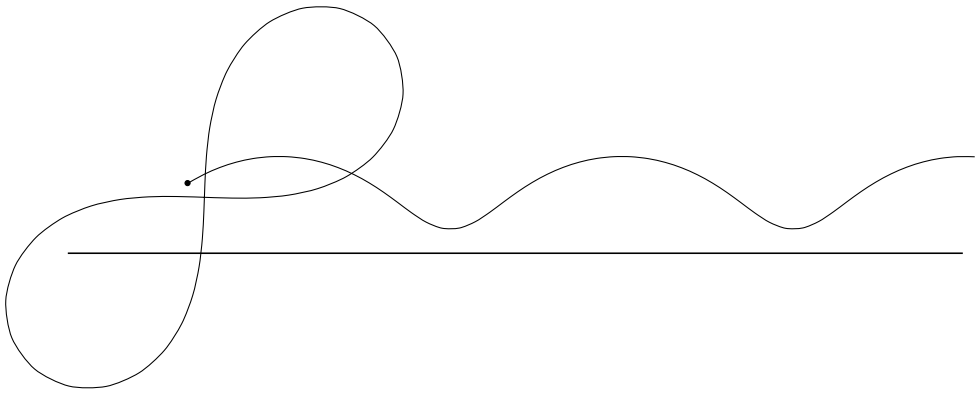


FIGURE 2.2 – L'ondulaire

Puis en faisant tourner ces courbes, on obtient les trois familles de surfaces de révolution à courbure moyenne constante.

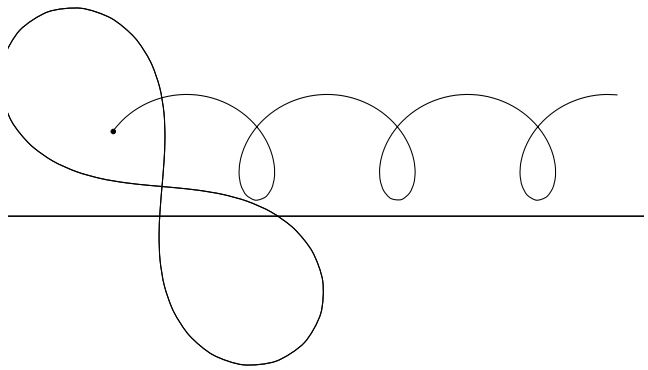


FIGURE 2.3 – Le nodulaire

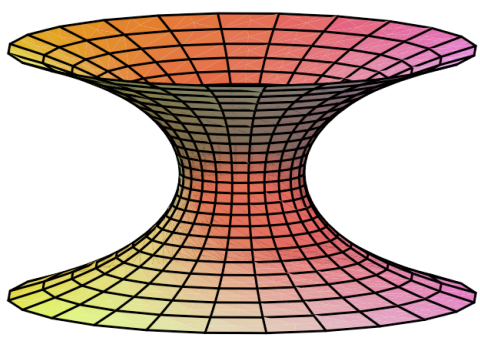


FIGURE 2.4 – La caténoïde

Voici un paramétrage explicite de l'onduloïde et du nodoïde pour $H = 1$:

$$U(s,\theta,b) = \left(\int_0^s \frac{1 + bsin(2t)}{\sqrt{1 + b^2 + 2bsin(2t)}}\, dt, \frac{1}{2}cos(\theta)\sqrt{1 + b^2 + 2bsin(2s)}, \right. \\ \left. \frac{1}{2}sin(\theta)\sqrt{1 + b^2 + 2bsin(2s)} \right) \text{ pour } (s,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[, \tag{2.1}$$

où b est un paramètre positif. Lorsque b croît, on passe d'un cylindre droit à des onduloïdes qui dégénèrent sur un chapelet de sphères (b=1) puis des nodoïdes. On peut donc énoncer le théorème de Delaunay comme suit :

Théorème 2.1.1 (Delaunay, 1841)**.** *Une surface de révolution à courbure moyenne constante est localement congruente à un plan, un cylindre droit, une sphère, une caténoïde, un onduloïde ou un nodoïde.*

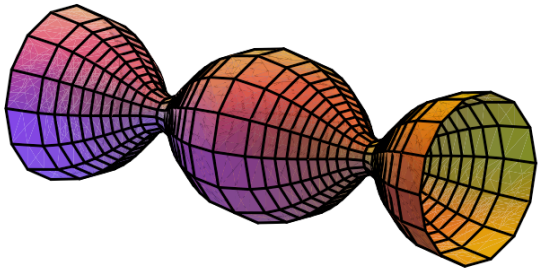


FIGURE 2.5 – L'onduloïde

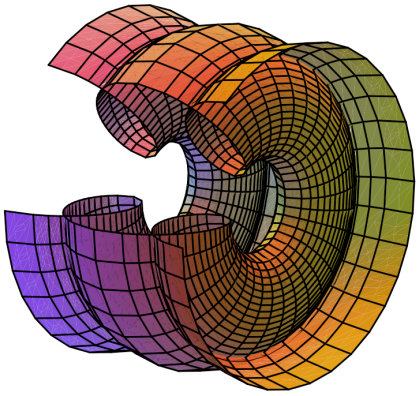


FIGURE 2.6 – Le nodoïde

Par la suite, tout cela a été généralisé en dimensions plus grandes. On trouvera un équivalent du théorème de Delaunay chez Hsiang et Yu, voir [59].

2.1.2 Les surfaces compactes

Dans le cas des surfaces compactes, l'un des plus anciens résultat généraux de classification remonte à Hopf qui montre un résultat de rigidité pour les sphères de dimension 2 à courbure moyenne constante.

Théorème 2.1.2 (Hopf 1951)**.** *Soit S une surface simplement connexe à courbure moyenne constante, alors c'est une sphère ronde.*

On en trouvera la preuve dans [58]. Elle repose essentiellement sur la caractérisation des sphères comme surfaces ombiliques et sur une bonne utilisation de la formule de Poincaré-Hopf.

Mais peut-on affaiblir les hypothèses, c'est-à-dire considérer des surfaces de genre quelconque ? Hopf avait conjecturé que oui. D'ailleurs, quelques années plus tard, Aleksandrov [1]

montre cette conjecture dans le cas particulier des surfaces plongées et qui plus est en toutes dimensions. Alors que le résultat de Hopf est faux en dimensions plus grandes comme le montreront plus tard Hsiang et al. , voir le Chapitre VII de [44]. Pour montrer son résultat, Aleksandrov développe une méthode qui va trouver de nombreuses applications en géométrie mais aussi en analyse : le principe de réflexion d'Aleksandrov [1].

Théorème 2.1.3 (Aleksandrov 1956)**.** *Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface à courbure moyenne constante. Si S est plongée, alors c'est une sphère ronde.*

Nous allons donner une preuve concise de ce théorème afin d'introduire le principe de réflexion. La preuve proposée ici ne nécessite que le principe du maximum de Hopf comme prérequis, elle est le fruit des lectures des différentes preuves que j'ai pu croiser dans la littérature. Dans un souci de clarté la preuve sera faite en dimension 3 mais son extension en dimensions plus grandes ne pose aucune difficulté supplémentaire.

Preuve du théorème 2.1.3 :

Tout d'abord on dérive de (1.4) l'équation vérifiée par un graphe à courbure moyenne constante égale à 1. Si la surface $S = \{(x, y, u(x, y)) \text{ t.q. } x, y \in \mathbb{D}\}$ est à courbure moyenne constante, où $u \in C^2(\mathbb{D}, \mathbb{R})$, alors

$$\frac{(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy}}{2(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} = 1. \tag{2.2}$$

Afin d'étudier cette équation non-linéaire du second ordre, on pose

$$O(p, q, r, s, t) = (1+q^2)s - 2pqr + (1+p^2)t - 2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En utilisant le lemme d'Hadamard, on obtient

$$O(p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) - O(p_2, q_2, r_2, s_2, t_2) = P(p_1 - p_2) + Q(q_1 - q_2) + R(r_1 - r_2) + S(s_1 - s_2) + T(t_1 - t_2)$$

où P, Q, R, S, T sont des fonctions explicites de $p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, p_2, q_2, r_2, s_2$ et t_2. On peut de plus vérifier que

$$ST - R^2 > \frac{1}{2}.$$

En appliquant ceci avec $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xy}$, $s = u_{xx}$ et $t = u_{yy}$, on vérifie que si u_1 et u_2 sont deux fonctions définies sur $\mathbb{D}$ vérifiant (2.2) alors

$$a_{ij}(x)\partial_{ij}(u_2 - u_1) + \langle \nabla(u_2 - u_1), h\rangle = 0$$

où $A = (a_{ij}(x))$ est uniformément définie positive sur $\mathbb{D}$ et h est une fonction lisse sur $\mathbb{D}$. En d'autres termes la différence entre deux surfaces à courbure moyenne constante égale à 1 vérifie une équation uniformément elliptique d'ordre 2. On va donc pouvoir appliquer le principe du maximum de Hopf.

En particulier, supposons que $u_1 \leq u_2$ et que $u_1(x_0) = u_2(x_0)$ pour $x_0 \in \overline{\Omega}$. Alors soit $u_1 \equiv u_2$, soit $x_0 \in \partial\Omega$ et

$$\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

1. ou Moving plane method.

où ν est la normale sortante de $\mathbb{D}$. Ceci implique que deux surfaces de même courbure moyenne constante ne peuvent rester l'une sous l'autre et être tangente en un point.

Après ce préliminaire analytique, nous sommes en mesure de prouver le théorème.

Soit S une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ à courbure moyenne constante que l'on supposera, quitte à dilater notre surface et/ou changer l'orientation, égale à 1. Nous allons montrer que cette surface admet un plan de symétrie dans toutes les directions, ce qui achèvera la preuve, puisque la sphère est la seule surface compacte ayant une telle propriété.

Soit un plan P qui n'intersecte par S. Soit $\vec{\eta}$ la normale de ce plan qui pointe vers S, on considère alors la famille de plan $P_t = P + t\vec{\eta}$. Il existe un premier temps $t_0 > 0$ où $P_{t_0} \cap S$ est non vide. Pour $t > t_0$, on note S_t^+ le symétrique par rapport à P_t de $S_t^- = S \cap \{P_t + u\vec{\eta} \text{ t.q. } u < 0\}$, voir figure 2.7.

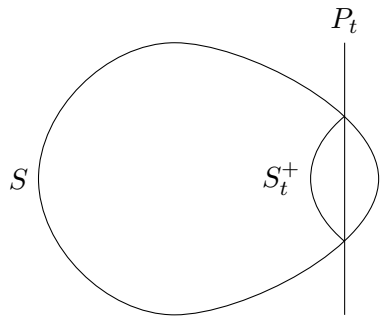


FIGURE 2.7 – Définition de S_t^+.

Puis il existe un premier temps t_1 tel que $S_{t_1}^+ \cap S$ soit non vide ou tangent au bord. Les deux cas sont présentés ci dessous.

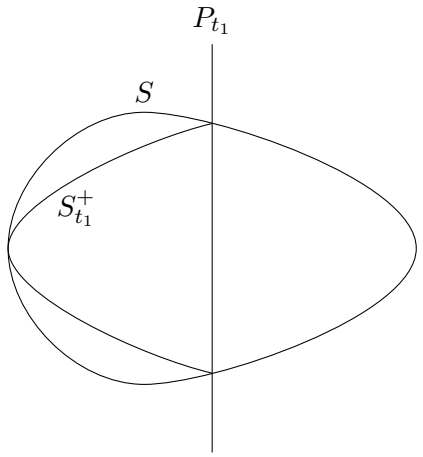


FIGURE 2.8 – Contact intérieur.

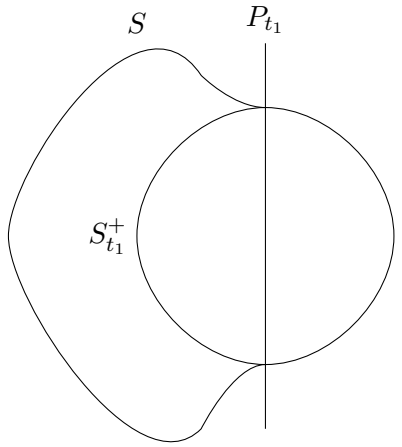


FIGURE 2.9 – Les bords sont tangents.

De plus les normales de ces points de contact sont clairement égales puisque S_t vient de l'intérieur de S, donc localement autour de ce point ces surfaces sont des graphes de courbure moyenne constante 1. On peut donc appliquer le principe du maximum évoqué plus haut. Il est alors clair que $\Sigma_{t_1}^+$ et Σ_{t_1} sont localement égales et donc globalement par connexité. Ce qui prouve que $\Sigma_{t_1}^+$ est le symétrique de $\Sigma_{t_1}^-$ par P_{t_1}, ce qui achève la démonstration. ■

Il existe une preuve totalement différente de ce théorème due à Reilly reposant sur l'inégalité de Heintze-Karcher, dont on trouvera une preuve très éclairante dans l'ouvrage de Montiel et Ros [83]. D'ailleurs, en utilisant cette idée, Ros [97] a généralisé le théorème aux courbures moyennes d'ordre supérieur. Enfin, il est à noter que, toujours en exploitant cette idée, on peut affaiblir l'hypothèse de plongement, en supposant simplement qu'il s'agit d'une immersion qui borde.

Cependant l'hypothèse de plongement est quasi-nécessaire. En effet, en 1983, Wente [121] démontre l'existence de tores immergés dans $\mathbb{R}^3$ à courbure moyenne constante et par là-même réfute la conjecture de Hopf.

Théorème 2.1.4 (Wente 1983)**.** *Il existe une immersion de T^2 dans $\mathbb{R}^3$ dont l'image est à courbure moyenne constante.*

On trouvera une preuve assez claire de ce théorème au chapitre 6 de [68].

En fait la zoologie de telles immersions est assez importante. Le cas des tores a été classé par Pinkall et Sterling [91]. Puis, au cours des années 90, Kapouleas a montré l'existence de surfaces à courbure moyenne constante de genre arbitraire dans [62], [63], [64] et [65].

Théorème 2.1.5 (Kapouleas 90')**.** *Pour tout entier g, il existe une surface compacte à courbure moyenne constante de genre g. De plus, pour $g \geq 2$, il existe une infinité de telles surfaces.*

Pour les surfaces de genre 2, Kapouleas les construit en faisant fusionner deux tores de Wente. Pour le genre supérieur, il développe une technique qui consiste à recoller entre eux des morceaux de surfaces de Delaunay. Cette technique étant très robuste, elle sera à l'origine de beaucoup d'autres constructions notamment dans le cas riemannien. Nous allons la décrire brièvement sur un cas particulier.

Par exemple, pour $g = 4$, on positionne 5 sphères de rayon 1 sur les sommets et au centre d'un carré. Puis on joint ces sphères par des surfaces de Delaunay. Mais on ne peut pas prendre n'importe quelle surface au choix parmi les onduloïdes et les nodoïdes. Premièrement parce que si on ne choisissait que des onduloïdes, la surface serait plongée, ce qui serait absurde d'après le théorème d'Aleksandrov. Deuxièmement, il va falloir qu'aux voisinages des sphères la formule de l'équilibre 1.14 soit vérifiée. Si on fait une construction symétrique, elle le sera trivialement au centre. Par contre ce n'est pas évident au niveau des sommets. Pour cela on calcule la « force » du bord d'un onduloïde et d'un nodoïde. De manière générale, pour une surface de révolution de génératrice γ, on a

$$\vec{m} = \int_{C(0,\gamma_2(t),0)} \vec{\eta}\, ds - 2H \int_{D(0,\gamma_2(t),0)} \vec{\nu}\, d\sigma = 2\pi\gamma(t) \left(\frac{1}{\sqrt{1+\gamma'(t)^2}} - H\gamma(t) \right) \vec{\nu},$$

où γ paramètre la génératice et $\vec{\nu} = (0, 1, 0)$.

Maintenant si on applique ceci en un point tel que γ soit maximum , avec $H = 1$, on obtient

$$\vec{m}_+ = 2\pi\gamma_+(1-\gamma_+)\vec{\nu},$$

qui pointe vers l'extérieur pour l'onduloïde et vers l'intérieur pour le nodoïde.

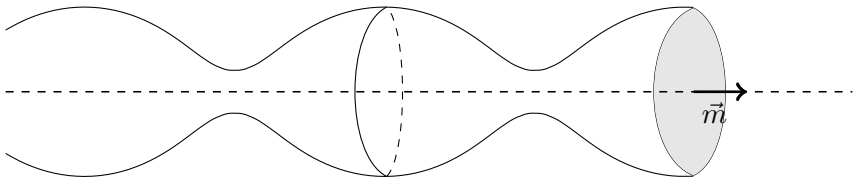


FIGURE 2.10 – L'onduloïde est répulsif.

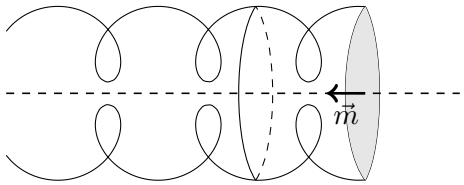


FIGURE 2.11 – Le nodoïde est attractif.

Voici un exemple de configuration respectant la formule de l'équilibre en genre 4.

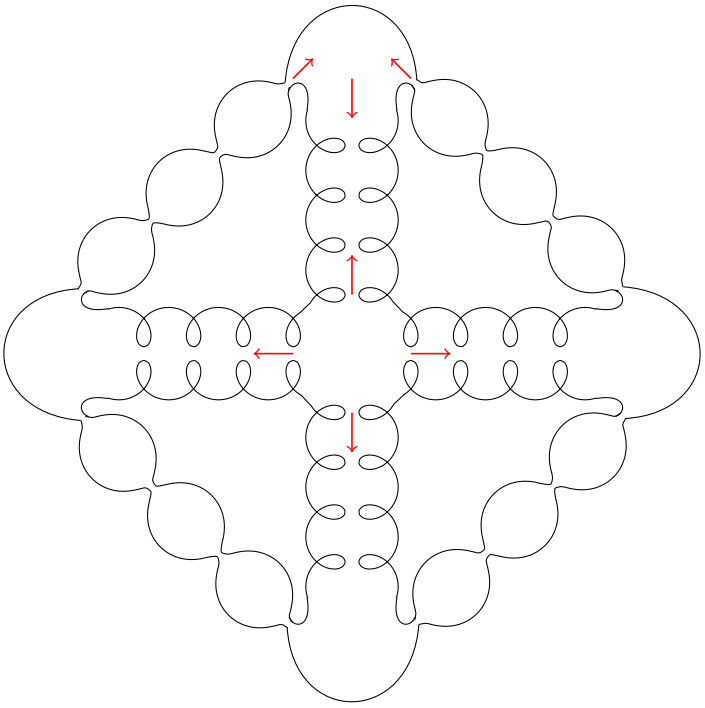


FIGURE 2.12 – Surface à courbure moyenne constante de genre 4.

Bien sûr, le fait d'arriver à coller ces sphères et ces surfaces de Delaunay en restant à courbure moyenne constante n'est pas trivial, cela demande une analyse minutieuse. L'idée est de prendre une configuration de surfaces de Delaunay comme ci-dessus, de les recoller de manière à obtenir une surface lisse. Puis, c'est ici le point clef, de les perturber via un théorème des fonctions implicites en des surfaces à courbure moyenne constante. Pour que cette perturbation soit possible il faut *a priori* que l'opérateur de Jacobi soit non dégénéré, or c'est rarement le cas. Toutefois le noyau de celui-ci est souvent de dimension finie, lorsque par exemple les cous sont petits, c'est-à-dire qu'on est proche d'un chapelet de sphères, dans ce cas on peut tout de même perturber notre surface en annulant l'action de ce noyau en jouant sur un certain nombre de paramètres comme le paramétrage conforme ou encore la taille des cous.

Même si on possède une multitude d'exemples de surfaces à courbure moyenne constante compacte, leur espace de module est loin d'être encore parfaitement compris. Par exemple, récemment, Pacard et Jleli [60] ont construit de nouveaux exemples pour $g \geq 3$.

Enfin pour conclure ce paragraphe, il est à noter que l'espace de module des surfaces à courbure moyenne constante complète non compacte est lui plutôt bien compris, voir [51],[73], [80] et les références associées.

2.1.3 Le cas particulier des surfaces stables

Comme on vient de le voir, la classification des surfaces à courbure moyenne constante compacte n'est pas claire. Cependant, si on se restreint au cas des surfaces stables, la situation est beaucoup plus simple, grâce au théorème suivant dû à Barbosa et Do Carmo, [6].

Théorème 2.1.6 (Barbosa, do Carmo, 1984)**.** *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface compacte à courbure moyenne constante. Si S est stable, alors S est nécessairement une sphère ronde.*

En fait, si on se restreint au cas des surfaces, on a encore mieux.

Théorème 2.1.7. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface complète à courbure moyenne constante. Si S est stable, alors S est nécessairement un plan ou une sphère ronde.*

Ce résultat a été démontré de manière indépendante par da Silveira et Palmer dans leurs thèses respectives, alors que Lopez et Ros publiait également une démonstration dans [77].

2.2 Quelques obstructions pour la courbure moyenne des surfaces compactes

Dans la section précédente nous avons fait un peu de zoologie des surfaces compactes à courbure moyenne constante. Mais une question naturelle serait maintenant de savoir quelles sont les fonctions H qui sont courbure moyenne d'une surface ? Bien sûr, compte tenu du caractère extrinsèque de la courbure moyenne, la courbure à prescrire H sera définie dans l'espace ambiant. On trouve d'ailleurs ce problème dans la longue liste de problèmes ouverts proposée par Yau [106] dans les années 80.

Problème 59 (Yau [106]) :
Soit $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Peut-on trouver une condition raisonnable sur H pour assurer l'existence d'une surface compacte de genre fixé et dont la courbure moyenne serait donnée par H ?

Tout d'abord on peut rappeler une remarque de Almgren : pour un H « convenable », on peut trouver $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour courbure moyenne H en maximisant sur tous les domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la quantité

$$F(\Omega) = \int_\Omega H d\xi - A(\partial\Omega).$$

Dans ce cas une fonction H convenable serait continue, bornée, intégrable et de sorte que $\sup H > 0$. Par contre, on ne voit pas vraiment ce qui va lier le genre de $\partial\Omega$ et H.

Une première réponse dans le cas des surfaces de genre nul a été donnée par Bakelman et Kantor [5], voir aussi [118]. En effet, ils montrent l'existence de sphères à courbure moyenne prescrite en supposant que H ne décroit pas plus vite que la courbure moyenne des sphères rondes centrées en l'origine.

D'autre part il pourrait sembler judicieux de s'inspirer de ce qui a été fait pour la courbure de Gauss. Bien entendu toute courbure de Gauss doit vérifier la formule de Gauss-Bonnet

$$\int_S K\, d\sigma = 2\pi(2 - 2g),$$

où g est le genre de la surface. Mais il existe d'autres obstructions, notamment les deux résultats suivant dus à Kazdan et Warner.

Théorème 2.2.1 (Kazdan, Warner, 1972)**.** *Une surface de révolution compacte de $\mathbb{R}^3$ ne peut admettre de courbure de Gauss strictement croissante selon son axe de révolution.*

L'idée ici est que l'équation satisfaite par la génératrice

$$\gamma'' + K\gamma = 0,$$

n'a pas de solution pour K croissant avec des conditions convenables au bord, voir [67]. Une question naturelle serait de savoir si on peut s'attendre à un résultat similaire pour la courbure moyenne ? C'est ce que nous allons regarder aux sections 2.2.1 et 2.2.2.

L'autre résultat concerne le problème de courbure prescrite dans une classe conforme de la sphère, [66].

Théorème 2.2.2 (Kazdan, Warner, 1975)**.** *On considère la sphère munie de sa métrique standard (S^2, g_0) et K une fonction lisse de S^2. S'il existe une fonction u lisse telle que K soit la courbure de Gauss de la métrique $g = e^u g_0$ alors*

$$\int_{S^2} \langle \nabla K, \nabla \phi_1 \rangle dv_g = 0,$$

où ϕ_1 est une fonction propre associée à la première valeur propre non nulle de Δ_{g_0}.

Comme l'ont remarqué Druet et Robert [43], cette obstruction est un équivalent de l'obstruction de Pohožaev, voir [92], pour l'équation de courbure prescrite. Ceci est dû à l'invariance conforme de l'équation sous l'action du groupe des difféomorphismes de S^2 qui est non compact. On verra dans les sections 2.2.1 et 2.2.3 comment exploiter cette idée dans le cas de la courbure moyenne.

2.2.1 La courbure moyenne ne peut être croissante dans une direction : le cas plongé

Il existe un analogue du théorème 2.2.1 pour la courbure moyenne d'une surface plongée. Cependant, la courbure moyenne étant une notion extrinsèque, sa croissance n'est pas considérée par rapport à la surface mais par rapport à l'espace ambiant. Le résultat suivant, démontré par Kirsch dans sa thèse, [69], montre qu'en effet la courbure moyenne ne peut être strictement croissante dans une direction.

Théorème 2.2.3. *Soit $n \geq 2$ et $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz telle qu'il existe $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$\langle \nabla H(x), \vec{e} \rangle > 0 \quad \textit{pour presque tout} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

alors il n'existe aucune surface compacte C^1 plongée dans $\mathbb{R}^n$ de courbure moyenne H.

En fait ce théorème est un peu plus général puisqu'on peut remplacer la courbure moyenne par n'importe quelle k-ième courbure moyenne.

Preuve du théorème 2.2.3 :

Supposons par contradiction qu'une telle hypersurface S existe. Alors en utilisant la formule de la première variation (1.1) avec le champ de vecteurs constant $\vec{e}$, on obtient

$$\int_S \langle H(x)\vec{e}, \vec{N}(x) \rangle \, d\sigma = 0, \tag{2.3}$$

où $\vec{N}$ est le vecteur normal de S et $d\sigma$ son élément de volume. Puisque S est plongée, d'après le théorème de Jordan généralisé, il existe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $S = \partial\Omega$. En utilisant la formule de Stokes, on obtient

$$\int_S \langle H\vec{e}, \vec{N}(x) \rangle \, d\sigma = \int_\Omega \langle \vec{e}, \nabla H(x) \rangle \, dx = 0,$$

ce qui contredit le fait que $\langle \nabla H(x), \vec{e} \rangle$ soit strictement positif, et prouve le théorème. ■

Il est à noter que l'idée générale du théorème 2.2.3 a été mentionnée de manière indépendante par Caldiroli et Musina [20] et que ce théorème admet une réciproque, pour les petites surfaces quasi-sphériques, démontré par Caldiroli [19].

Théorème 2.2.4 (Caldiroli, 2003)**.** *Soient $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et $p \in \mathbb{R}^3$ un point critique non dégénéré de H, alors il existe une suite S^ε de surfaces lisses se concentrant en p, tel que en tout point $y \in \Sigma^\varepsilon$ la courbure moyenne soit égale à $\frac{1}{\varepsilon}H(y)$. De plus, la suite de surfaces $\frac{1}{\varepsilon}(S^\varepsilon - p)$ converge vers une sphère ronde.*

Une question naturelle serait de savoir si le théorème 2.2.3 pourrait s'étendre au cas des hypersurfaces immergées. Ici, comme dans le cas de la classification des surfaces à courbure moyenne constante, le cas immergé semble beaucoup plus compliqué. Cependant, dans le cas des courbes qui est nettement plus rigide, nous démontrons un tel résultat dans la section 2.2.2.

Enfin, pour conclure cette section, on propose une nouvelle identité dont la démonstration repose sur l'invariance conforme grâce à laquelle on tente d'obtenir une obstruction de type Pohožaev.

Proposition 2.2.1. *Soient $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et $u : S^2 \to \mathbb{R}^3$ un plongement qui borde un domaine Ω, de courbure moyenne $H(u)$, alors*

$$\int_\Omega \nabla H(y) \wedge y \, dy = 0 \tag{2.4}$$

Cette identité est assez faible puisqu'on ne peut pas en dériver directement d'obstruction. En effet pour cela il faudrait une fonction H telle que $(\nabla H \wedge y)_1$ soit positif dans tout l'espace par exemple, ce qui imposerait à la fonction H d'être strictement croissante le long des cercles centrés en 0 et contenu dans le plan yz, ce qui serait absurde. Par contre comme nous le verrons après la démonstration, cette identité contient l'obstruction de Kirsch.

Preuve de la proposition 2.2.1 :

Etant donné qu'il n'y a qu'une classe conforme sur S^2, quitte à composer par un difféomorphisme on peut supposer que u est conforme par rapport aux métriques standards de S^2 et $\mathbb{R}^3$. Maintenant en regardant dans une carte donnée par une projection stéréographique, on a

$$\Delta u = -2H(u)\, u_x \wedge u_y.$$

D'autre part on considère la rotation d'axe z et d'angle t,

$$R^t = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) & 0 \\ sin(t) & cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $u^t = R^t(u)$, alors u^t vérifie l'équation suivante

$$\Delta u^t = R^t\left(\Delta u\right) = -2H(u) R^t\left(u_x \wedge u_y\right).$$

Puis on dérive cette dernière expression en $t = 0$, ce qui donne

$$\Delta \tilde{u} = -2H(u) \tilde{R}\left(u_x \wedge u_y\right).$$

où $\tilde{u} = \tilde{R} u$ et

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On multiplie par u et on intègre sur $\mathbb{R}^2$ (en fait S^2). On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \Delta \tilde{u} \, dz = \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla u, \nabla \tilde{u} \rangle \, dz = 0,$$

puisque $\langle \nabla u, \nabla \tilde{u} \rangle = 0$. Ceci donne en intégrant par parties

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} 2H(u) \langle {}^t\tilde{R}u, u_x \wedge u_y \rangle \, dz \\ &= \int_{u(S^2)} \langle 2H(y) {}^t\tilde{R}y, \nu \rangle \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} div \left(2H(y) {}^t\tilde{R}y \right) \, dy \\ &= 2 \int_{\Omega} (H_{y_1} y_2 - H_{y_2} y_1) \, dy. \end{aligned}$$

De même on montre que

$$\int_{\Omega} (H_{y_3} y_2 - H_{y_2} y_3) \, dy = \int_{\Omega} (H_{y_1} y_3 - H_{y_3} y_1) \, dy = 0.$$

Ceci prouve le résultat. □

En fait cette obstruction contient celle du théorème 2.2.3. En effet si on considère le même plongement mais translaté d'un vecteur $\vec{e}$, alors on a l'identité suivante

$$\int_{\Omega + \vec{e}} \nabla H_{\vec{e}}(y) \wedge y \, dy = 0$$

où $H_{\vec{e}} = H(\,.\, - \vec{e})$. Puis si on change de variable ; cela donne

$$\int_{\Omega} \nabla H(y) \wedge (y + \vec{e}) \, dy = 0.$$

En appliquant cela pour tout $\vec{e}$, on obtient bien

$$\int_{\Omega} \nabla H(y) \, dy = 0,$$

ce qui redonne bien le théorème 2.2.3.

2.2.2 Le cas des courbes immergées : une variante du théorème des quatre sommets

Le théorème des quatre sommets

On appelle sommet d'une courbe un point critique de la courbure. La courbure d'une courbe fermée possédant un minimum et un maximum, elle admet au moins deux sommets. Ceci est optimal dans le cas des courbes immergées comme le montre l'exemple suivant.

La courbure prend son minimum en A à $\frac{5}{9}$ et son maximum en B à 3.

Dans le cas des courbes simples, on peut en fait trouver au moins deux autres sommets :

Théorème 2.2.5. *Une courbe simple fermée possède au moins quatre sommets. Plus précisément la courbure admet au moins deux maxima locaux et deux minima locaux.*

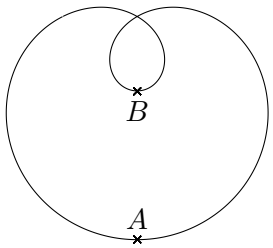


FIGURE 2.13 – $r = 1 - 2sin(\theta)$.

Ce théorème a une longue histoire qui commence en 1909 quand Mukhopadhaya [86] le démontre pour une courbe convexe. Puis, en 1912, Kneser [71] donne une démonstration dans le cas général et s'ensuit une succession de nouvelles preuves et de généralisations. Notons ici la preuve due à Osserman [87] en 1985, qui en plus d'être d'une grande simplicité, explique clairement pourquoi il ne peut en être autrement.

De plus, il apparaît que ce théorème a une réciproque. Tout d'abord Gluck en 1971 prouve cette réciproque dans le cas strictement convexe, [50], mais pour une réponse affirmative complète il faudra attendre 2005 et la publication d'un papier posthume de Dahlberg, [32].

Une variante

Même immergées, les courbes ont un comportement assez rigide vis à vis de la courbure moyenne, puisque par exemple les seules courbes fermées à courbure moyenne constante sont les cercles. Cette rigidité, nous a permis avec Kirsch de démontrer un équivalent au théorème 2.2.3, [70].

Théorème 2.2.6 (Kirsch, Laurain 2010)**.** *Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction Lipchitz positive et $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ vérifiant*

$$\langle \nabla H(x), \vec{e} \rangle > 0 \quad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

Il n'existe aucune courbe fermée C^1 immergée dans $\mathbb{R}^2$ dont la courbure en tout point x est $H(x)$.

En quoi ce théorème est-il une variante du théorème des quatre sommets ? Le théorème des quatre sommets affirme que la courbure ne peut être strictement croissante entre son minimum et son maximum. Ici on remplace simplement l'hypothèse de croissance intrinsèque par une hypothèse de croissance extrinsèque qui permet de généraliser le théorème des quatre sommets aux courbes immergées.

L'hypothèse de positivité est essentielle. En effet, sinon, un contre-exemple est donné par la lemniscate de Bernoulli :

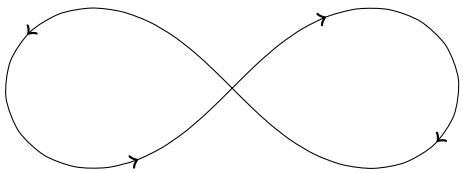


FIGURE 2.14 – Lemniscate de Bernoulli

L'équation de la lemniscate est

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = a^2(x_1^2 - x_2^2),$$

où $a > 0$ est un paramètre. Un petit calcul donne la courbure $c(x_1)$ de la lemniscate :

$$c(x_1) = sign(x_1)\frac{3}{a^2}\sqrt{\frac{a\sqrt{8x_1^2 + a^2} - a^2}{2}},$$

qui est bien une fonction croissante. La lemniscate de Bernoulli est une solution du problème de courbure prescrite $H(x_1, x_2) = c(x_1)$, avec

$$\langle \nabla H(x), e_1 \rangle = c'(x_1) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

Avant de commencer la preuve du théorème 2.2.6, il nous faut faire quelques remarques et définir quelques notions sur les courbes immergées.

Si $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitz, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que toute solution C^2 non périodique de l'équation

$$\frac{d\vec{t}}{ds}(s) = H(\gamma(s))\vec{n}(s) \tag{2.5}$$

a des intersections isolées et d'ordre fini. De plus, si deux parties de la courbe sont tangentes en un point, elles doivent avoir des orientations opposées.

Il nous faut aussi définir l'indice d'une courbe et en donner quelques propriétés.

Définition 2.2.1. *Soit $\gamma \in C^0(S^1, \mathbb{R}^2)$ et $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, on définit l'indice de γ par rapport au point p, noté $Ind_\gamma(p)$, comme le degré de l'application de S^1 dans lui-même définie par*

$$s \mapsto \frac{\gamma(s) - p}{\|\gamma(s) - p\|}.$$

L'indice dépend de l'orientation. Il peut donc s'interpréter comme le nombre de tours de Γ autour de p, et donc il est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. De plus grâce à la propriété suivante, on peut quantifier les variations d'indice lorsqu'on passe d'une composante à une autre.

Proposition 2.2.2. *Soient $\gamma \in C^1(S^1, \mathbb{R}^2)$ et $p \in \Gamma$ un point régulier de Γ (i.e pas une auto-intersection) alors, pour r assez petit, $B(p, r) \setminus \Gamma = U \cup V$, où U et V sont des ouverts connexes de $\mathbb{R}^2$ tels que $U \cap V = \emptyset$ et $\vec{n}$ pointe vers U. De plus pour tout $(u, v) \in U \times V$ on a*

$$Ind_\gamma(u) - Ind_\gamma(v) = 1.$$

On trouvera une preuve dans la section 9.2 de [8].

Preuve du théorème 2.2.6 :

La première idée est de suivre la preuve du cas plongé en se donnant un énoncé du théorème de Stokes dans le cas d'une courbe immergée.

Lemme 2.2.1. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée C^1 avec des intersections isolées et d'ordre fini, et $\vec{V}$ un champ de vecteurs Lipchitz sur $\mathbb{R}^2$, alors on la formule suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} div(\vec{V}) Ind_\gamma(x)\, dx = -\int_\Gamma \left\langle \vec{V}, \vec{n} \right\rangle d\sigma, \tag{2.6}$$

où $d\sigma$ est la restriction de la mesure de Lebesgue à Γ et $\vec{n}$ le vecteur normal de Γ.

Même si il y a deux choix possibles pour l'orientation de Γ, (2.6) est toujours vraie, puisqu'en changeant $\vec{n}$ en $-\vec{n}$ on change aussi $Ind_\gamma(x)$ en $-Ind_\gamma(x)$.

On remarque que la formule (2.6) nous permet de faire la même preuve que dans le cas plongé pour une courbe dont tous les indices sont positifs ou nuls.

Mais ce n'est pas le cas de toutes les courbes, voir figure 2.15.

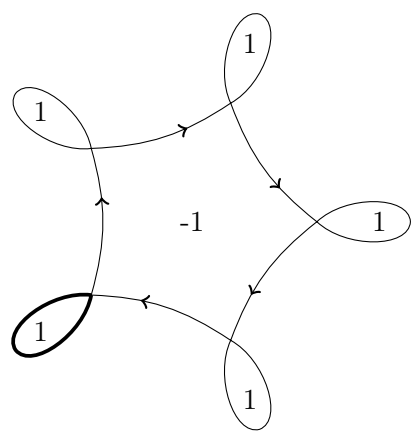


FIGURE 2.15 – La fleur, une courbe avec des indices positifs et négatifs

On va donc chercher une sous courbe de Γ dont tous les indices sont positifs ou nuls, mais pour cela il va falloir découper la courbe et donc créer des singularités. En particulier on aura

$$\int_\Gamma \frac{d\vec{t}}{ds}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \left(\vec{t}(s_i^+) - \vec{t}(s_i^-) \right) \neq 0,$$

les s_i étant les points où Γ n'est pas lisse.

Mais pour avoir une contradiction on a simplement besoin que ce terme soit orienté dans le sens défini par $\vec{e}$. Voici une méthode de découpage qui permet d'arriver à un tel résultat.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = (1, 0)$, de plus on dira qu'une singularité (un point non lisse) est bien orientée si

$$\begin{cases} \left\langle \lim\limits_{u \to 0^+} \vec{t}(s-u), \vec{e} \right\rangle & > & 0, \\ \left\langle \lim\limits_{u \to 0^+} \vec{t}(s+u), \vec{e} \right\rangle & < & 0. \end{cases}$$

C'est par exemple le cas pour la singularité de la boucle en gras dans la figure 2.15.

On cherche alors une courbe fermée $\Gamma' \subset \Gamma$ telle que

$$Ind_{\gamma'} \geq 0 \text{ et } \left\langle \vec{e}, \int_{\Gamma'} \frac{d\vec{t}}{ds} d\sigma \right\rangle > 0.$$

Pour cela on construit une suite de sous-courbes Γ_n of Γ telle que toutes les singularités de Γ_n soient bien orientées.

On commence avec $\Gamma_0 = \Gamma$, et on obtient Γ_{n+1} à partir de Γ_n comme suit : on considère

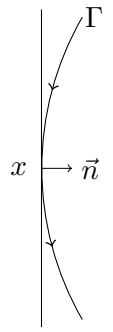
$$\Omega_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n \text{ t.q. } Ind_{\gamma_n}(x) < 0 \right\}.$$

Si $\Omega_n = \emptyset$ le processus s'arrête puisque Γ_n convient. Sinon Ω_n est borné et on coupe Γ_n à l'extrémité gauche de Ω_n.

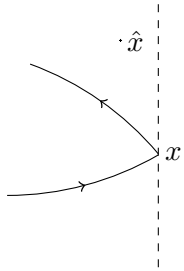
Etape 1 : L'extrémité gauche de Ω_n est un point d'auto-intersection de Γ_n

En effet sinon ce serait un point lisse ou une singularité créée à une étape précédente.

Dans le cas d'un point lisse, comme l'indice de la composante de gauche devrait être positif, d'après la proposition 2.2.2, la normale doit pointer à droite dans la convexité de Γ_n et donc la courbure se doit d'être négative, ce qui est absurde.



Dans le cas d'une singularité, celle-ci étant bien orientée, on montre facilement que l'on peut trouver des points encore plus à gauche que notre extrémité et d'indice négatif, ce qui est également absurde.



Etape 2 : Image de l'auto-intersection

L'intersection étant d'ordre fini et isolée, dans un petit voisinage elle ressemble à un « camembert ».

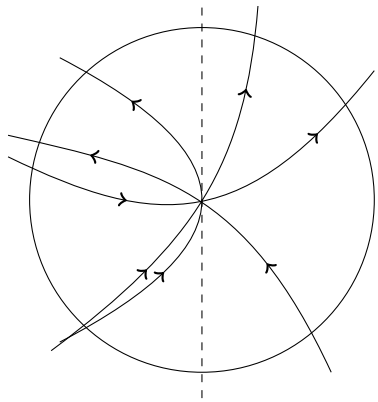


FIGURE 2.16 – Image de la courbe autour de l'extrémité gauche.

Maintenant on considère le secteur d'indice le plus négatif. D'après la proposition 2.2.2, on en déduit que la normale pointe vers l'extérieur de ce secteur. Enfin on en déduit l'orientation des courbes qui l'encadrent, comme présenté dans le dessin suivant.

Etape 3 : Découpage

On choisit un paramétrage par la longueur d'arc $\gamma_n : [0, l[\to \mathbb{R}^2$ de Γ_n, tel que $\gamma_n(0) \neq p$. Alors il existe $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ et $s_1 < s_2 \in [0, 2\pi[$ tels que le bord du secteur d'indice négatif soit paramétré par : $\gamma_n(]s_1 - \epsilon_1, s_1])$ et $\gamma_n([s_2, s_2 + \epsilon_2])$. On pose alors $\Gamma_{n+1} = \gamma_n(]s_1, s_2])$, et on vérifie facilement que la singularité créée en s_2 est bien orientée.

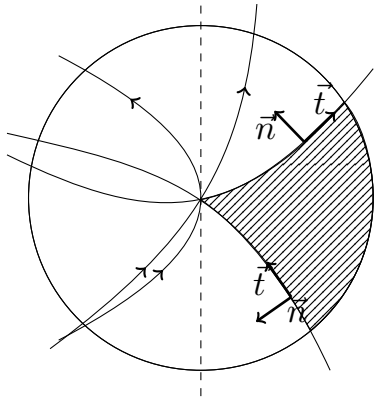


FIGURE 2.17 – Le secteur de plus petit indice

Fin de la preuve :

Le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$ étant strictement décroissant, l'algorithme s'arrête. On obtient alors une courbe fermée dont tous les indices sont positifs ou nuls et dont les singularités sont bien orientées. On applique alors la formule de Stokes généralisée et on obtient

$$\int_\Omega \langle \vec{e}, \nabla H(x) \rangle \, dx = -\left\langle \vec{e}, \int_{\Gamma_n} \frac{d\vec{t}}{ds} \, d\sigma \right\rangle = -\sum_{i=1}^{k} \langle \Delta \vec{t}(s_i), \vec{e} \rangle < 0,$$

où les $\gamma_n(s_i)$ sont les singularités de Γ_n, ce qui est absurde et achève la preuve du théorème.■

2.2.3 Obstructions issues de la géométrie spinorielle

La géométrie spinorielle semble posséder certaines affinités avec la notion de courbure moyenne, notamment à cause du fait suivant [48] : soient $f : S^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une immersion et ψ un spineur parallèle de $\mathbb{R}^3$, alors $\phi = \psi_{|\Sigma}$ vérifie l'équation suivante

$$D\phi = H|\phi|^2 \, \phi,$$

où D est l'opérateur de Dirac de Σ. En démontrant une version spinorielle de l'identité de Pohožaev, Ammann, Humbert et Ahmedou [3] sont arrivés à l'obstruction suivante.

Théorème 2.2.7. *Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ une immersion conforme, on note $H : S^2 \to \mathbb{R}$ la courbure moyenne associée à cette immersion. Alors pour tout X champ de vecteurs conforme sur S^2 on a*

$$\int_{S^2} (\partial_X H) f^*(d\sigma) = 0, \tag{2.7}$$

où $d\sigma$ est l'élément de volume de $f(S^2)$.

Une conséquence de ce résultat est qu'aucune fonction H sur S^2 croissante selon une direction (i.e $\langle \nabla H, \vec{e} \rangle > 0$) ne peut être la courbure moyenne d'une immersion.

Par rapport aux obstructions de la section 2.2.1, celle-ci ne concerne pas seulement les plongements mais aussi les immersions générales. Néanmoins ici la courbure moyenne est une fonction de la surface et non de l'espace ambiant, ce qui n'est pas complètement satisfaisant pour un objet extrinsèque comme la courbure moyenne.

En s'inspirant de ce résultat, on obtient l'identité suivante qui est en quelque sorte un équivalent intrinsèque de la proposition 2.4.

Proposition 2.2.3. *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une hypersurface immergée, alors*

$$\int_\Sigma (\nabla H)^\perp \, d\sigma = 0. \tag{2.8}$$

Preuve de la proposition 2.2.3 :

On commence par donner un équivalent de la formule de Gauss dans le cadre de la géométrie spinorielle, reliant l'opérateur de Dirac de la surface à la connexion ambiante comme suit

$$e_1.\nabla^{\mathbb{R}^3}_{e_1}(\psi) + e_2.\nabla^{\mathbb{R}^3}_{e_2}(\psi) = D(\phi) + H.\vec{n}.\phi, \text{ pour tout spineur } \psi \text{ de } \mathbb{R}^3,$$

où $\phi = \psi_{|\Sigma}$, $\vec{n}$ le vecteur normal associé à l'orientation, D l'opérateur de Dirac de Σ et . la multiplication de Clifford. Appliquons la formule précédente à un spineur parallèle non trivial, on a

$$D(\phi) = -H.\vec{n}.\phi$$

Puis multiplions par $D(\phi)$ à gauche et par $-H.\vec{n}.\phi$ à droite et intégrons,

$$\int_\Sigma \langle D(\phi), D(\phi)\rangle \, dv = \int_\Sigma \langle H.\vec{n}.\phi, H.\vec{n}.\phi)\rangle dv = \int_\Sigma H^2|\phi|^2 \, dv.$$

Par intégration par parties on obtient

$$\int_\Sigma \langle D^2(\phi), \phi\rangle \, dv = \int_\Sigma H^2|\phi|^2 \, dv.$$

En remplaçant $D(\phi)$ par $-H.\vec{n}.\phi$, on a

$$\int_\Sigma \langle D(-H.\vec{n}.\phi), \phi\rangle \, dv = \int_\Sigma H^2|\phi|^2 \, dv.$$

Développons le terme de gauche pour obtenir

$$-\int_\Sigma \langle \nabla H.\vec{n}.\phi + H.D(\vec{n}).\phi + H^2\phi, \phi\rangle \, dv = \int_\Sigma H^2|\phi|^2 \, dv.$$

Enfin puisque $D(\vec{n}) = -2H$, on a

$$\int_\Sigma \langle \nabla H.\vec{n}.\phi, \phi\rangle \, dv = 0 \text{ pour tout } \psi.$$

D'où

$$\int_\Sigma \nabla H \wedge \vec{n} \, dv = 0,$$

ce qui prouve la proposition. $\square$

Chapitre 3

Surfaces à courbure moyenne constante dans une variété courbée

3.1 Dans les espaces modèles

Comme on a pu le remarquer avec la preuve du théorème d'Aleksandrov, le fait que $\mathbb{R}^3$ soit un espace symétrique joue un rôle important dans le problème de classification des surfaces à courbure moyenne constante dans l'espace euclidien. Ainsi, dans le cas des espaces modèles, qui sont symétriques, les techniques employées dans le cas euclidien devraient fonctionner. En effet on obtient un théorème semblable au cas euclidien, voir Montiel et Ros [82] ou Rosenberg [100].

Théorème 3.1.1. *Les seules hypersurfaces compactes immergées et simplement connexes ou plongées de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ ou de la demi sphère S^3_+ à courbure moyenne constante sont les sphères géodésiques.*

Cependant, il est à noter que dans S^3 en entier ce théorème est faux. En fait l'existence de géodésiques fermées permet d'obtenir de nouveaux exemples comme par exemple les tores de Clifford

$$\{0\} \times S^1(r) \times S^1\left(\sqrt{1-r^2}\right), \tag{3.1}$$

qui sont des surfaces à courbure moyenne constante égale à $\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$. Mais dans le cas des surfaces à courbure moyenne constante stables, la classification reste inchangée puisque Barbosa, do Carmo et Eschenburg [7] généralisent le théorème 2.1.6 en prouvant le résultat suivant.

Théorème 3.1.2 (Barbosa, do Carmo, Eschenburg, 1988)**.** *Soit $\mathcal{N}(c)$ une variété simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à c ($c = 1, -1$ ou 0). Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}(c)$ une hypersurface compacte à courbure moyenne constante. Si $\mathcal{M}$ est stable, alors $\mathcal{M}$ est nécessairement une sphère géodésique.*

3.2 Le cas général

Si on considère une variété générale on perd définitivement l'isotropie ou encore la caractérisation des sphères géodésiques. D'ailleurs celles-ci ne sont plus à courbure moyenne

constante. Même s'il ne semble pas raisonnable d'espérer une classification générale des surfaces à courbure moyenne constante dans une variété générale, il semble accessible de s'intéresser au cas des surfaces à courbure moyenne constante de petit diamètre, ce qui en fait revient à explorer le cas quasi-euclidien.

3.2.1 Existence

Dans une variété compacte l'existence de surfaces à courbure moyenne constante est assurée par l'existence de solutions au problème isopérimétrique, voir section 1.4. Plus généralement on peut trouver des surfaces à courbure moyenne constante en cherchant les points critiques de la fonctionnelle suivante

$$\Sigma \mapsto A(\Sigma) - H\mathrm{vol}(\Sigma)$$

où Σ est une surface plongée de classe C^2, $A(\Sigma)$ son aire et $\mathrm{vol}(\Sigma)$ le volume du domaine qu'elle borde. Mais là encore il est très difficile d'obtenir des points critiques non triviaux sans de très fortes hypothèses sur la variété ambiante. Regardons donc ce qui se passe pour des surfaces de petit diamètre (ou encore à grande courbure moyenne). Un simple calcul montre que les petites sphères géodésiques sont presque à courbure moyenne constante. Une question naturelle serait de savoir si on peut les perturber pour obtenir des surfaces à courbure moyenne constante. Pour cela on commence par faire un développement limité de la fonctionnelle par rapport aux sphères de petit volume. Soit $p \in M$, ϕ_t le flot d'un champ de vecteurs X, on a

$$\frac{d}{dt}\left(A(\phi_t(S(p,r))) - \frac{2}{r}\mathrm{vol}(\phi_t(B(p,r)))\right)_{|t=0} = -Cr^4\nabla_X S(p) + o(r^4)$$

où S est la courbure scalaire de la variété ambiante et C une constante positive.

Pour perturber des petites sphères en surfaces à courbure moyenne constante autour d'un point p, il faut que la courbure scalaire admette un point critique en p. Une fois cette condition réalisée, il va falloir inverser l'opérateur défini par le reste donc il faut que son terme dominant soit localement inversible. Si notre point critique est non dégénéré, une telle construction est possible, comme l'a démontré Ye dans [123] en dimension quelconque.

Théorème 3.2.1 (Ye, 1991)**.** *Soit $(\mathcal{N}^{n+1}, g)$ une variété riemannienne et $p \in \mathcal{N}$ un point critique non dégénéré de la courbure scalaire. Alors il existe une hypersurface à courbure moyenne constante dans tout voisinage de p.*

En fait Ye démontre même que ces hypersurfaces constituent un feuilletage d'un voisinage de p. Il est important de noter que la condition de point critique non dégénéré n'est *a priori* pas nécessaire, surtout si on considère l'existence de surfaces qui ne sont pas asymptotiquement des quasi-sphères. De plus la condition de non dégénérescence est complètement technique, elle n'est là que pour pouvoir appliquer un théorème de type fonction implicite. D'ailleurs comme nous allons le voir avec le théorème suivant on peut s'en affranchir dans un certain nombre de cas.

Même si ce théorème nous offre une première description des surfaces à courbure moyenne constante au voisinage d'un point, celle-ci reste relativement incomplète puisque le théorème ne contient pas le cas des espaces à courbure scalaire constante. Or on sait depuis la résolution du problème de Yamabe, cf [76], que toute métrique d'une variété compacte admet dans sa

classe conforme une métrique à courbure scalaire constante.

Dans un travail récent [90], Pacard et Xu donnent une condition suffisante beaucoup moins restrictive. Pour cela ils définissent la fonction suivante

$$\begin{aligned} r(p) = & \frac{1}{36(n+5)} \left(5S^2(p) + 8\|\mathrm{Ric}(p)\|^2 - 3\|\mathrm{Riem}(p)\|^2 - 18\Delta_g S(p)\right) \\ & + \frac{1}{9(n+1)(n+2)} \left(\frac{n+6}{n} S^2(p) - 2\|\mathrm{Ric}(p)|^2\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

où Ric et *Riem* correspondent aux tenseurs de Ricci et de Riemann associé à la métrique g.

Théorème 3.2.2 (Pacard, Xu, 2009)**.** *Il existe $\rho_0 > 0$ et une fonction lisse*

$$\phi : M \times (0, \rho_0) \to \mathbb{R}$$

tels que :

(i) Pour tout $\rho \in (0, \rho_0)$, si p est un point critique de la fonction $\phi(\,.\,, \rho)$, alors il existe une hypersurface plongée dont la courbure moyenne est constante égale à $\frac{n}{\rho}$ et qui est un graphe au dessus de $S(p, \rho)$.

(ii) Pour tout $k \geq 0$ il existe $c_k > 0$ qui ne dépend pas de ρ tel que

$$\|\phi(\,.\,, \rho) - S - \rho^2 r\|_{C^k(M)} \leq c_k \rho^3.$$

On peut remarquer d'une part que, d'après (ii), si p est un point critique non dégénéré de la courbure scalaire, alors il existe un point critique de $\phi(\,.\,, \rho)$ proche de p, et donc ce théorème contient en partie celui de Ye, à la petite différence qu'ici la construction n'est *a priori* pas un feuilletage. D'autre part, lorsque S est une fonction constante, il existe des hypersurfaces à courbure moyenne constante près de tout point critique non dégénéré de r. En particulier, si la variété est d'Einstein, on obtient l'existence d'hypersurfaces à courbure moyenne constante près de tout point critique non dégénéré de la fonction

$$p \mapsto \|\mathrm{Riem}(p)\|^2.$$

D'autre part, comme on l'a vu avec l'exemple (3.1), les tubes autour d'une courbe $\{0\} \times \{0\} \times S^1 \subset S^3$ sont à courbure moyenne constante. Une nouvelle question serait de savoir si la technique présentée ci-dessus ne pourrait pas permettre de perturber de petits tubes autour de courbes fermées en surfaces à courbure moyenne constante ?

Là encore une courte analyse donne une condition nécessaire pour une telle construction : la courbe doit être une géodésique. De plus, comme précédemment il faut une condition de non dégénérescence, c'est-à-dire il faudra que la géodésique soit stable. En fait Mahmoudi, Mazzeo et Pacard [79] démontre ce résultat en toute généralité.

Théorème 3.2.3 (Mahmoudi, Mazzeo, Pacard, 2005)**.** *Soit K une sous-variété minimale stable, il existe*

$$I \subset (0, 1)$$

tel que pour tout $\rho \in I$, $S(K, \rho)$ peut être perturbé en une hypersurface dont la courbure moyenne est constante égale à $\dfrac{m-k}{\rho}$.
De plus, pour tout $k \geq 2$, il existe $c_k > 0$ tel que $|I \cap (0, r) - r| \leq c_k r^k$.

Il est bon de remarquer qu'*a priori* toutes les valeurs de ρ ne sont pas atteintes, ce qui est dû à un phénomène de résonance inhérent à la construction.

En fait il semble que l'on puisse construire une multitude d'exemples de surfaces à courbure moyenne constante dans une variété générique. En effet en s'inspirant des constructions de Kapouleas, il pourrait être judicieux d'essayer de recoller des morceaux de surfaces de Delaunay dans une variété. Ici le terme surfaces de Delaunay, qui *a priori* n'existent que dans un espace symétrique, est utilisé pour toute suite de surfaces se concentrant sur une courbe et venant, une fois correctement dilatée, à dégénérer sur un chapelet de sphères. Mais alors que devient la formule de l'équilibre ? En fait si on reprend la démonstration de la formule de l'équilibre dans le cas riemannien, on voit que comme plus haut un terme faisant intervenir le gradient de courbure scalaire intervient. Autour d'un morceau de surface, on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{C_k} \vec{\eta} ds - 2H_0 \int_{\Sigma_k} \vec{\nu} d\sigma - C\nabla S(p) = 0, \tag{3.3}$$

où C est une constante positive, C_k et Σ_k respectivement les courbes et les surfaces bordant notre morceau de surface. Contrairement au cas euclidien où les constructions ne peuvent être plongées d'après le théorème d'Aleksandrov, dans le cas riemannien on pourrait tout à fait imaginer recoller des morceaux d'onduloïde dont les forces seraient compensées par le gradient de la courbure scalaire, voir figure 3.1.

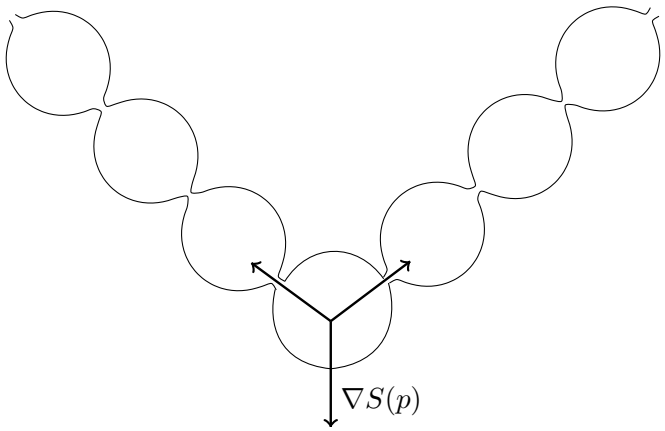


FIGURE 3.1 – Recollement de deux onduloïdes grâce à la présence d'un gradient de courbure scalaire.

Un certain nombre de travaux sont actuellement menés dans cette direction, notamment par Butscher et Mazzeo, voir [17] et [18]. Toutefois même si les techniques de recollement semblent parfaitement fonctionner, il reste encore à trouver des réseaux de surfaces de Delaunay sur lesquels les appliquer, problème qui semble encore ouvert aujourd'hui, mais qui une fois résolu devrait donner naissance à de nombreux exemples.

Cependant cette idée a bien fonctionné pour construire de nouveaux exemples de surfaces de genre 0. Dans un souci de clarté, on présente ici un cas particulier du travail de Malchiodi et Pacard qui consiste à recoller deux sphères par un morceau d'onduloïde, voir [89]. Ici encore

c'est la présence d'un gradient de courbure scalaire qui rend possible cette construction sans violer la formule de l'équilibre, voir 3.2.

Théorème 3.2.4 (Malchiodi, Pacard, 2008)**.** *Soit $p \in \mathcal{N}$ un point critique non-dégénéré de la courbure scalaire tel que $\nabla^2 S$ admette une valeur propre positive simple. Alors il existe une famille à un paramètre d'hypersurfaces à courbure moyenne constante $\Sigma(\rho)$, qui sont des sphères topologiques plongées et qui sont proches de la somme connexe de deux sphères $S(q_1, \rho)$ et $S(q_2, \rho)$ telles que*

$$d(q_1, q_2) = 2\rho + o(\rho).$$

Ce résultat fourni de nouveaux exemples qui, contrairement à ceux de Ye, sont clairement instables. Sous certaines conditions, ce résultat peut se généraliser à un nombre arbitraire de sphères. Dans le cas ou les valeurs propres de $\nabla^2 S$ sont négatives, on obtient un résultat similaire en recollant les deux sphères non pas par un morceau d'onduloïde mais par un morceau de nodoïde et on perd alors le caractère plongé de la suite d'hypersurfaces.

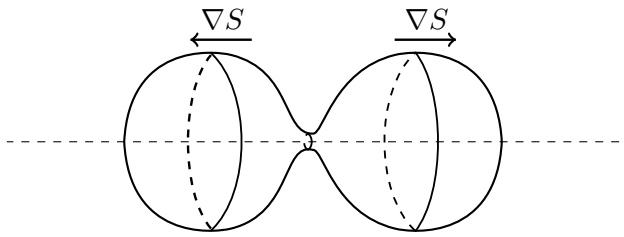


FIGURE 3.2 – Recollement de deux sphères grâce à la présence d'un gradient de courbure scalaire.

Au vu de ces résultats d'existence, il fut conjecturé la chose suivante sur le lieu de concentration de ces suites de surfaces à courbure moyenne constante.

Conjecture 3.2.1. *Supposons que pour tout $\rho > 0$ assez petit il existe une hypersurface à courbure moyenne constante dans $B(p, \rho)$, alors p est un point critique de la courbure scalaire.*

Nous explorons cette conjecture dans la section suivante.

3.3 Obstruction et unicité

Une idée assez naturelle pour aborder la question 3.2.1 serait de commencer par considérer les bords de domaines isopérimétriques. Lorsque ces domaines isopérimétriques se concentrent, on peut normaliser leur volume ce qui a pour effet de dilater l'espace ambiant et donc de le rendre quasi-euclidien. Dans ce cas on peut se demander si notre suite de domaines se rapproche d'un domaine isopérimétrique euclidien, i.e. une boule ronde. La réponse est affirmative comme le démontrent Johnson et Morgan dans [85].

Théorème 3.3.1 (Johnson et Morgan, 2000)**.** *Soit $(\mathcal{N}, g)$ une variété riemanniennne compacte. Alors les domaines isopérimétriques de petit volume sont des boules presque rondes.*

En s'appuyant sur cette description des domaines isopérimétriques de petit volume, Druet répond par l'affirmative à la conjecture 3.2.1 dans le cas des domaines isopérimétriques. En

fait il donne une description très précise de leur comportement asymptotique en démontrant une inégalité isopérimétrique optimale pour de tels domaines dans [38].

Théorème 3.3.2 (Druet, 2002)**.** *Soit* $(\mathcal{N}, g)$ *une variété compacte et* Ω_V *une suite de domaines isopérimétriques de volume* V*, alors*

$$\Omega_V \to p \text{ quand } V \to 0,$$

où p *est un point de maximum de la courbure scalaire.*

Le cas général s'avère assez compliqué, puisque comme le montrent les exemples de la section 3.2.1, il n'y a aucune raison pour que l'on contrôle la topologie ni même la taille de telles suites de surfaces. Donc des hypothèses raisonnables afin de généraliser le résultat de Druet seraient de fixer la topologie et de contrôler la taille afin qu'on ne puisse pas dégénérer sur des surfaces de type Delaunay. Même sous ces hypothèses il reste un bon nombre de difficultés à surmonter puisque l'on est loin du cadre du théorème de Johnson et Morgan, car Pacard et Malchiodi nous assurent que l'on peut encore dégénérer sur une union finie de sphères. La géométrie de notre suite de surfaces ne sera donc pas bornée, en particulier à cause de la présence de pincements. Toutefois une analyse minutieuse des phénomènes de concentration nous a permis de démontrer le résultat suivant dans [75].

Théorème 3.3.3. *Soit* $(\mathcal{N}, g)$ *une variété compacte de dimension* 3 *et* Σ_H *une suite de surfaces simplement connexes plongées à courbure moyenne constante égale à* H *vérifiant les hypothèses suivantes*

$$\begin{cases} \delta(\Sigma_H) = o(1) \\ A(\Sigma_H) = O\left(\frac{1}{H^2}\right). \end{cases} \qquad \text{quand } H \to +\infty, \tag{H}$$

Alors Σ_H *converge vers un point critique de la courbure scalaire.*

Ce théorème s'applique aux exemples de Ye mais aussi à ceux de Pacard et Malchiodi. Il est également à noter qu'un résultat similaire a été démontré par Sun [114] en dimension 2. En effet il montre qu'une suite de courbes à courbure géodésique constante se concentrant sur une surface converge nécessairement vers un point critique de la courbure de Gauss.

En fait on peut aussi l'appliquer à la classe des surfaces stables en s'affranchissant des hypothèses sur la topologie et l'aire pour obtenir le corollaire suivant annoncé dans [124] mais non démontré.

Corollaire 3.3.1. *Soit* $(\mathcal{N}, g)$ *une variété compacte de dimension* 3 *et* Σ_H *une suite de surfaces à courbure moyenne constante égale à* H *stables dont le diamètre tend vers* 0 *quand* H *tend vers l'infini. Alors* Σ_H *converge vers un point critique de la courbure scalaire.*

3.4 Preuve du corollaire 3.3.1

Ici on reprend un certain nombre d'arguments de Ye, voir [123] et [124], afin de montrer comment appliquer notre théorème à une suite de surfaces stables.

Il suffit de démontrer que pour H assez grand les Σ_H sont plongées, simplement connexes et que leurs aires sont contrôlées par un $O\left(\frac{1}{H^2}\right)$. En effet dans ce cas on peut appliquer le

théorème 3.3.3 et conclure.

En fait, on va montrer que, comme pour les bords de domaines isopérimétriques, les Σ_H sont des sphères presque rondes pour H assez grand. Un résultat semblable a été démontré par Rosenberg dans le cas des surfaces fortement stables. Il montre notamment dans [101], [102] que les H-surfaces fortement stables de grande courbure moyenne ont un petit diamètre et sont simplement connexes.

Pour démontrer que les Σ_H sont des sphères presque rondes, on a besoin de l'estimée suivante

$$\sup_{\Sigma_H} \|S_H\| \delta(\Sigma_H) = O(1), \tag{3.4}$$

où $\|S_H\|$ est la norme de la seconde forme fondamentale de Σ_H et $\delta(\Sigma_H)$ son diamètre. En effet supposons par l'absurde que $\sup_{\Sigma_H} \|S_H\| \delta(\Sigma_H) \to +\infty$ quand $H \to +\infty$. Soit alors $p_H \in \Sigma_H$ un point où $\|S_H\|$ atteint son maximum. Pour H assez grand, on sait que $\delta(\Sigma_H)$ est plus petit que le rayon d'injectivité de $\mathcal{N}$, on se place alors dans une carte centrée en p_H et on dilate l'espace par un facteur $\|S_H\|$ autour du point p_H. On obtient ainsi une suite $\tilde{\Sigma}_H$ de surfaces de $(\mathbb{R}^3, g_H)$ vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{S}_H\|_\infty = 1, \\
&\delta(\tilde{\Sigma}_H) \to +\infty, \\
&g_H \to \xi \text{ sur tout compact de } \mathbb{R}^3,
\end{aligned}$$

où ξ est la métrique standard de $\mathbb{R}^3$. Alors $\tilde{\Sigma}_H$ converge de manière C^2 vers une surface non-compacte $\tilde{\Sigma}_\infty$ sur tout compact de $\mathbb{R}^3$. De plus $\tilde{\Sigma}_\infty$ est une surface à courbure moyenne constante stable. D'après le théorème 2.1.7, $\tilde{\Sigma}_\infty$ est nécessairement un plan, or on doit avoir $\|\tilde{S}_\infty(0)\| = 1$, ce qui est une contradiction et prouve (3.4).

Maintenant pour H assez grand on dilate l'espace par un facteur $\frac{1}{\delta(\Sigma_H)}$ autour du point p_H. On obtient ainsi une suite $\hat{\Sigma}_H$ de surfaces de $(\mathbb{R}^3, g_H)$ vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\|\hat{S}_H\|_\infty = O(1), \\
&\delta(\hat{\Sigma}_H) = 1, \\
&g_H \to \xi \text{ sur tout compact de } \mathbb{R}^3,
\end{aligned}$$

où ξ est la métrique standard de $\mathbb{R}^3$. Alors $\hat{\Sigma}_H$ converge de manière C^2 vers une surface compacte $\hat{\Sigma}_\infty$. De plus $\hat{\Sigma}_\infty$ est une surface à courbure moyenne constante stable. D'après le théorème 2.1.6, $\hat{\Sigma}_\infty$ est nécessairement une sphère ronde, ce qui achève la preuve du corollaire. $\square$

Chapitre 4

Preuve du théorème 3.3.3

Dans ce chapitre on présente une preuve détaillée du théorème 3.3.3 qui correspond à la traduction de [75]. Pour faciliter sa lecture, un certain nombre de résultats intermédiaires sont renvoyés en fin de chapitre ou au chapitre 7.

La preuve se décompose en plusieurs étapes. Tout d'abord on cherche l'équation satisfaite par les paramétrages de telles surfaces et on donne une classification des solutions de l'équation limite (i.e. quand la métrique ambiante est plate). Ensuite on reformule notre problème en terme d'analyse de *blow-up*. On commence notre analyse en montrant qu'asymptotiquement, notre suite de solutions se décompose en somme de sphères, ce qui généralise le résultat de Brezis et Coron. Puis arrive le point clef : l'estimation forte. On décompose cette estimation en deux étapes. On commence par utiliser une estimée obtenue grâce à la formule d'un représentation de Green et à une classification des solutions décroissantes de l'équation linéarisée, voir section 7.1.2. Cette classification est d'ailleurs une nette amélioration de résultat existant, voir le lemme 9.1 de [21] ou le corollaire 1.8 de [20]. Reste alors à contrôler l'interaction entre les bulles, ce qui est renvoyé en fin de chapitre à la section 4.6. Enfin cette estimée sera utilisée dans la section 4.5 pour conclure. La preuve étant assez technique, on peut commencer par l'aborder en supposant qu'il n'y a qu'une bulle, comme pour la construction de Ye. Dans ce cas, on peut ignorer la section 4.6. Dans le cas où plusieurs bulles sont présentes, il faut en plus contrôler ce qui se passe au niveau du recollement de deux bulles.

4.1 L'équation de courbure moyenne dans une variété riemannienne de dimension 3

On commence par calculer l'équation satisfaite par une immersion conforme en fonction de sa courbure moyenne. Comme on l'a vu dans la section 1.5.2, le fait de considérer une immersion conforme est assez naturel. De plus en dimension 2, grâce au théorème d'uniformisation [61], sur la sphère toutes les métriques sont conformes à la métrique standard.

Soient $(\mathcal{N}, g)$ une variété riemannienne orientée, $(\mathcal{M}, h)$ une surface et $f : \mathcal{M} \to \Sigma \subset \mathcal{N}$ une immersion conforme, c'est-à-dire telle que $f^*(g_{|\Sigma}) = e^{2u}h$, où $u \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Pour obtenir l'équation satisfaite par f en fonction de H, la courbure moyenne de l'immersion f, on utilise la définition de la courbure moyenne comme trace de la seconde forme

fondamentale. Pour cela, on munit $\mathcal{M}$ d'une orientation compatible avec f et celle de $\mathcal{N}$. On a alors

$$\left(\nabla^{\mathcal{N}}_{E_\alpha} E_\alpha\right)^{\perp}(y) = 2H(y)N(y) \text{ pour tout } y \in \Sigma, \tag{4.1}$$

où $\nabla^{\mathcal{N}}$ est la connexion de Levi-Civita de g, (E_α) est une base locale positive de $T\mathcal{M}$ telle que $(E_\alpha(y))$ soit orthonormale, et N le vecteur unitaire de $T_y\mathcal{N}$ tel que $(E_\alpha(y), N(y))$ forme une base orthonormale positive de $T_y\mathcal{N}$.

Afin de développer (4.1), on considère des coordonnées normales autour de $x \in \mathcal{M}$. Puis on pose $E_\alpha = \frac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|_g}$ où $e_\alpha = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$. On voit facilement que (E_α) est une base locale positive de $T\mathcal{M}$ qui est orthonormale en $y = f(x)$. D'une part en utilisant les propriétés de la connexion et (4.1), on a

$$\left(\nabla^{\mathcal{N}}_{e_\alpha} e_\alpha\right)^{\perp}(y) = e^{2u}\left(\nabla^{\mathcal{N}}_{E_\alpha} E_\alpha\right)^{\perp}(y) = 2e^{2u}H(y)N(y). \tag{4.2}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{\mathcal{N}}_{e_\alpha} e_\alpha\right)^{\top}(y) &= \left(\nabla^{\Sigma}_{f_*(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\right)(y) \\ &= f_*\left(\tilde{\nabla}^{\mathcal{M}}_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(x)\right),\end{aligned} \tag{4.3}$$

où $\tilde{\nabla}^{\mathcal{M}}$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique $e^{2u}h$. En exprimant $\tilde{\nabla}^{\mathcal{M}}$ en fonction de $\nabla^{\mathcal{M}}$, (4.3) devient

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{\mathcal{N}}_{e_\alpha} e_\alpha\right)^{\top} &= f_*\left(\nabla^{\mathcal{M}}_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + 2du\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - h\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\nabla u\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Il est important de remarquer que l'annulation du terme de droite est spécifique à la dimension 2. Maintenant on calcule le terme de gauche de (4.2). Soit (y^i) un système de coordonnées autour de $y = f(x)$, on a

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{\mathcal{N}}_{e_\alpha} e_\alpha\right)^{\perp} &= \nabla^{\mathcal{N}}_{e_\alpha} e_\alpha \\ &= \nabla^{\mathcal{N}}_{\frac{\partial f^k}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^k}} \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= \frac{\partial^2 f^j}{(\partial x^\alpha)^2}\frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial x^\alpha}\Gamma^j_{ik}(f(x))\frac{\partial}{\partial y^j}.\end{aligned}$$

Afin d'évaluer le terme de droite de (4.2), on donne une expression de la normale. Un calcul immédiat donne dans des coordonnées quelconques :

$$N = \frac{\sqrt{|g|}g^{ij}\nu_i}{e^{2u}\sqrt{|h|}}, \tag{4.5}$$

où

$$\nu_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial f}{\partial x^2}\right)_i$$

et

$$|h| = det(h_{\alpha\beta}) \text{ et } |g| = det(g_{ij}).$$

Finalement, $\Sigma = f(\mathcal{M})$ est une surface de courbure moyenne H si

$$\frac{\partial^2 f^j}{(\partial x^\alpha)^2} + \Gamma^j_{ik}(f)\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial x_\alpha} = 2H(f)\sqrt{|g|}g^{ij}(f)\nu_i \text{ pour } j \in \{1,2,3\}. \tag{4.6}$$

Ce qui donne dans des coordonnées arbitraires

$$\Delta_{\mathcal{M}} f^j - h^{\alpha\beta}\Gamma^j_{ik}(f)\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial x^\beta} = -2H(f)\frac{\sqrt{|g|}g^{ij}(f)\nu_i}{\sqrt{|h|}} \text{ pour } j \in \{1,2,3\}, \tag{4.7}$$

où $\Delta_{\mathcal{M}}$ est laplacien de Beltrami de $(\mathcal{M}, h)$. Il est important de remarquer que cette équation est invariante sous l'action d'un difféomorphisme conforme. C'est-à-dire que si u satisfait (4.7) et $\phi \in \mathrm{Conf}(\mathcal{M})$ alors $u \circ \phi$ satisfait encore (4.7).

4.1.1 L'exemple fondamental : le cas euclidien.

Ici on développe ce qui se passe dans le cas euclidien, car l'équation euclidienne est simplement l'équation limite du cas général. La classification de solutions de cette équation jouera un rôle important dans toute notre analyse.

Donc si on considère une sphère immergée dans $\mathbb{R}^3$, (4.7) devient l'équation des H-bulles :

$$\begin{cases} \Delta_\xi u = -2H(u)\, u_x \wedge u_y, \\ \langle u_x, u_y\rangle_\xi = \|u_x\|_\xi - \|u_y\|_\xi = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Ici ξ est la métrique standard de $\mathbb{R}^3$. Comme on l'a remarqué plus haut, cette équation, tout particulièrement lorsque H est constant, va jouer un rôle fondamental dans ce qui suit puisque c'est la limite de l'équation générale lorsque la métrique devient plate. De plus, d'après le théorème de Hopf, on sait que les sphères rondes sont les seules surfaces immergées compactes simplement connexes à courbure moyenne constante dans $\mathbb{R}^3$. Donc les sphères rondes sont les solutions fondamentales de (4.8). On a donc besoin d'un paramétrage conforme de la sphère qui est donné par l'inverse de la projection stéréographique.

Dans ce qui suit on définit la projection stéréographique de S^2 et on donne quelques formules utiles pour la suite.

Ici S^2 est identifiée avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Soit $Q \in S^2$, pour tout $P \in S^2 \setminus \{Q\}$ on définit $\pi_Q(P)$ comme l'intersection de la droite (PQ) et du plan orthogonal à Q passant par 0. Dès lors on a la formule suivante

$$\pi_Q(P) = Q + \frac{P - Q}{1 - \langle P, Q\rangle}.$$

On vérifie facilement que la projection stéréographique réalise une isométrie de $(S^2 \setminus \{Q\}, h)$ sur $\left(\mathbb{R}^2, \frac{4}{(1+|z|^2)^2}\xi\right)$, où h est la métrique standard de la sphère. En particulier, la projection stéréographique est bien une application conforme de $(S^2 \setminus \{Q\}, h)$ sur $\left(\mathbb{R}^2, \xi\right)$. Ensuite on

définit l'inverse de la projection stéréographique, pour cela on pose $\pi = \pi_N$, où $N = (0,0,1)$ et on définit $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ comme suit

$$\omega(x,y) = \pi^{-1}(x,y) = \frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ r^2-1 \end{pmatrix}$$

où $r^2 = x^2 + y^2$.

Puis en calculant les dérivées ainsi que leurs produits vectoriels, on obtient

$$\omega_x(x,y) = \frac{\partial\omega}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{(1+r^2)^2}\begin{pmatrix} 1+(y^2-x^2) \\ -2xy \\ 2x \end{pmatrix},$$

$$\omega_y(x,y) = \frac{\partial\omega}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{(1+r^2)^2}\begin{pmatrix} -2xy \\ 1+(x^2-y^2) \\ 2y \end{pmatrix},$$

$$\omega_x \wedge \omega_y(x,y) = \frac{-4}{(1+r^2)^3}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1-r^2 \end{pmatrix} = \frac{-4\omega(x,y)}{(1+r^2)^2},$$

$$\frac{|\nabla\omega|^2}{2} = |\omega_x|^2 = |\omega_y|^2 = \frac{4}{(1+r^2)^2}, \tag{4.9}$$

$$\langle \nabla\omega^k, \nabla\omega^l \rangle = (\delta_{kl} - \omega^k\omega^l)\frac{|\nabla\omega|^2}{2}. \tag{4.10}$$

Enfin on rappelle le résultat de classification de Brezis et Coron [12] qui affirme que la seule solution de

$$\Delta u = -2\, u_x \wedge u_y,$$

d'énergie bornée, à reparamétrage conforme près, est la projection stéréographique. Ce résultat peut être considéré comme une variante du théorème de Hopf où l'hypothèse conforme serait remplacée par la borne sur l'énergie.

Lemme 4.1.1 (lemme A.1 de [12])**.** *Soit $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ qui satisfait*

$$\begin{aligned} &\Delta\omega = -2\,\omega_x \wedge \omega_y, \\ &\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\omega|^2 dz < +\infty. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Alors ω est précisément de la forme

$$\omega(z) = \pi_N^{-1}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) + C,$$

où P et Q sont des polynômes, C un vecteur constant et π_N la projection stéréographique par rapport au pôle nord N. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\omega|^2\, dz = 8\pi k \ \text{ où } k = max\{deg(P), deg(Q)\},$$

lorsque P et Q sont premiers entre eux.

Il sera utile pour la suite de remarquer que, d'après (4.9), le gradient de ω vérifie la formule suivante

$$|\nabla\omega| = \frac{2\sqrt{2}|P'Q - Q'P|}{|P|^2 + |Q|^2}.$$

Enfin on définit une classe spéciale de solutions qui joueront un rôle important dans ce qui suit : les sphères qui ne sont paramétrées qu'une fois.

Définition 4.1.1. *Une solution ω de (4.11) est dite simple si*

$$\omega(z) = \pi_N^{-1}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) + C,$$

avec P et Q premiers entre eux et $max\{degP, deg\ Q\} = 1$.

En particulier, si ω est une solution simple de (4.11), alors on a

$$|\nabla\omega^\varepsilon(x)| = O\left(\frac{\lambda^\varepsilon}{|x - a^\varepsilon|^2 + (\lambda^\varepsilon)^2}\right), \tag{4.12}$$

où $\omega^\varepsilon = \omega\left(\frac{\cdot - a^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon}\right)$, a^ε et λ^ε sont respectivement une suite de points de $\mathbb{R}^2$ et une suite de nombres positifs.

4.2 Préliminaires

Le but de cette section est de rappeler quelques faits sur les surfaces plongées de l'espace euclidien et de donner une bonne formulation de notre problème .

Tout d'abord, on prouve des relations classiques reliant le diamètre, l'aire et la courbure moyenne d'une surface de $\mathbb{R}^3$. Puis on donne une formulation équivalente dans le cas riemannien.

Le lemme suivant permet de minorer le diamètre par l'inverse de la courbure moyenne.

Lemme 4.2.1. *Soit S une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ de courbure moyenne H. Alors*

$$2 \leq \delta(S) \sup_{x\in S} |H(x)|,$$

où $\delta(S)$ le diamètre extrinsèque de M.

Preuve du lemme 4.2.1 :

Soit $\overline{B(x,r)}$ la plus petite boule contenant S. En utilisant un principe du maximum en $y \in \overline{B(x,r)} \cap S$, on voit que $|H(y)| \geq |H_{S(x,r)}(y)| = \frac{1}{r}$, ce qui prouve le lemme. □

Maintenant, on rappelle l'inégalité de Simon qui relie le diamètre, l'aire et la courbure moyenne.

Théorème 4.2.1. *Soit S une surface connexe immergée dans $\mathbb{R}^3$, alors*

$$\delta(S) < \frac{2}{\pi} A(S)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S |H|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.13}$$

où A, H et $d\sigma$ sont respectivement l'aire, la courbure moyenne et l'élement de volume de S.

On trouvera la preuve originale dans [108], et une preuve du fait que $\frac{2}{\pi}$ est optimale dans [117]. En effet, si on considère un long cylindre refermé par des hémisphères on voit que la constante ne peut être améliorée. Dès lors on en déduit facilement l'inégalité suivante

$$\delta(S) < \frac{2}{\pi} A(S) \sup_{x \in S} |H(x)|. \tag{4.14}$$

Une égalité semblable a également été démontrée par Bethuel et Rey, voir théorème 6.2 de [11].

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer dans un cadre riemannien le fait que le diamètre d'une H-surface est contrôlé par le produit de son aire par sa courbure moyenne. En fait on a besoin d'une hypothèse supplémentaire qui est que le diamètre doit être assez petit pour avoir une géométrie ambiante relativement plate. D'ailleurs cette inégalité serait fausse sans cette hypothèse supplémentaire comme le montre un petit tube autour d'une géodésique fermée de S^3, voir (3.1).

Lemme 4.2.2. *Soient $(\mathcal{N}, g)$ une variété riemannienne de dimension 3 dont le rayon d'injectivité admet une borne inférieure strictement positive et $\Sigma_H \subset \mathcal{N}$ une suite de H-surfaces connexes qui satisfait les hypothèses suivantes*

$$\begin{cases} \delta(\Sigma_H) = o(1), \\ A(\Sigma_H) = O\left(\frac{1}{H^2}\right). \end{cases} \qquad \textit{quand } H \to +\infty,$$

Alors on a l'estimée suivante

$$\frac{1}{KH} \leq \delta(\Sigma_H) \leq \frac{K}{H},$$

où K est une constante positive.

Preuve du lemme 4.2.2 :

Soit $c_H \in \Sigma_H$. Pour H assez grand, on peut supposer que $\Sigma_H \subset B(c_H, \delta)$ où $\delta > 0$ est plus petit que le rayon d'injectivité de $(\mathcal{N}, g)$. On dilate alors la carte exponentielle centrée en c_H par un facteur $\frac{1}{\delta_H}$, où $\delta_H = \delta(\Sigma_H)$. On obtient une nouvelle suite $\tilde{\Sigma}_H$ de surfaces de $(\mathbb{R}^3, g_H)$ de diamètres égaux à 1, où g_H est la métrique dilatée. La courbure moyenne de $\tilde{\Sigma}_H$, calculée par rapport à g_H, est égale à $\tilde{H} = \delta_H H$. De plus g_H converge uniformément vers ξ sur tout compact et $\tilde{\Sigma}_H \subset \overline{B(0,2)}$. Donc, d'après le lemme 4.2.1, pour H assez grand, on a

$$\tilde{H} = \delta_H H \geq 1,$$

ce qui prouve l'inégalité de gauche.
D'autre part, d'après (4.14), pour H assez grand, on a

$$\tilde{H} = \delta_H H \geq \frac{(\delta_H H)^2}{C},$$

où C est une constante positive, ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

On a donc montré que l'hypothèse (1.4) est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{1}{CH} \leq \delta(\Sigma_H) \leq \frac{C}{H} \\ A(\Sigma_H) \leq \frac{C}{H^2} \end{cases} \qquad \text{quand } H \to +\infty \tag{H'}$$

où C est une constante positive.

Maintenant, comme on veut s'intéresser de manière précise au comportement de notre suite de H-surfaces, on va avoir besoin de coordonnées. En particulier, on a besoin de choisir un centre pour notre carte. Dans ce but on fixe une suite de points c_H de Σ_H comme centres de carte. Or, quitte à extraire une sous-suite, Σ_H tend vers p_∞ quand H tend vers l'infini, donc il en est de même pour c_H. A partir de maintenant, on considère Σ_H dans la carte exponentielle centrée en c_H. Puis on dilate cette carte par un facteur H par rapport à 0 et on remplace H par $\frac{1}{\varepsilon}$.

Finalement on a une nouvelle suite de surfaces $(\Sigma_\varepsilon) \subset (\mathbb{R}^3, g_\varepsilon)$ à courbure moyenne constante égale à 1, où g_ε est la suite de métriques dilatées : $g_\varepsilon(y)(u,v) = g(\varepsilon y)(\varepsilon u, \varepsilon v)$. De plus, Σ_ε satisfait les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} A(\Sigma_\varepsilon) \leq C, \\ \Sigma_\varepsilon \subset B(0,C), \end{cases} \tag{H''}$$

où C est une constante positive.

Finalement, soit u^ε un paramétrage de Σ_ε de (S^2, h) dans $(\mathbb{R}^3, g_\varepsilon)$. Quitte à composer ce paramétrage par un difféomorphisme de la sphère, on peut supposer que ce paramétrage est conforme. En effet $(u^\varepsilon)^*(g_{\varepsilon|\Sigma_\varepsilon})$ est dans la classe conforme de la métrique standard, puisqu'il n'y a qu'une classe conforme sur S^2. Il existe alors $\phi^\varepsilon \in \mathrm{Diff}(S^2)$ tel que $(\phi^\varepsilon)^*((u^\varepsilon)^*(g_{\varepsilon|\Sigma_\varepsilon}))$ est conforme point par point à h, alors $u^\varepsilon \circ \phi^\varepsilon$ est notre paramétrage conforme de (S^2, h) dans $(\mathbb{R}^3, g_\varepsilon)$. Quitte à remplacer u^ε par $u^\varepsilon \circ \phi^\varepsilon$, u^ε satisfait, dans toutes coordonnées conformes, les équations suivantes

$$\begin{cases} \Delta_{S^2} u^\varepsilon - (\Gamma^j_{ik})_\varepsilon(u^\varepsilon)\langle \nabla(u^i)^\varepsilon, \nabla(u^k)^\varepsilon\rangle_h = -2\frac{\sqrt{|g_\varepsilon|}g_\varepsilon^{ij}((u^\varepsilon)_x \wedge (u^\varepsilon)_y)_i}{\sqrt{|h|}} \\ \|u^\varepsilon\|_\infty \leq C \\ \|\nabla u^\varepsilon\|_2 \leq C, \end{cases} \tag{4.15}$$

où $(\Gamma^j_{ik})_\varepsilon$ sont les symboles de Christoffel de g_ε et C est une constante positive. Ces équations sont totalement invariantes sous l'action des difféomorphismes conformes de la sphère. Mais comme nous allons le rappeler, le groupe des difféomorphismes conformes de S^2, $\mathrm{Conf}(S^2)$, n'est pas compact. Donc il pourrait être intéressant de fixer le paramétrage une fois pour toutes. Bien sûr il n'y a pas de choix canonique. Nous choisissons de dilater la bulle la plus haute au pôle nord et donc d'envoyer le reste au pôle sud.

Mais avant de fixer le paramétrage, rappelons quelques faits sur $\mathrm{Conf}(S^2)$. Un résultat classique est que $\mathrm{Conf}(S^2)$ est isomorphe au groupe de Möbius $PSL(2,\mathbb{C})$, qui est un groupe

de Lie complexe de dimension 3. En fait, grâce à la projection stéréographique, à une isométrie près, toute application conforme de la sphère définit une application conforme de $\mathbb{C}$.

D'autre part, on peut définir un équivalent sur la sphère du groupe des homothéties affines du plan. On notera $\mathcal{D}$ ce sous-groupe de $\mathrm{Conf}(S^2)$, défini comme suit : pour tout $Q \in S^2$, soit $\pi_Q : S^2 \to \mathbb{C}$ la projection stéréographique associée (ici $(\mathbb{R}Q)^\perp$ est identifié à $\mathbb{C}$) et pour tout $t \in [1, +\infty[$, on considère $\tau_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini comme $\tau_t(z) = tz$. On pose alors

$$\mathcal{D} = \left\{ \Phi_{Q,t} \text{ t.q. } (Q,t) \in S^2 \times [1, +\infty[\right\},$$

avec

$$\Phi_{Q,t} = \pi_Q^{-1} \circ \tau_t \circ \pi_Q.$$

On remarque que $\mathcal{D}$ est homéomorphe à $B^3 \sim (S^2 \times [1, +\infty[)/(S^2 \times \{1\})$ par la correspondance : $\Phi_{Q,t} \mapsto \frac{1-t}{t} Q$. Enfin un simple calcul donne la formule suivante

$$\det(d\Phi_{Q,t})(P) = \frac{4t^2}{(1 - \langle P, Q\rangle + t^2(1 + \langle P, Q\rangle))^2} \quad . \tag{4.16}$$

Après ce petit rappel, nous sommes en mesure de fixer le paramétrage de u^ε. Soit a^ε et λ^ε tels que

$$|\nabla u^\varepsilon(a^\varepsilon)| = \frac{1}{\lambda^\varepsilon} = \sup_{S^2} |\nabla u^\varepsilon|.$$

En fait, quitte à composer u^ε avec une rotation de S^2, on peut supposer que $a^\varepsilon = N$. Puis on remplace u^ε par $u^\varepsilon \circ \Phi_{N,\lambda^\varepsilon}$, d'après (4.16), on vérifie facilement que ∇u^ε est borné sur tout sous-ensemble compact de $S^2 \setminus \{S\}$. De plus, grâce à l'invariance conforme de notre problème, u^ε satisfait toujours (4.15). Donc, d'après la théorie elliptique standard, voir [49], il existe une sous-suite de u^ε (toujours notée u^ε) et $u^0 \in C^2(S^2 \setminus \{S\})$ tels que

$$u^\varepsilon \to u^0 \text{ dans } C^2_{loc}(S^2 \setminus \{S\}), \tag{4.17}$$

Si on pose $\omega^0 = u^0 \circ \pi_N^{-1}$, alors $\omega^0 \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ satisfait

$$\Delta \omega^0 = -2\, \omega^0_x \wedge \omega^0_y \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

D'après l'invariance conforme de $\|\nabla\,.\,\|_2$, on a

$$\|\nabla \omega^0\|_2 \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u^\varepsilon \circ \pi_N^{-1}\|_2 = \liminf_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_2 < +\infty.$$

Donc ω^0 est solution de (4.11) et ω^0 est non-constante puisque $|\nabla u^0(N)| = 1$. De plus $|\nabla \omega^0|$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}^2$, soit alors $a_0 \in \mathbb{R}^2$ le point où $|\nabla \omega^0|$ atteint son maximum.

Finalement, quitte à remplacer u^ε par $u^\varepsilon \circ \pi_N^{-1}$, u^ε satisfait

$$\begin{cases} \Delta_\xi u^\varepsilon - (\Gamma^j_{ik})_\varepsilon(u^\varepsilon)\langle \nabla(u^i)^\varepsilon, \nabla(u^k)^\varepsilon\rangle_\xi = -2\sqrt{|g_\varepsilon|}\, g^{ij}_\varepsilon((u^\varepsilon)_x \wedge (u^\varepsilon)_y)_i \\ u^\varepsilon_0 \to \omega^0 \text{ in } C^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \{-a_0\}) \\ \|u^\varepsilon\|_\infty \leq C \text{ et } \|\nabla u^\varepsilon\|_2 \leq C. \end{cases} \tag{4.18}$$

où $u^\varepsilon_0 = u^\varepsilon(z + a_0)$, $a_0 \in \mathbb{R}^2$ et ω^0 est une solution non-constante de (4.11) telle que $|\nabla \omega^0|$ atteint son maximum en 0.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de la preuve, on considèrera u^ε comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

4.3 Décomposition de u^ε comme somme de sphères.

Cette section se décompose en deux parties. Tout d'abord on va montrer que Σ_ε converge vers une union de sphères rondes. Puis dans un deuxième temps nous allons ajuster ces sphères à la géométrie de la variété.

Dans un premier temps on va montrer que u^ε converge dans un sens faible vers une somme connexe de sphères rondes. En fait, une telle décomposition a déjà été observée par Brezis et Coron [12], où ils donnent justement une décomposition H^1 des solutions approchées de l'équation de courbure moyenne constante sur le disque. Ici on donne un résultat dans le même esprit, en remplaçant H^1 par C^2_{loc}. La méthode que nous utilisons a été déjà utilisée pour l'équation de Yamabe, puis généralisée aux systèmes d'équations elliptiques, voir [39] et [40].

Théorème 4.3.1. *Soit u^ε une suite de solutions C^2 de (4.18). Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et*

(i) $\omega^1, \dots, \omega^p$ des solutions simples de (4.11) telles que $|\nabla \omega^i|$ atteigne son maximum en 0,

(ii) $a_1^\varepsilon, \dots, a_p^\varepsilon$ des suites de $\mathbb{R}^2$ qui convergent toutes vers 0, et

(iii) $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_p^\varepsilon$ des suites de nombres positifs telles que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_i^\varepsilon = 0$,

tels que, pour une sous-suite de u^ε (toujours notée u^ε) on ait

$$u_i^\varepsilon \to \omega^i \text{ dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus S_i) \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ pour tout } 1 \le i \le p, \tag{A}$$

où $u_i^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_i^\varepsilon\ . + a_i^\varepsilon)$ et $S_i = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ \dfrac{a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \text{ t.q. } j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\} \right\}$.

$$\frac{d_i^\varepsilon(a_j^\varepsilon)}{\lambda_j^\varepsilon} + \frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} \to +\infty \text{ pour tout } i \neq j, \tag{B}$$

où $d_i^\varepsilon(x) = \sqrt{(\lambda_i^\varepsilon)^2 + |a_i^\varepsilon - x|^2}$ pour $1 \le i \le p$ et $d_0(x) = \sqrt{1 + |x - a_0|^2}$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\min_{0 \le i \le p} d_i^\varepsilon(x) \right) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^{p} \omega_i^\varepsilon \right)(x) \right| = 0 \tag{C}$$

et

$$\left\| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^{p} \omega_i^\varepsilon \right) \right\|_2 \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0, \tag{D}$$

où $\omega_i^\varepsilon = \omega_i \left(\frac{\cdot\ - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \right)$ et $(a_0^\varepsilon, \lambda_0^\varepsilon) = (a_0, 1)$.

Quand il y a juste une bulle, c'est-à-dire lorsque $p = 0$, la conclusion se limite à

$$u^\varepsilon \to \omega^0 \text{ dans } C^2(\mathbb{R}^2) \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Preuve du théorème 4.3.1 :

Nous allons extraire les bulles par induction, le processus s'arrêtera grâce à notre borne uniforme sur l'énergie de u^ε.

Pour $k \geq 0$, soit (P_k) la propriété suivante :

Il existe

(i) $\omega^0, \ldots, \omega^k$ des solutions non-constantes de (4.11) telles que $|\nabla \omega^i|$ atteint son maximum en 0,

(ii) $a_0^\varepsilon, \ldots, a_k^\varepsilon$ des suites bornées de $\mathbb{R}^2$ telles que $\lim_{\varepsilon \to 0} a_i^\varepsilon = 0$ pour $1 \leq i \leq k$, et

(iii) $\lambda_0^\varepsilon, \ldots, \lambda_k^\varepsilon$ des suites bornées de nombres positifs telles que $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_i^\varepsilon = 0$ for $1 \leq i \leq k$,

telles que, pour une sous-suite de u^ε(toujours notée u^ε) on ait

$$u_i^\varepsilon \to \omega_i \text{ dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus S_i) \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ pour tout } 0 \leq i \leq k, \tag{A_k}$$

où $u_i^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_i^\varepsilon \ . \ - a_i^\varepsilon)$ et $S_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \dfrac{a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \text{ t.q. } j \in \{0, \ldots, k\} \setminus \{i\} \right\}$.

$$\frac{d_i^\varepsilon(a_j^\varepsilon)}{\lambda_j^\varepsilon} + \frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} \to +\infty \text{ pour tout } i \neq j, \text{ quand } \varepsilon \to 0, \tag{B_k}$$

où $d_i^\varepsilon(x) = \sqrt{(\lambda_i^\varepsilon)^2 + |a_i^\varepsilon - x|^2}$.

Affirmation 1 : Si (P_k) est vraie pour $k \geq 0$ alors soit (P_{k+1}) est également vraie soit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\min_{1 \leq i \leq k} d_i^\varepsilon(x) \right) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right)(x) \right| = 0, \tag{4.19}$$

où $\omega_i^\varepsilon = \omega_i \left(\frac{\cdot - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \right)$.

Preuve de l'affirmation 1 :

Supposons que (P_k) soit vraie pour $k \geq 0$ et qu'il existe $\gamma_0 > 0$ et une sous-suite de u^ε (toujours notée u^ε) tels que

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left(\min_{0 \leq i \leq k} d_i^\varepsilon(z) \right) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right)(z) \right| \geq \gamma_0. \tag{4.20}$$

Il suffit alors de montrer que (P_{k+1}) est vraie pour prouver l'affirmation. Soit $a_{k+1}^\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\left(\min_{0 \leq i \leq k} d_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon) \right) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right)(a_{k+1}^\varepsilon) \right| = \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left(\min_{0 \leq i \leq k} d_i^\varepsilon(z) \right) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right)(z) \right|.$$

Le fait que le maximum soit atteint est une conséquence de nos hypothèses. En effet, d'après (4.18), on a

$$\left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right)(z) \right| = O\left(\frac{1}{1 + |z|^2} \right) \text{ quand } z \to +\infty,$$

ce qui prouve que le maximum est atteint. Maintenant on définit $\lambda_{k+1}^{\varepsilon}$ par l'équation

$$\left|\nabla\left(u^{\varepsilon}-\sum_{i=0}^{k}\omega_i^{\varepsilon}\right)(a_{k+1}^{\varepsilon})\right|=\frac{1}{\lambda_{k+1}^{\varepsilon}}.$$

Toujours d'après (4.18) et les propriétés des a_i^{ε} et des λ_i^{ε} , on remarque que

$$\left|\nabla\left(u^{\varepsilon}-\sum_{i=0}^{k}\omega_i^{\varepsilon}\right)\right|\to 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2\setminus\{0\},$$

ce qui prouve que (a_{k+1}^{ε}) converge vers 0. D'autre part, si $k\geq 1$ on a

$$\min_{0\leq i\leq k} d_i^{\varepsilon}(a_{k+1}^{\varepsilon})\to 0 \text{ quand } \varepsilon\to 0,$$

et donc

$$\lambda_{k+1}^{\varepsilon}\to 0 \text{ quand } \varepsilon\to 0. \tag{4.21}$$

En fait, (4.21) est également vraie quand $k=0$. En effet, sinon $(u^{\varepsilon}-\omega_0^{\varepsilon})$ devrait être uniformément bornée dans $C^1(\mathbb{R}^2)$ et alors converger vers 0 sur le plan tout entier ce qui contredirait (4.20).

Maintenant il faut considérer deux cas.

Premier cas :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\min\limits_{0\leq i\leq k} d_i^{\varepsilon}(a_{k+1}^{\varepsilon})}{\lambda_{k+1}^{\varepsilon}}=+\infty. \tag{4.22}$$

Dans ce cas, (B_{k+1}) est automatiquement satisfait. On pose alors $u_{k+1}^{\varepsilon}=u^{\varepsilon}(\lambda_{k+1}^{\varepsilon}\,.+a_{k+1})$. Soit $z\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}|\nabla u_{k+1}^{\varepsilon}(z)|&=\lambda_{k+1}^{\varepsilon}|\nabla u^{\varepsilon}(\lambda_{k+1}^{\varepsilon}z+a_{k+1}^{\varepsilon})|\\&\leq\lambda_{k+1}^{\varepsilon}\left|\nabla\left(u^{\varepsilon}-\sum_{i=0}^{k}\omega_i^{\varepsilon}\right)(\lambda_{k+1}^{\varepsilon}z+a_{k+1}^{\varepsilon})\right|\\&+\lambda_{k+1}^{\varepsilon}\left|\nabla\left(\sum_{i=0}^{k}\omega_i^{\varepsilon}\right)(\lambda_{k+1}^{\varepsilon}z+a_{k+1}^{\varepsilon})\right|.\end{aligned} \tag{4.23}$$

D'après (4.12) et (4.22), on voit facilement que

$$\begin{aligned}&\lambda_{k+1}^{\varepsilon}\left|\nabla\left(\sum_{i=0}^{k}\omega_i^{\varepsilon}\right)(\lambda_{k+1}^{\varepsilon}z+a_{k+1}^{\varepsilon})\right|=o(1),\\&\text{et}\\&\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{k+1}^{\varepsilon}\left|\nabla u^{\varepsilon}(a_{k+1}^{\varepsilon})\right|=1.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Puis en utilisant la définition de a_{k+1}^{ε}, (4.22), (4.23) et (4.24) on a

$$|\nabla u_{k+1}^{\varepsilon}(z)|\leq\frac{\min_{0\leq i\leq k} d_i^{\varepsilon}(a_{k+1}^{\varepsilon})}{\min_{0\leq i\leq k} d_i^{\varepsilon}(\lambda_{k+1}^{\varepsilon}z+a_{k+1}^{\varepsilon})}+o(1)=1+o(1). \tag{4.25}$$

Dès lors $|\nabla u^\varepsilon_{k+1}|$ est borné sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$. De plus d'après l'invariance conforme de notre problème, u^ε_{k+1} satisfait toujours (4.18). Donc, d'après la théorie elliptique standard, voir [49], il existe une sous-suite de u^ε(encore notée u^ε) et $\omega^{k+1} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$u^\varepsilon_{k+1} \to \omega^{k+1} \text{ dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$$

et

$$\Delta\omega^{k+1} = -2\,\omega^{k+1}_x \wedge \omega^{k+1}_y \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

De plus, d'après l'invariance conforme de $\|\nabla.\|_2$, on a

$$\|\nabla\omega^{k+1}\|_2 \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon_{k+1}\|_2 = \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_2 < +\infty.$$

Finalement, d'après le lemme 4.1.1, ω^{k+1} est solution de (4.11) sur $\mathbb{R}^2$ et ω^{k+1} est non-constante puisque $|\nabla\omega^{k+1}(0)| = 1$. De plus d'après (4.24) et (4.25), on voit facilement que $|\nabla\omega^{k+1}|$ atteint son maximum en 0. Ce qui prouve que (P_{k+1}) est vraie dans le premier cas.

Deuxième cas :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\min\limits_{0\leq i\leq k} d^\varepsilon_i(a^\varepsilon_{k+1})}{\lambda^\varepsilon_{k+1}} = \gamma > 0. \tag{4.26}$$

Dans ce cas on a nécessairement $k > 0$.

Tout d'abord, il faut démontrer (B_{k+1}). Si (B_{k+1}) était faux, à une sous-suite près, il existerait $1 \leq i_0 \leq k$ tel que

$$d^\varepsilon_{k+1}(a^\varepsilon_{i_0}) = O(\lambda^\varepsilon_{i_0}) \text{ et } d^\varepsilon_{i_0}(a^\varepsilon_{k+1}) = O(\lambda^\varepsilon_{k+1}). \tag{4.27}$$

D'une part, (4.27) donne

$$\frac{\lambda^\varepsilon_{k+1}}{\lambda^\varepsilon_{i_0}} \to c \text{ et } |a^\varepsilon_{i_0} - a^\varepsilon_{k+1}| = O(\lambda^\varepsilon_{i_0}) \text{ quand } \varepsilon \to 0, \tag{4.28}$$

où c est une constante positive. D'autre part, d'après (A_k) et (B_k), on a

$$\nabla\left(\left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^{k} \omega^\varepsilon_i\right)(\lambda^\varepsilon_{i_0}\ .\ + a^\varepsilon_{i_0})\right) \to 0 \text{ dans } C^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \{S_{i_0}\}). \tag{4.29}$$

Puis, d'après (4.26) et (4.28), on a nécessairement

$$d\left(\frac{a^\varepsilon_{k+1} - a^\varepsilon_{i_0}}{\lambda^\varepsilon_{i_0}}, S_{i_0}\right) = o(1).$$

Donc il existe $j \in \{0, \ldots, k\} \setminus \{i_0\}$ tel que

$$\left|\frac{a^\varepsilon_{k+1} - a^\varepsilon_j}{\lambda^\varepsilon_{i_0}}\right| = o(1).$$

Alors, d'après (4.26) et (4.28), pour ε assez petit, on a

$$\frac{\lambda^\varepsilon_j}{\lambda^\varepsilon_{k+1}} \geq \frac{\gamma}{2},$$

et, d'après (4.28), pour ε assez petit, on a

$$\frac{\lambda_j^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon} \geq \frac{\gamma}{4c},$$

Mais, puisque $\frac{a_{i_0}^\varepsilon - a_j^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon} = O(1)$ et i_0 et j satisfont (B_k), on a

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon = o(\lambda_j^\varepsilon).$$

Donc pour tout j tel que $\frac{a_{k+1}^\varepsilon - a_j^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon} = o(1)$ on a

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon = o(\lambda_j^\varepsilon).$$

En particulier, d'après (4.12), il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in B(0, \delta)$ on ait

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon |\nabla \omega_i^\varepsilon (a_{k+1}^\varepsilon + z\lambda_{i_0}^\varepsilon)| = o(1) \text{ pour tout } i \neq i_0.$$

On voit alors facilement que

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon| = O(1) \text{ sur } B(a_{k+1}^\varepsilon, \delta\lambda_{i_0}^\varepsilon).$$

Donc, d'après la théorie elliptique standard, à une sous-suite près, on voit que

$$|\nabla (u_{i_0}^\varepsilon - \omega^{i_0})(a_{k+1}^\varepsilon)| \to 0,$$

ce qui implique

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon \left| \nabla \left(\left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right) (a_{k+1}^\varepsilon) \right) \right| \to 0,$$

ce qui, d'après (4.28), est une contradiction avec (4.26) et prouve (B_{k+1}).

Maintenant, on pose $u_{k+1}^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_{k+1}^\varepsilon \ . + a_{k+1}^\varepsilon)$. Soit $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{S_{k+1}\}$, on a

$$\begin{aligned} |\nabla u_{k+1}^\varepsilon(z)| &= \lambda_{k+1}^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon(\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon)| \\ &\leq \lambda_{k+1}^\varepsilon \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right) (\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon) \right| \\ &+ \lambda_{k+1}^\varepsilon \left| \nabla \left(\sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right) (\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon) \right|. \end{aligned} \tag{4.30}$$

D'après (4.12) et (4.26), on voit facilement que

$$\lambda_{k+1}^\varepsilon \left| \nabla \left(\sum_{i=0}^k \omega_i^\varepsilon \right) (\lambda_{k+1}^\varepsilon \ . + a_{k+1}^\varepsilon) \right| = O\left(\frac{1}{d(z, S_{k+1})} \right). \tag{4.31}$$

Puis en utilisant la définition de a_{k+1}^ε, (4.30) et (4.31) on a

$$|\nabla u_{k+1}^\varepsilon(z)| \leq \frac{\min_{0 \leq i \leq k} d_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon)}{\min_{0 \leq i \leq k} d_i^\varepsilon(\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon)} + O\left(\frac{1}{d(z, S_{k+1})} \right) = O\left(\frac{1}{d(z, S_{k+1})} \right). \tag{4.32}$$

Dès lors, $|\nabla u^\varepsilon_{k+1}|$ est borné sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \{S_{k+1}\}$. De plus, d'après l'invariance conforme de notre problème, u^ε_{k+1} satisfait toujours (4.18). Donc, d'après la théorie elliptique standard, voir [49], il existe une sous-suite de u^ε(encore notée u^ε) et $\omega^{k+1} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus S_{k+1})$ tels que

$$u^\varepsilon_{k+1} \to \omega_{k+1} \text{ dans } C^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus S_{k+1})$$

et

$$\Delta\omega_{k+1} = -2\,\omega^{k+1}_x \wedge \omega^{k+1}_y \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus S_{k+1}.$$

De plus, d'après l'invariance conforme de $\|\nabla\,.\,\|_2$, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$u^\varepsilon_{k+1} \rightharpoonup \omega^{k+1} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2)$$

et

$$\|\nabla\omega^{k+1}\|_2 \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon_{k+1}\|_2 = \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_2 < +\infty.$$

Donc, d'après le lemme 4.1.1, ω^{k+1} est solution de (4.11) sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Enfin on veut démontrer que ω^{k+1} est non-constante. C'est clair si $0 \notin S_{k+1}$, puisque dans ce cas on a $|\nabla\omega^{k+1}(0)| = 1$. Sinon pour tout i_0 tel que

$$\frac{|a^\varepsilon_{i_0} - a^\varepsilon_{k+1}|}{\lambda^\varepsilon_{k+1}} = o(1),$$

d'après (4.26) et (B_{k+1}), on voit facilement que

$$\lambda^\varepsilon_{i_0} = o(\lambda^\varepsilon_{k+1}).$$

Alors en reprenant les arguments de la preuve de (B_{k+1}) on montre que

$$\nabla u^\varepsilon_{k+1} \to \nabla\omega^{k+1} \text{ sur } B(0,\delta),$$

où $\delta > 0$. Ce qui donne $|\nabla\omega^{k+1}(0)| = 1$ et prouve que ω^{k+1} est non-constante.

Finalement $|\nabla\omega^{k+1}|$ atteint son maximum en $a_{k+1} \in \mathbb{R}^2$, alors quitte à remplacer a^ε_{k+1} par $a^\varepsilon_{k+1} + \lambda^\varepsilon_{k+1}a_{k+1}$, on a toujours la même conclusion avec un nouveau ω^{k+1} tel que $|\nabla\omega^{k+1}|$ atteigne son maximum en 0. Ce qui prouve (P_{k+1}) dans le deuxième cas. L'étude de ces deux cas cas clôt la preuve de l'affirmation 1.

Avant de montrer le théorème, on a besoin de contrôler la croissance de l'énergie d'une telle décomposition. En fait, en utilisant (B_k), on montre que les bulles n'interagissent pas au sens faible et que chacune apporte au moins l'énergie d'une sphère, c'est-à-dire 8π.

Affirmation 2 : Soit $k \in \mathbb{N}$ et

(i) $\omega^0, \ldots, \omega^k$ **des solutions non-constantes de (4.11),**

(ii) $a^\varepsilon_0, \ldots, a^\varepsilon_k$ **des suites bornées de $\mathbb{R}^2$, et**

(iii) $\lambda^\varepsilon_0, \ldots, \lambda^\varepsilon_k$, **des suites bornées de nombres positifs**

tels que, avec u^ε, ils satisfont (P_k). Alors

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_2^2 \geq \sum_{i=0}^{k} \|\nabla\omega^i\|_2^2 \geq 8\pi(k+1).$$

Preuve de l'affirmation 2 :

Soit R un nombre réel positif, alors, d'après (B_k), pour ε assez petit, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dz \geq \sum_{i=0}^{k} \int_{B(a_i^\varepsilon, R\lambda_i^\varepsilon)\setminus\Omega_i^\varepsilon(R)} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dz,$$

où $\Omega_i^\varepsilon(R) = \cup_{j\neq i} B(a_j^\varepsilon, R\lambda_j^\varepsilon)$. Donc, d'après (A_k), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dz &\geq \sum_{i=0}^{k} \int_{B(0,R)\setminus\Omega_i(R)} |\nabla \omega_i|^2 \, dz + \delta_{\varepsilon,R} \\ &\geq 8\pi(k+1) + \delta_{\varepsilon,R} \end{aligned} \tag{4.33}$$

où $\Omega_i(R) = \cup_{x\in S_i} B(x, \dfrac{1}{R})$ et $\lim\limits_{R\to+\infty} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_{\varepsilon,R} = 0$. □

Preuve du théorème :

Puisque u^ε satisfait (4.18), on voit que (P_0) est vraie et on pose $(a^\varepsilon, \lambda_0^\varepsilon) = (a_0, 1)$. Dès lors on peut commencer l'extraction. En effet, d'après les affirmations 1 et 2 et le fait que $\|\nabla u^\varepsilon\|_2$ est uniformément borné, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que (P_k) est vraie et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left(\min_{0\leq i\leq k} d_i^\varepsilon(x) \right) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^{k} \omega_i^\varepsilon \right)(x) \right| = 0, \tag{4.34}$$

où $\omega_i^\varepsilon = \omega_i \left(\frac{\cdot + a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \right)$. Ce qui prouve (A), (B) et (C). Il nous reste alors à démontrer (D). Pour cela on pose

$$R^\varepsilon = u^\varepsilon - \sum_{i=0}^{k} \omega_i^\varepsilon$$

et on suppose par l'absurde qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\nabla R^\varepsilon\|_2 \geq \delta.$$

Nous allons alors extraire une nouvelle bulle qui viendra contredire (4.34). Ici on suit la méthode développée dans [12].

Tout d'abord on introduit la fonction de concentration

$$C^\varepsilon(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \int_{B(x,t)} |\nabla R^\varepsilon|^2 dz.$$

En fait ce supremum est bien un maximum puisque R^ε est dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. De plus, chaque C^ε est continue, croissant, $C^\varepsilon(0) = 0$ et, d'après (P_k), $C^\varepsilon(1) \geq \frac{C^\varepsilon(\infty)}{2} \geq \frac{\delta}{2}$, pour ε assez petit. Dès lors on fixe ν tel que

$$0 < \nu < \min\left\{ \frac{1}{2C_0}, \frac{\delta}{2} \right\},$$

où C_0 est la meilleur constante dans l'inégalité de Wente du lemme 7.2.2. Donc il existe $a^\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda^\varepsilon > 0$ tels que

$$C^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = \int_{B(a^\varepsilon,\lambda^\varepsilon)} |\nabla R^\varepsilon|^2 dz = \nu.$$

Bien sûr, d'après (P_k), on sait que

$$\begin{cases} a^\varepsilon \to 0 \\ \lambda^\varepsilon \to 0 \end{cases} \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

On change ensuite d'échelle autour de a^ε, en posant $\tilde{f} = f(\lambda^\varepsilon\,.\,+a^\varepsilon)$, et on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{R}^\varepsilon|^2\, dz = \|\nabla R^\varepsilon\|_2^2 \leq C,$$

et

$$\|\nabla \tilde{R}^\varepsilon\|_\infty \leq C,$$

où C est une constante positive. De plus, d'après (4.18), $\tilde{R}^\varepsilon$ vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{R}^\varepsilon = &-2\, \tilde{R}^\varepsilon_x \wedge \tilde{R}^\varepsilon_y + O\left(\sum_{i=0}^{k} |\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_i| \left(\sum_{j\neq i} |\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_j| + |\nabla \tilde{R}^\varepsilon|\right)\right) \\ &+ O\left(\varepsilon^2 |\nabla \tilde{u}^\varepsilon|^2\right). \end{aligned}$$

Or, d'après (B_k), on a

$$|\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_i||\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_j| \to 0 \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$$

et, d'après (4.34), on a

$$|\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_i||\nabla \tilde{R}^\varepsilon| \to 0 \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Finalement, on obtient

$$\Delta \tilde{R}^\varepsilon = -2\, \tilde{R}^\varepsilon_x \wedge \tilde{R}^\varepsilon_y + h^\varepsilon,$$

où $h^\varepsilon \to 0$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ quand $\varepsilon \to 0$. Alors il existe $R \in H^1(\mathbb{R}^2)$ telle que, à une sous-suite près, on ait

$$\begin{aligned} &\tilde{R}^\varepsilon \to R \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^2 \\ &\text{ et} \\ &\nabla R^\varepsilon \rightharpoonup \nabla R \text{ faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

De plus R est une solution faible de (4.11).

Grâce à notre choix de ν, nous allons démontrer que la convergence faible est en fait forte. Soit $v^\varepsilon = \tilde{R}^\varepsilon - R$ qui vérifie l'équation

$$\Delta v^\varepsilon = -2\, v^\varepsilon_x \wedge v^\varepsilon_y - 2(v^\varepsilon_x \wedge R_y + R_x \wedge v^\varepsilon_y) + h^\varepsilon.$$

D'après le corollaire 7.2.1, il existe $\psi_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ une solution de

$$\Delta \psi^\varepsilon = -2(v^\varepsilon_x \wedge R_y + R_x \wedge v^\varepsilon_y),$$

qui satisfait

$$\|\nabla\psi^\varepsilon\|_2 + \|\psi^\varepsilon\|_\infty \leq \|\nabla v^\varepsilon\|_2 \|\nabla R\|_2. \tag{4.35}$$

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi^\varepsilon|^2 dz = -2\int_{\mathbb{R}^2} \langle \psi^\varepsilon, v_x^\varepsilon \wedge R_y + R_x \wedge v_y^\varepsilon\rangle dz.$$

Or, d'après (4.35), $\psi^\varepsilon \wedge R_x$ et $\psi^\varepsilon \wedge R_y$ sont bornés dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Donc, puisque ∇v^ε converge faiblement vers 0 dans L^2, il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi^\varepsilon|^2 dz \to 0.$$

Finalement on a

$$\Delta v^\varepsilon = -2\, v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon + g^\varepsilon,$$

où $g^\varepsilon \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Soit alors $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $supp(\phi)$ est contenu dans une boule de rayon 1, en utilisant le lemme 7.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\phi v^\varepsilon)|^2\, dz &= -2\int_{\mathbb{R}^2} \langle v^\varepsilon, \phi v_x^\varepsilon \wedge \phi v_y^\varepsilon\rangle\, dz + o(1),\\ &\leq 2\left(C_0 \|\nabla v^\varepsilon_{|supp(\phi)}\|_2\right) \|\nabla(\phi v^\varepsilon)\|_2^2 + o(1).\end{aligned}$$

Grâce à notre choix de λ^ε, on a $C_0\|\nabla v^\varepsilon_{|supp(\phi)}\|_2 \leq \frac{1}{2}$, et alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\phi v^\varepsilon)|^2\, dz = o(1)$$

ce qui prouve que

$$\nabla\tilde{R}^\varepsilon \to \nabla R \text{ fortement dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Finalement la convergence est bien forte car c'était déjà le cas loin de 0. De plus R est non-constante puisque $\|\nabla R\|_2 = \nu > 0$. Mais d'après (4.34), pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, il existe i tel que

$$|\nabla\tilde{R}^\varepsilon(z)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_i^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon}\right)^2 + \left|z + \frac{a^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon}\right|^2}}\right),$$

ce qui nous amène à une contradiction et prouve (D).

Finalement, pour finir la preuve du théorème il reste juste à démontrer que $max\{degP_i, deg\, Q_i\} = 1$ pour tout $0 \leq i \leq k$, avec $\omega_i = \pi_{P_i}\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$ et P_i, Q_i premiers entre eux. En fait il s'agit d'une conséquence du fait que nos surfaces sont plongées, de (A) et du lemme 4.7.1. Car s'il existait un point singulier sur ω_i alors localement la surface aurait autour de ce point une multiplicité plus grande que 1 et ne pourrait être limite de surfaces plongées comme le montre le lemme 4.7.1. Ce qui achève la preuve du théorème. □

On vient de démontrer que u^ε se comporte asymptotiquement comme une somme de sphères rondes. Or dans cette décomposition les termes de courbure ne jouent aucun rôle. Pour prouver notre théorème, il faut faire apparaître ces termes et donc être plus précis dans notre décomposition. Pour cela on fait un développement limité de la métrique dans (4.18) en utilisant 4.7.3,

$$\begin{aligned}\Delta u_j^\varepsilon = &-2\,(u_x^\varepsilon \wedge u_y^\varepsilon)_j + \varepsilon^2 \Bigg(\frac{2}{3} R_{imnj}(c_\varepsilon)(u^\varepsilon)^m (u^\varepsilon)^n (u_x^\varepsilon \wedge u_y^\varepsilon)^i \\ &+ \frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{mn}(c_\varepsilon)(u^\varepsilon)^m (u^\varepsilon)^n (u_x^\varepsilon \wedge u_y^\varepsilon)_j \\ &+ \frac{1}{3}\left(R_{nmij}(c_\varepsilon) + R_{njim}(c_\varepsilon)\right)(u^\varepsilon)^m \langle \nabla (u^\varepsilon)^i, \nabla (u^\varepsilon)^n\rangle\Bigg) \\ &+ O\left(\varepsilon^3 |\nabla u_\varepsilon|^2\right),\end{aligned} \tag{4.36}$$

où c_ε est le centre de carte.
Puisque l'on veut démontrer quelque chose sur les dérivées de la courbure, on doit éliminer les termes du premier ordre, c'est-à-dire les termes de courbure. Afin d'y parvenir nous allons préciser la forme de nos bulles. En effet les bulles ne sont plus euclidiennes dès que $\varepsilon > 0$, la courbure les déforme en ellipsoïdes. Pour chaque i nous allons chercher une perturbation de ω^i telle que si l'on regarde (4.36) autour de a_i^ε les termes de courbure disparaissent. Enfin une dernière chose à laquelle il faut faire attention est que les ω^i ne sont *a priori* pas centré en 0, ce qui n'est pas très pratique lorsque l'on veut comparer $\omega_x^i \wedge \omega_y^i$ et ω^i. Alors parfois nous considérerons $\hat{\omega}^i = \omega^i - p^i$ où p^i est le centre de masse de ω^i.

Donc on cherche ρ_i^ε tel que $\overline{\omega}_i^\varepsilon = \hat{\omega}^i + p_i^\varepsilon + \rho_i^\varepsilon$ résolve (4.36) au premier ordre, ici p_i^ε est un vecteur constant que l'on fixera plus tard. C'est-à-dire on cherche à résoudre

$$\begin{aligned}\Delta \overline{\omega}_i^\varepsilon = &-2(\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x \wedge (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y \\ &+ \varepsilon^2 \Bigg(\frac{2}{3} R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\overline{\omega}_i^\varepsilon)^m (\overline{\omega}_i^\varepsilon)^n ((\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x \wedge (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y)^k \\ &+ \frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{mn}(p_\varepsilon)(\overline{\omega}_i^\varepsilon)^m (\overline{\omega}_i^\varepsilon)^n ((\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x \wedge (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y)_l \\ &+ \frac{1}{3}\left(R_{mnkl}(p_\varepsilon) + R_{mlkn}(p_\varepsilon)\right)(\overline{\omega}_i^\varepsilon)^n \langle \nabla (\overline{\omega}_i^\varepsilon)^k, \nabla (\overline{\omega}_i^\varepsilon)^m\rangle\Bigg) \\ &+ O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{4.37}$$

avec les relations quasi-conformes

$$\begin{aligned}&\langle (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x, (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y\rangle + \frac{1}{3} R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\overline{\omega}_i^\varepsilon)^m (\overline{\omega}_i^\varepsilon)^n (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x^k (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y^l = O(\varepsilon^3), \\ &\langle (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x, (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x\rangle + \frac{1}{6} R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\overline{\omega}_i^\varepsilon)^m (\overline{\omega}_i^\varepsilon)^n (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x^k (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_x^l \\ &- \langle (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y, (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y\rangle - \frac{1}{6} R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\overline{\omega}_i^\varepsilon)^m (\overline{\omega}_i^\varepsilon)^n (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y^k (\overline{\omega}_i^\varepsilon)_y^l = O(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{4.38}$$

On cherche alors ρ_i^ε de la forme $\varepsilon^2 \rho_i^\varepsilon$. D'après le développement limité de la métrique et le fait que, d'après (4.10),

$$\langle \nabla \hat{\omega}_i^k, \nabla \hat{\omega}_i^m\rangle = (\delta_{km} - \hat{\omega}_i^k \hat{\omega}_i^m)\frac{|\nabla \hat{\omega}_i|^2}{2},$$

ρ_i^ε doit résoudre les équations

$$\begin{aligned}
&\Delta\rho_i^\varepsilon + 2((\rho_i^\varepsilon)_x \wedge \hat\omega_y^i + \hat\omega_x^i \wedge (\rho_i^\varepsilon)_y) = \\
&\Bigg(-\frac{2}{3}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^m(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^n(\hat\omega_i)^k \\
&-\frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{mn}(p_\varepsilon)(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^m(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^n(\hat\omega_i)_l \\
&+\left(\frac{1}{3}R_{mnkl}(p_\varepsilon) + R_{mlkn}(p_\varepsilon)\right)(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^n(\delta_{km} - \hat\omega_i^k\hat\omega_i^m)\Bigg)\frac{|\nabla\hat\omega_i|^2}{2}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle(\rho_i^\varepsilon)_x, \hat\omega_y^i\rangle + \langle\hat\omega_x^i, (\rho_i^\varepsilon)_y\rangle &= -\frac{1}{3}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^m(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^n(\hat\omega_x^i)^k(\hat\omega_y^i)^l, \\
\langle(\rho_i^\varepsilon)_x, \hat\omega_x^i\rangle - \langle\hat\omega_y^i, (\rho_i^\varepsilon)_y\rangle &= \frac{1}{6}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^m(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^n(\hat\omega_y^i)^k(\hat\omega_y^i)^l \\
&\quad - \frac{1}{6}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^m(\hat\omega_i + p_i^\varepsilon)^n(\hat\omega_x^i)^k(\hat\omega_x^i)^l.
\end{aligned}$$

Comme pour l'équation linéarisé, voir proposition 7.1.2, on décompose $\nabla\rho_i^\varepsilon$ sur la base orthogonale $\hat\omega_x^i, \hat\omega_y^i, \hat\omega_x^i \wedge \hat\omega_y^i$, afin de trouver une solution. Par un calcul direct, on vérifie que

$$\begin{aligned}
\rho_i^\varepsilon = &\frac{1}{6}\left(\mathrm{Ric}_{kl}(p_\varepsilon)(\hat\omega^i)^l - \frac{3}{2}Scal(p^\varepsilon)(\hat\omega^i)^k\right) - \frac{1}{6}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(p_i^\varepsilon)^m(p_i^\varepsilon)^n(\hat\omega^i)^l \\
&- \frac{1}{3}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(p_i^\varepsilon)^m(\hat\omega^i)^n(\hat\omega^i)^k - \frac{1}{12}\mathrm{Ric}_{kl}(p_\varepsilon)(\hat\omega^i)^k(\hat\omega^i)^l\hat\omega^i
\end{aligned} \tag{4.40}$$

est bien une solution. Ici on a utilisé le fait qu'en dimension 3,

$$\begin{aligned}
R_{kmnl} = &(g_{kn}\mathrm{Ric}_{ml} - g_{kl}\mathrm{Ric}_{mn} + g_{ml}\mathrm{Ric}_{kn} - g_{mn}\mathrm{Ric}_{kl}) \\
&+ \frac{\mathrm{Scal}}{2}(g_{kl}g_{mn} - g_{kn}g_{ml}).
\end{aligned}$$

Finalement on pose

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_i^\varepsilon = \hat\omega^i + p_i^\varepsilon + \varepsilon^2\rho_i^\varepsilon \\
&\text{et} \\
&B_i^\varepsilon(z) = \overline{\omega}_i^\varepsilon\left(\frac{z - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}\right).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Enfin, nous allons faire un dernier ajustement sur les bulles, de manière à ce qu'elles soient « tangentes » à Σ_ε en ses points extrémaux.

Soit $i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} = 0 \text{ pour un } j \neq i. \tag{4.42}$$

On fixe alors $b_i^\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases}
b_i^\varepsilon \in B(a_i^\varepsilon, \lambda_i^\varepsilon) \\
\text{et} \\
d\left(\frac{b_i^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}, S_i\right) \geq d > 0,
\end{cases}$$

et $p_i^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$p_i^\varepsilon + \hat{\omega}^i(b_i^\varepsilon) = u^\varepsilon(b_i^\varepsilon).$$

Sinon, pour $i \in \{0, \dots, p\}$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} \neq 0 \text{ pour tout } j \neq i, \tag{4.43}$$

d'après le théorème 4.3.1, il existe $\delta_0 > 0$ tel que,

$$\nabla \tilde{u}^\varepsilon \to \nabla \omega^i \text{ dans } C^2(B(0, \delta_0)), \tag{4.44}$$

où $\tilde{u}^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_i^\varepsilon \,.\, + a_i^\varepsilon)$. En fait la convergence devrait avoir lieu dans $B(0, \delta_0) \setminus \{S_i\}$. Mais, d'après (4.43) et (B), soit $\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \neq 0$ soit $\lambda_i^\varepsilon = o(\lambda_j^\varepsilon)$. Donc, dans tous les cas, on a

$$|\nabla \tilde{B}_j^\varepsilon| \to 0 \text{ dans } C^1(B(0, \delta_0)), \text{ pour tout } j \neq i \text{ et } \delta_0 \text{ assez petit},$$

ce qui prouve la validité de (4.44).

Puis, d'après (4.44) et le fait que $|\nabla \omega^i|$ atteigne son maximum en 0, pour ε assez petit, il existe $\tilde{a}_i^\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$|\tilde{a}_i^\varepsilon - a_i^\varepsilon| = o(\lambda_i^\varepsilon) \text{ et } |\nabla u^\varepsilon| \text{ atteigne son maximum en } \tilde{a}_i^\varepsilon. \tag{4.45}$$

Toujours d'après (4.44), il existe $R_i^\varepsilon \in SO(3)$, $\theta_i^\varepsilon \in [0, 2\pi]$ et $\tilde{\lambda}_i^\varepsilon \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
&\tilde{\lambda}_i^\varepsilon \sim \lambda_i^\varepsilon,\ R_i^\varepsilon \to Id, \\
&\tilde{u}_x^\varepsilon(0) = R_i^\varepsilon(\omega_x^i(0)) \\
&\text{ et} \\
&\mathrm{Vect}\left(\tilde{u}_x^\varepsilon(0), \tilde{u}_y^\varepsilon(0)\right) = \mathrm{Vect}\left(R_i^\varepsilon(\omega_x^i(0)), R_i^\varepsilon(\omega_y^i(0))\right),
\end{aligned} \tag{4.46}$$

où $\tilde{u}^\varepsilon = u^\varepsilon(e^{i\theta_i^\varepsilon} \tilde{\lambda}_i^\varepsilon \,.\, + \tilde{a}_i^\varepsilon)$. Alors on pose $p_i^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega}_i^\varepsilon = R_i^\varepsilon \hat{\omega}^i, \\
&p_i^\varepsilon = u^\varepsilon(\tilde{a}_i^\varepsilon) - \hat{\omega}_i^\varepsilon(0) \\
&\overline{\omega}_i^\varepsilon = \hat{\omega}_i^\varepsilon + p_i^\varepsilon + \varepsilon^2 \rho_i^\varepsilon, \\
&\text{et} \\
&B_i^\varepsilon(z) = \overline{\omega}_i^\varepsilon \left(\frac{z - \tilde{a}_i^\varepsilon}{e^{i\theta_i^\varepsilon} \tilde{\lambda}_i^\varepsilon} \right),
\end{aligned}$$

où ρ_i^ε est associé à $\hat{\omega}_\varepsilon^i$ et p_i^ε par (4.40).

De plus, d'après (4.44), il existe $c_i^\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$|c_i^\varepsilon| = o(1) \text{ et } |\nabla \overline{\omega}_i^\varepsilon| \text{ atteigne son maximum en } c_i^\varepsilon. \tag{4.47}$$

D'autre part en utilisant le fait que $|\nabla\hat{\omega}_i^\varepsilon|$ atteigne son maximum en 0 et le fait que $|\nabla(\hat{\omega}_i^\varepsilon - \overline{\omega}_i^\varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$ dans un voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
&|c_i^\varepsilon| = O(\varepsilon)\\
&\text{ et}\\
&|\nabla\tilde{u}^\varepsilon(0) - \nabla\overline{\omega}_i^\varepsilon(c_i^\varepsilon)| = O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

où $\tilde{u}^\varepsilon = u^\varepsilon(e^{i\theta_i^\varepsilon}\tilde{\lambda}_i^\varepsilon\,.\,+\tilde{a}_i^\varepsilon)$. Ce qui implique qu'il existe $\hat{R}_i^\varepsilon \in SO(3)$ $\hat{\theta}_i^\varepsilon \in [0, 2\pi]$ et $\hat{\lambda}_i^\varepsilon \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\hat{\lambda}_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} - 1\right| = O(\varepsilon),\ |\hat{R}_i^\varepsilon - Id| = O(\varepsilon),\\
&u_x^\varepsilon(\tilde{a}_i^\varepsilon) = \hat{R}_i^\varepsilon((\hat{B}_i^\varepsilon)_x(\tilde{a}_i^\varepsilon))\\
&\text{ et}\\
&\mathrm{Vect}\left(u_x^\varepsilon(\tilde{a}_i^\varepsilon), u_y^\varepsilon(\tilde{a}_i^\varepsilon)\right) = \mathrm{Vect}\left(\hat{R}_i^\varepsilon((\hat{B}_i^\varepsilon)_x(\tilde{a}_i^\varepsilon)), \hat{R}_i^\varepsilon((\hat{B}_i^\varepsilon)_y(\tilde{a}_i^\varepsilon))\right),
\end{aligned} \tag{4.48}$$

où $\hat{B}_i^\varepsilon = \overline{\omega}_i^\varepsilon\left(\frac{z-\tilde{a}_i^\varepsilon}{e^{i\hat{\theta}_i^\varepsilon}\hat{\lambda}_i^\varepsilon} + c_i^\varepsilon\right)$. Alors on remplace a_ε^i par $\tilde{a}_i^\varepsilon$, λ_i^ε par $e^{i\theta_i^\varepsilon}\hat{\lambda}_i^\varepsilon$ et B_i^ε par $\hat{R}_i^\varepsilon\hat{B}_i^\varepsilon$. D'après (4.45), (4.46) et (4.48) la conclusion du théorème 4.3.1 reste valide grâce à notre nouveau choix de λ_i^ε et a_i^ε. De plus, d'après (4.38), (4.3), (4.48) et le fait que l'on ait ajusté les plans tangents, pour tout i qui vérifie (4.43), on a

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{u}^\varepsilon - \tilde{B}_i^\varepsilon\right)(0) = O\left(\varepsilon\right),\\
&\left|\nabla\left(\tilde{u}_i^\varepsilon - \tilde{B}_i^\varepsilon\right)(0)\right|^2 = O\left(\varepsilon^3\right),\\
&\text{et}\\
&\left|\nabla^2\left(\tilde{u}_i^\varepsilon - \tilde{B}_i^\varepsilon\right)\left(\nabla\tilde{B}_i^\varepsilon\right)(0)\right|^2 = O\left(\varepsilon^3\right),
\end{aligned} \tag{4.49}$$

où $\tilde{f}_i^\varepsilon = f(\lambda_i^\varepsilon\,.\,+a_i^\varepsilon)$. Enfin, on donne les équations satisfaites par nos bulles modifiées,

$$\begin{aligned}
\Delta B_i^\varepsilon = &-2(B_i^\varepsilon)_x \wedge (B_i^\varepsilon)_y + \varepsilon^2\left(\frac{2}{3}R_{imnj}(p_\varepsilon)(B_i^\varepsilon)^m(B_i^\varepsilon)^n((B_i^\varepsilon)_x \wedge (B_i^\varepsilon)_y)^i\right.\\
&+\frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{mn}(p_\varepsilon)(B_i^\varepsilon)^m(B_i^\varepsilon)^n((B_i^\varepsilon)_x \wedge (B_i^\varepsilon)_y)_j\\
&\left.+\frac{1}{3}\left(R_{mnij}(p_\varepsilon) + R_{mjin}(p_\varepsilon)\right)(B_i^\varepsilon)^n\langle\nabla(B_i^\varepsilon)^i, \nabla(B_i^\varepsilon)^m\rangle\right)\\
&+O(\varepsilon^3|\nabla B_i^\varepsilon|^2)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

et les relations quasi-conformes

$$\begin{aligned}
&\langle(B_i^\varepsilon)_x, (B_i^\varepsilon)_y\rangle = -\frac{1}{3}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(B_i^\varepsilon)^m(B_i^\varepsilon)^n(B_i^\varepsilon)_x^k(B_i^\varepsilon)_y^l + O(\varepsilon^3|\nabla B_i^\varepsilon|^2),\\
&\langle(B_i^\varepsilon)_y, (B_i^\varepsilon)_y\rangle - \langle(B_i^\varepsilon)_x, (B_i^\varepsilon)_x\rangle = \frac{1}{6}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(B_i^\varepsilon)^m(B_i^\varepsilon)^n(B_i^\varepsilon)_y^k(B_i^\varepsilon)_y^l\\
&-\frac{1}{6}R_{kmnl}(p_\varepsilon)(B_i^\varepsilon)^m(B_i^\varepsilon)^n(B_i^\varepsilon)_x^k(B_i^\varepsilon)_x^l + O(\varepsilon^3|\nabla B_i^\varepsilon|^2).
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Conclusion de la section :

Finalement, soit u^ε une suite de solutions C^2 de (4.18). Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et

(i) $\omega^0, \dots, \omega^p$ des solutions simples de (4.11) telles que $|\nabla \omega^i|$ atteigne son maximum en 0,

(ii) $a_0^\varepsilon, \dots, a_p^\varepsilon$ des suites bornées de $\mathbb{R}^2$ telles que $\lim_{\varepsilon \to 0} a_i^\varepsilon = 0$ pour tout $1 \le i \le p$, et

(iii) $\lambda_0^\varepsilon, \dots, \lambda_p^\varepsilon$ des suites bornées de nombres complexes telles que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_i^\varepsilon = 0$ pour tout $1 \le i \le p$,

(iv) $R_0^\varepsilon, \dots, R_{2p+1}^\varepsilon$ des suites de $SO(3)$ telles que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} R_i^\varepsilon = Id$ pour tout $0 \le i \le 2p+1$,

(v) $p_0^\varepsilon, \dots, p_p^\varepsilon$ des suites de points de $\mathbb{R}^3$ telles que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} p_i^\varepsilon = p_i$ pour tout $0 \le i \le p$, où p_i est le centre de masse de ω^i,

tels que, pour une sous-suite de u_ε(toujours notée u^ε) on ait

$$u_i^\varepsilon \to \omega^i \text{ dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus S_i) \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ pour tout } 0 \le i \le p,$$

où $u_i^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_i^\varepsilon\ . + a_i^\varepsilon)$ et $S_i = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ \dfrac{a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \text{ t.q. } j \in \{0, \dots, p\} \setminus \{i\} \right\}$.

$$\frac{d_i^\varepsilon(a_j^\varepsilon)}{\lambda_j^\varepsilon} + \frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} \to +\infty \text{ pour tout } i \neq j, \tag{4.52}$$

où $d_i^\varepsilon(x) = \sqrt{(\lambda_i^\varepsilon)^2 + |a_i^\varepsilon - x|^2}$.

De plus,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} (\min_{0 \le i \le p} d_i^\varepsilon(x)) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^p B_i^\varepsilon \right)(x) \right| = 0 \tag{4.53}$$

et

$$\left\| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^p B_i^\varepsilon \right) \right\|_2 \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

où

$$\begin{aligned} &\hat{\omega}^i = \omega^i - p_i, \\ &\hat{\omega}_i^\varepsilon = R_i^\varepsilon \hat{\omega}^i, \\ &\overline{\omega}_i^\varepsilon = \hat{\omega}_i^\varepsilon + p_i^\varepsilon + \varepsilon^2 \rho_i^\varepsilon, \\ &\text{ et} \\ &B_i^\varepsilon(z) = R_{p+1+i}^\varepsilon \overline{\omega}_i^\varepsilon \left(\frac{z - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

où ρ_i^ε est associé à $\hat{\omega}_\varepsilon^i$ et p_i^ε via (4.40).

De plus, pour tout i, il existe $b_i^\varepsilon \in R^2$ tel que

$$\begin{aligned} &b_i^\varepsilon \in B(a_i^\varepsilon, \lambda_i^\varepsilon) \\ &d\left(\frac{b_i^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}, S_i \right) \ge d > 0, \\ &\text{ et} \\ &|u^\varepsilon(b_i^\varepsilon) - B_i^\varepsilon(b_i^\varepsilon)| = O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.54}$$

et pour tout i tel que $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} \neq 0$ pour tout $j \neq i$, on a

$$\begin{aligned} \left|\nabla\left(\tilde{u}^\varepsilon - \tilde{B}_i^\varepsilon\right)(0)\right|^2 &= O\left(\varepsilon^3\right), \\ \left|\nabla^2\left(\tilde{u}^\varepsilon - \tilde{B}_i^\varepsilon\right)(\tilde{B}_i^\varepsilon)(0)\right|^2 &= O\left(\varepsilon^3\right). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Finalement, quitte à réordonner, on supposera que

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_\infty = \frac{1}{\lambda_p^\varepsilon}.$$

4.4 Estimée forte

Soit B_i^ε défini comme dans la précédente section et $R^\varepsilon = u^\varepsilon - \sum_{i=0}^p B_i^\varepsilon$ le reste. L'objectif de cette section est de prouver une estimée sur le gradient du reste, $r^\varepsilon = \|\nabla R^\varepsilon\|_\infty$. D'après la section précédente, R^ε vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \Delta R^\varepsilon = &-2\left(\sum_{i\neq j}(B_i^\varepsilon)_x \wedge (B_j^\varepsilon)_y + \sum_{i=0}^p (B_i^\varepsilon)_x \wedge R_y^\varepsilon + R_x^\varepsilon \wedge (B_i^\varepsilon)_y\right) \\ &- 2\, R_x^\varepsilon \wedge R_y^\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^p |u^\varepsilon - B_i^\varepsilon||\nabla B_i^\varepsilon|^2\right)\right) \\ &+ O\left(\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^p |\nabla B_i^\varepsilon|\left(\sum_{j\neq i}|\nabla B_j^\varepsilon| + |\nabla R^\varepsilon|\right) + |\nabla R^\varepsilon|^2\right)\right) \\ &+ O\left(\varepsilon^3|\nabla u^\varepsilon|^2\right), \end{aligned} \tag{4.56}$$

et les relations quasi-conformes

$$\begin{aligned} &\sum_{i\neq j}\langle (B_i^\varepsilon)_x, (B_j^\varepsilon)_y\rangle + \langle R_x^\varepsilon, R_y^\varepsilon\rangle + \sum_{i=0}^p \langle (B_i^\varepsilon)_x, R_y^\varepsilon\rangle + \langle R_x^\varepsilon, (B_i^\varepsilon)_y\rangle \\ &= O\left(\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^p |u^\varepsilon - B_i^\varepsilon||\nabla B_i^\varepsilon|^2\right)\right) + O\left(\varepsilon^3|\nabla u^\varepsilon|^2\right) \\ &+ O\left(\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^p |\nabla B_i^\varepsilon|\left(\sum_{j\neq i}|\nabla B_j^\varepsilon| + |\nabla R^\varepsilon|\right) + |\nabla R^\varepsilon|^2\right)\right), \\ &\sum_{i\neq j}\langle (B_i^\varepsilon)_x, (B_j^\varepsilon)_x\rangle - \langle (B_i^\varepsilon)_y, (B_j^\varepsilon)_y\rangle + 2\sum_{i=0}^p \langle (B_i^\varepsilon)_x, R_x^\varepsilon\rangle - \langle (B_i^\varepsilon)_y, R_y^\varepsilon\rangle \\ &+ \langle R_x^\varepsilon, R_x^\varepsilon\rangle - \langle R_y^\varepsilon, R_y^\varepsilon\rangle = O\left(\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^p |u^\varepsilon - B_i^\varepsilon||\nabla B_i^\varepsilon|^2\right)\right) + O\left(\varepsilon^3|\nabla u^\varepsilon|^2\right) \\ &+ O\left(\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^p |\nabla B_i^\varepsilon|\left(\sum_{j\neq i}|\nabla B_j^\varepsilon| + |\nabla R^\varepsilon|\right) + |\nabla R^\varepsilon|^2\right)\right) \end{aligned} \tag{4.57}$$

Notre but est de montrer que le reste est contrôlé par $\varepsilon^3\|\nabla u^\varepsilon\|_\infty = \frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon}$. En effet, si le contraire se produisait alors les derniers termes de (4.56) et de (4.57) seraient négligeables devant ∇R^ε et en passant à la limite on obtiendrait une solution de l'équation linéarisée qui n'admet que des constantes pour solution pour un bon choix des données au point 0, voir proposition 7.1.2. Ce qui aboutirait à une contradiction puisque notre solution devrait avoir son gradient non nul. Bien sûr ceci n'est qu'une idée de la preuve, dont les précisions sont apportées ci-dessous.

En fait, en plus du terme de reste, il va aussi falloir contrôler les termes croisés tels que $\sum_{j\neq i} |\nabla B_i^\varepsilon||\nabla B_j^\varepsilon|$. Pour cela, on définit, pour $i \neq j$,

$$t_{ij}^\varepsilon = \frac{\lambda_j^\varepsilon}{(d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon))^2 + (d_i^\varepsilon(a_j^\varepsilon))^2}$$

qui est la trace de ∇B_j^ε autour de a_i^ε. En effet, d'après (4.12), on vérifie facilement que sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \{S_i\}$, on a

$$\left|\nabla B_j^\varepsilon\left(\lambda_i^\varepsilon\,.+a_i^\varepsilon\right)\right| \sim c\, t_{ij}^\varepsilon,$$

où c est une constante positive. Puis on définit aussi le maximum de ces interactions

$$t^\varepsilon = \max_{i\neq j}(t_{ij}^\varepsilon).$$

L'idée centrale pour démontrer une telle estimée sur R^ε est d'appliquer une identité de Green à (4.56), ce qui est possible d'après le lemme 4.7.2. Pour $z^\varepsilon \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G(.,z^\varepsilon)\Delta R^\varepsilon\, dz \tag{4.58}$$

où $G(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi} Ln\left(|z_1 - z_2|\right)$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| &\leq I_i^\varepsilon(z^\varepsilon) + I_{ij}^\varepsilon(z^\varepsilon) + |\nabla\phi^\varepsilon(z^\varepsilon)| \\ &+ O\left(\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^p (J_i^\varepsilon(z^\varepsilon) + I_i^\varepsilon(z^\varepsilon)) + \sum_{0\leq i<j\leq p} I_{ij}^\varepsilon(z^\varepsilon)\right)\right) + O\left(I^\varepsilon(z^\varepsilon)\right) \\ &+ O\left(J^\varepsilon(z^\varepsilon)\right)\end{aligned} \tag{4.59}$$

où

$$\begin{aligned}
I_i^\varepsilon(z^\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,,z^\varepsilon)||\nabla B_i^\varepsilon||\nabla R^\varepsilon|\, dz, \\
I_{ij}^\varepsilon(z^\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,,z^\varepsilon)||\nabla B_i^\varepsilon||\nabla B_j^\varepsilon|\, dz, \\
J_i^\varepsilon(z^\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,,z^\varepsilon)||u^\varepsilon - B_i^\varepsilon||\nabla B_i^\varepsilon|^2\, dz, \\
J^\varepsilon(z^\varepsilon) &= \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,,z^\varepsilon)||\nabla u^\varepsilon|^2\, dz, \\
I^\varepsilon(z^\varepsilon) &= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,,z^\varepsilon)||\nabla R^\varepsilon|^2\, dz,
\end{aligned}$$

et $\phi^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ est une solution de

$$\Delta\phi^\varepsilon = -2\, R^\varepsilon_x \wedge R^\varepsilon_y.$$

Tout d'abord en utilisant le lemme 7.2.1 et (D), on observe que

$$|\nabla\phi^\varepsilon(z^\varepsilon)| = O\left(\|\nabla R^\varepsilon\|_2 \|\nabla R^\varepsilon\|_\infty\right) = o(r^\varepsilon). \tag{4.60}$$

Puis estimons $I^\varepsilon_i(z^\varepsilon)$.

Soit $R > 0$, on pose $r^\varepsilon_{i,R} = \sup\limits_{\Omega^\varepsilon_{i,R}} |\nabla R^\varepsilon|$ où $\Omega^\varepsilon_{i,R} = B(a^\varepsilon_i, \lambda^\varepsilon_i R) \setminus \left\{\cup_{j\neq i} B\left(a^\varepsilon_j, \dfrac{\lambda^\varepsilon_i}{R}\right)\right\}$. Pour ε assez petit, on a

$$\begin{aligned} I^\varepsilon_i(z^\varepsilon) \leq\ & r^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Omega^\varepsilon_{i,R}} |\nabla G(\,.\,, z^\varepsilon)||\nabla B^\varepsilon_i|\, dz \\ & + r^\varepsilon_{i,R} \int_{\Omega^\varepsilon_{i,R}} |\nabla G(\,.\,, z^\varepsilon)||\nabla B^\varepsilon_i|\, dz. \end{aligned}$$

Un simple changement de variables donne

$$\int_\Omega |\nabla G(\,.\,, z^\varepsilon)||\nabla B^\varepsilon_i| dz = O\left(\int_{\frac{\Omega - a^\varepsilon_i}{\lambda^\varepsilon_i}} \left|\nabla G\left(\,.\,, \frac{z^\varepsilon - a^\varepsilon_i}{\lambda^\varepsilon_i}\right)\right| \frac{1}{1+|z|^2}\, dz\right),$$

où Ω est n'importe quel sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$. Il y a ensuite deux cas à considérer. Soit $\frac{z^\varepsilon - a^\varepsilon_i}{\lambda^\varepsilon_i} \to +\infty$ et dans ce cas, d'après le lemme 4.7.3, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,, z^\varepsilon)||\nabla B^\varepsilon_i| dz = O\left(\frac{Ln\left(2 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}\right)}{1 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}}\right).$$

Soit $\frac{z^\varepsilon - a^\varepsilon_i}{\lambda^\varepsilon_i} \to z_0$ et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Omega^\varepsilon_{i,R}} |\nabla G(\,.\,, z^\varepsilon)||\nabla B^\varepsilon_i| dz = O\left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus\Omega_{i,R}} |\nabla G(\,.\,, z_0)| \frac{1}{1+|z|^2} dz\right)$$

où $\Omega_{i,R} = B(0,R) \setminus \left\{\cup_{z\in S_i} B(z, \frac{1}{R})\right\}$. Finalement, dans ces deux cas, on a

$$I^\varepsilon_i(z) = O\left(r^\varepsilon_{i,R} \frac{Ln\left(2 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}\right)}{1 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}}\right) + \delta_{R,\varepsilon} r^\varepsilon \tag{4.61}$$

où $\lim\limits_{R\to+\infty} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_{R,\varepsilon} = 0$.

Puis on estime I^ε_{ij}. Là encore il y a deux cas à considérer. Tout d'abord on suppose que $\max(\lambda^\varepsilon_i, \lambda^\varepsilon_j) = o(|a^\varepsilon_i - a^\varepsilon_j|)$. On coupe alors l'intégrale en deux comme suit

$$I_{ij}^{\varepsilon} = \int_{D_{ij}^{+}} |\nabla G(\,.\,, z^{\varepsilon})||\nabla B_i^{\varepsilon}||\nabla B_j^{\varepsilon}|\, dz$$
$$+ \int_{D_{ij}^{-}} |\nabla G(\,.\,, z^{\varepsilon})||\nabla B_i^{\varepsilon}||\nabla B_j^{\varepsilon}|\, dz,$$

où $D_{ij}^{+} = \{z \text{ t.q. } \langle z - m_{ij}, z_j - z_i\rangle \geq 0\}$ et $D_{ij}^{-} = \{z \text{ t.q. } \langle z - m_{ij}, z_j - z_i\rangle \leq 0\}$ et $m_{ij} = \frac{z_i^{\varepsilon}+z_j^{\varepsilon}}{2}$. Nous allons estimer la première intégrale, il en sera de même pour la seconde. On voit facilement que

$$\int_{D_{ij}^{+}} |\nabla G(\,.\,, z^{\varepsilon})||\nabla B_i^{\varepsilon}||\nabla B_j^{\varepsilon}| dz \leq t_{ji}^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,, z^{\varepsilon})||\nabla B_j^{\varepsilon}| dz,$$

puis en utilisant le lemme 4.7.3, on a

$$\int_{D_{ij}^{+}} |\nabla G(\,.\,, z^{\varepsilon})||\nabla B_i^{\varepsilon}||\nabla B_j^{\varepsilon}|\, dz = O\left(t_{ji}^{\varepsilon} \frac{Ln\left(2 + \frac{|a_j^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}|}{\lambda_j^{\varepsilon}}\right)}{1 + \frac{|a_j^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}|}{\lambda_j^{\varepsilon}}} \right).$$

Puis on examine le second cas, c'est-à-dire que, quitte à échanger i et j, $|a_i^{\varepsilon} - a_j^{\varepsilon}| = O(\lambda_j^{\varepsilon})$ et $\lambda_i^{\varepsilon} = o(\lambda_j^{\varepsilon})$. Dans ce cas on vérifie facilement que

$$|\nabla B_j^{\varepsilon}(z)| \leq c\, t_{ij}^{\varepsilon} \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

où c est une constante positive. Donc on obtient

$$I_{ij}^{\varepsilon} \leq O\left(t_{ij}^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(\,.\,, z^{\varepsilon})||\nabla B_i^{\varepsilon}|\, dz \right).$$

et en utilisant le lemme 4.7.3, on montre que dans tous les cas, on a

$$I_{ij}^{\varepsilon} = O\left(t_{ij}^{\varepsilon} \frac{Ln\left(2 + \frac{|a_i^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}|}{\lambda_i^{\varepsilon}}\right)}{1 + \frac{|a_i^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}|}{\lambda_i^{\varepsilon}}} \right) + O\left(t_{ji}^{\varepsilon} \frac{Ln\left(2 + \frac{|a_j^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}|}{\lambda_j^{\varepsilon}}\right)}{1 + \frac{|a_j^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}|}{\lambda_j^{\varepsilon}}} \right). \tag{4.62}$$

Enfin, on estime $J_i^{\varepsilon}(z^{\varepsilon})$. Tout d'abord, on remarque que, d'après (4.54), il existe $b_i^{\varepsilon} \in B(a_i^{\varepsilon}, \lambda_i^{\varepsilon})$ de sorte que

$$|(u^{\varepsilon} - B_i^{\varepsilon})(z)| \leq \sum_{j \neq i} |B_j^{\varepsilon}(z) - B_j^{\varepsilon}(b_i^{\varepsilon})| + |R^{\varepsilon}(z) - R^{\varepsilon}(b_i^{\varepsilon})| + O(\varepsilon). \tag{4.63}$$

Mais on voit facilement que

$$\begin{aligned} |B_j^{\varepsilon}(z) - B_j^{\varepsilon}(b_i^{\varepsilon})| &\leq \int_{[b_i^{\varepsilon}, z]} |\nabla B_j^{\varepsilon}| dt \\ &= O\left(\int_0^{|z - b_i^{\varepsilon}|} \frac{\lambda_j^{\varepsilon}}{(\lambda_j^{\varepsilon})^2 + |a_i^{\varepsilon} - a_j^{\varepsilon} + t\tilde{b}_i^{\varepsilon}|} dt \right), \end{aligned} \tag{4.64}$$

où $\tilde{b}_i^{\varepsilon} = \dfrac{z - b_i^{\varepsilon}}{|z - b_i^{\varepsilon}|}$.

Donc on a

$$|B_j^\varepsilon(z) - B_j^\varepsilon(b_i^\varepsilon)| \leq t_{ij}^\varepsilon(|z - a_i^\varepsilon| + \lambda_i^\varepsilon) \tag{4.65}$$

De plus on a clairement

$$|R^\varepsilon(z) - R^\varepsilon(b_i^\varepsilon)| \leq r^\varepsilon(|z - a_i^\varepsilon| + \lambda_i^\varepsilon),$$

ce qui donne, avec (4.63) et (4.65),

$$|(u^\varepsilon - B_i^\varepsilon)(z)||\nabla B_i^\varepsilon| = O\left(\sum_{j\neq i} t_{ij}^\varepsilon + r^\varepsilon\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}\right), \tag{4.66}$$

et alors

$$\begin{aligned} J_i^\varepsilon(z^\varepsilon) &= O\left(\sum_{j\neq i} t_{ij}^\varepsilon + r^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(., z^\varepsilon)||\nabla B_i^\varepsilon|\, dz \\ &= O\left(\sum_{j\neq i} t_{ij}^\varepsilon + r^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}\right) \frac{Ln\left(2 + \frac{|a_i^\varepsilon - z^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}\right)}{1 + \frac{|a_i^\varepsilon - z^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Puis on peut contrôler J^ε à l'aide des estimées sur les termes précédents et I^ε. En effet

$$J^\varepsilon(z^\varepsilon) = O\left(\sum_{i=0}^p \frac{\varepsilon^3}{\lambda_i^\varepsilon} \frac{Ln\left(2 + \frac{|a_i^\varepsilon - z^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}\right)}{1 + \frac{|a_i^\varepsilon - z^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}}\right) + \varepsilon^3 \sum_{i=0}^p I_i^\varepsilon(z^\varepsilon) + I^\varepsilon(z^\varepsilon). \tag{4.68}$$

Reste donc à estimer $I^\varepsilon(z^\varepsilon)$. Pour cela on utilise l'estimé faible sur ∇R^ε, voir (4.53), pour écrire

$$I^\varepsilon(z^\varepsilon) = \varepsilon^2 (r^\varepsilon)^{\frac{1}{3}} \sum_{i=0}^p o\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|z - z^\varepsilon|} \frac{1}{(\lambda_i^\varepsilon + |z - a_i^\varepsilon|)^{\frac{5}{3}}}\, dz\right).$$

Puis on pose $y_i^\varepsilon = a_i^\varepsilon - z^\varepsilon$, ce qui donne

$$I^\varepsilon(z^\varepsilon) = \varepsilon^2 (r^\varepsilon)^{\frac{1}{3}} \sum_{i=0}^p o\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|z - y_i^\varepsilon|} \frac{1}{(\lambda_i^\varepsilon + |z|)^{\frac{5}{3}}}\, dz\right).$$

On effectue alors le changement de variable $z = \mu_i^\varepsilon u$ où $\mu_i^\varepsilon = \lambda_i^\varepsilon + |y_i^\varepsilon|$, ce qui donne

$$I^\varepsilon(z^\varepsilon) = \varepsilon^2 (r^\varepsilon)^{\frac{1}{3}} \sum_{i=0}^p o\left((\mu_i^\varepsilon)^{\frac{-2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\left|u - \frac{y_i^\varepsilon}{\mu_i^\varepsilon}\right|} \frac{1}{\left(\frac{\lambda_i^\varepsilon}{\mu_i^\varepsilon} + |u|\right)^{\frac{5}{3}}}\, du\right).$$

On vérifie alors que les intégrales sont uniformément bornées, ce qui donne

$$I^\varepsilon(z^\varepsilon) = \sum_{i=0}^p o\left(\varepsilon^2 (r^\varepsilon)^{\frac{1}{3}} (\mu^\varepsilon)^{\frac{-2}{3}}\right).$$

Enfin on obtient à l'aide de l'inégalité de Young que

$$\begin{aligned} I^\varepsilon(z^\varepsilon) &= \sum_{i=0}^p o\left((r^\varepsilon)^{\frac{1}{3}} \varepsilon^2 (\lambda_i^\varepsilon)^{\frac{-2}{3}} \left(1 + \frac{|y_i^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}\right)^{\frac{-2}{3}}\right) \\ &= \sum_{i=0}^p o\left(r^\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{\lambda_i^\varepsilon}\left(1 + \frac{|y_i^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}\right)^{-1}\right) = o\left(r^\varepsilon + \sum_{i=0}^p \frac{\varepsilon^3}{\lambda_i^\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{|z^\varepsilon - a_i^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}}\right). \end{aligned} \tag{4.69}$$

Finalement, d'après (4.59), (4.60), (4.61), (4.62), (4.67), (4.68) et (4.69) on a, pour tout $R > 0$,

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| \leq \sum_{i=0}^{p} O\left(\left(r_{i,R}^\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{\lambda_i^\varepsilon} + \sum_{j\neq i} t_{ij}^\varepsilon\right) \frac{Ln\left(2 + \frac{|a_i^\varepsilon - z^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}\right)}{1 + \frac{|a_i^\varepsilon - z^\varepsilon|}{\lambda_i^\varepsilon}}\right) + \delta_{R,\varepsilon} r^\varepsilon. \tag{4.70}$$

où $\lim\limits_{R\to+\infty} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_{R,\varepsilon} = 0$.

Maintenant nous allons montrer que $r_{i,R}^\varepsilon$ est contrôlé par t^ε. Dans un premier temps on montre un résultat un peu plus fort dans le cas particulier où une autre bulle est « proche » de la bulle que l'on considère.

Affirmation 1 : Soit i fixé. S'il existe $i_0 \neq i$ tel que $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{d_{i_0}^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} < +\infty$, alors pour tout $R > 0$, on a

$$r_{i,R}^\varepsilon = o(t^\varepsilon).$$

Preuve de l'affirmation 1 :

D'après la section précédente, on a

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^2} \left(\min_{0\leq j\leq p} d_j^\varepsilon(z)\right) |\nabla R^\varepsilon| = o(1).$$

Maintenant on fixe $R > 0$ et $z^\varepsilon \in \Omega_{i,R}^\varepsilon$, on a

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| = o\left(\frac{1}{\min_{0\leq j\leq p} d_j^\varepsilon(z^\varepsilon)}\right).$$

Puis, à une sous-suite près, on voit qu'il existe j_0 tel que

$$d_{j_0}^\varepsilon(z^\varepsilon) = \min_{0\leq j\leq p} d_j^\varepsilon(z^\varepsilon),$$

et alors

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| = o\left(\frac{d_{j_0}^\varepsilon(z^\varepsilon)}{(d_{j_0}^\varepsilon(z^\varepsilon))^2}\right). \tag{4.71}$$

De plus, en utilisant le fait que $z^\varepsilon \in \Omega_{i,R}^\varepsilon$, on voit facilement que

$$\begin{aligned}(\lambda_i^\varepsilon)^2 + |a_i^\varepsilon - a_{j_0}^\varepsilon|^2 + (\lambda_{j_0}^\varepsilon)^2 &= O(|z^\varepsilon - a_{j_0}^\varepsilon|^2 + (\lambda_{j_0}^\varepsilon)^2) \\ &= O((d_{j_0}^\varepsilon(z^\varepsilon))^2).\end{aligned} \tag{4.72}$$

D'autre part, on a

$$d_{j_0}^\varepsilon(z^\varepsilon)) \leq d_i^\varepsilon(z^\varepsilon) = O(\lambda_i^\varepsilon). \tag{4.73}$$

Finalement, d'après (4.71), (4.72) et (4.73), on a

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| = o\left(\frac{\lambda_i^\varepsilon}{(d_{j_0}^\varepsilon(a_i^\varepsilon))^2 + (d_i^\varepsilon(a_{j_0}^\varepsilon))^2}\right),$$

ce qui prouve l'affirmation 1. $\square$

Dans un deuxième temps, on montre que si l'estimée générale n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si on ne peut pas contrôler r^ε et t^ε par $\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon}$, alors $r_{i,R}^\varepsilon$ est bien contrôlé par t^ε. En effet, sinon le reste l'emporterait sur les interactions et nous donnerait une solution du linéarisé non-constante ce qui serait absurde.

Affirmation 2 : Soit $r^\varepsilon + t^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon}\right)$, soit, pour tout nombre positif R, on a $\max\limits_{0\le i\le p} r_{i,R}^\varepsilon = O(t^\varepsilon)$.

En particulier, on remarque que si $p = 0$ on a $t^\varepsilon = 0$ et alors $r^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon}\right)$.

Preuve de l'affirmation 2 :

Supposons par contradiction que

$$\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon} = o(r^\varepsilon + t^\varepsilon)$$

et qu'il existe $R > 0$ tel que $t^\varepsilon = o\left(\max\limits_{0\le i\le p} r_{i,R}^\varepsilon\right)$. Alors, à une sous-suite près, on peut supposer qu'il existe i_0 tel que

$$r_{i_0,R}^\varepsilon = \max_{0\le i\le p} r_{i,R}^\varepsilon.$$

Bien sûr notre hypothèse nous donne $t^\varepsilon = o(r^\varepsilon)$. Alors nous allons montrer que $r_{i_0,R}^\varepsilon = o(r^\varepsilon)$ ce qui, avec (4.70), nous donnera la contradiction souhaitée et prouvera l'affirmation.

D'après l'affirmation précédente, on peut également supposer que pour tout $j \neq i_0$ on a $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{d_j^\varepsilon(a_{i_0}^\varepsilon)}{\lambda_{i_0}^\varepsilon} = +\infty$, on a alors (4.55), c'est-à-dire

$$\left|\nabla\left(\tilde{u}^\varepsilon - \tilde{B}_{i_0}^\varepsilon\right)(0)\right|^2 = O\left(\varepsilon^3\right),$$
$$\left|\nabla^2\left(\tilde{u}^\varepsilon - \tilde{B}_{i_0}^\varepsilon\right)(\tilde{B}_{i_0}^\varepsilon)(0)\right|^2 = O\left(\varepsilon^3\right).$$

Maintenant on dilate notre équation en posant $\tilde{f} = f(\lambda_{i_0}^\varepsilon\,.\,+a_{i_0}^\varepsilon)$.

Alors, d'après (4.50), (4.51), (4.56), (4.57) et (4.55), on voit que $\tilde{B}_j^\varepsilon$ et $\tilde{R}^\varepsilon$ vérifient les équations suivantes sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \{S_{i_0}\}$:

$$|\nabla\tilde{B}_{i_0}^\varepsilon| = O(1),$$
$$|\nabla\tilde{B}_j^\varepsilon| = o(\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon) \text{ pour } j \neq i_0,$$
$$|\nabla\tilde{R}^\varepsilon| = O\left(\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon\right),$$

et

$$\Delta\left(\sum_{j=0}^p \tilde{B}_j^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon\right) = -2\left(\sum_{j=0}^p \tilde{B}_j^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon\right)_x \wedge \left(\sum_{j=0}^p \tilde{B}_j^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon\right)_y + o\left(\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon\right),$$

les relations quasi-conformes

$$\left\langle \sum_{j=0}^{p}(\tilde{B}_j^\varepsilon)_x + \tilde{R}_x^\varepsilon, \sum_{j=0}^{p}(\tilde{B}_j^\varepsilon)_y + \tilde{R}_y^\varepsilon \right\rangle = o\left(\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon\right),$$

$$\left\langle \sum_{j=0}^{p}(\tilde{B}_j^\varepsilon)_x + \tilde{R}_x^\varepsilon, \sum_{j=0}^{p}(\tilde{B}_j^\varepsilon)_x + \tilde{R}_x^\varepsilon \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^{p}(\tilde{B}_j^\varepsilon)_y + \tilde{R}_y^\varepsilon, \sum_{j=0}^{p}(\tilde{B}_j^\varepsilon)_y + \tilde{R}_y^\varepsilon \right\rangle = o\left(\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon\right),$$

et les conditions en 0

$$\nabla\left(\sum_{j\neq i_0}\tilde{B}_j^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon\right)(0) = o(\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon),$$

$$\nabla^2\left(\sum_{j\neq i_0}\tilde{B}_j^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon\right)(\nabla\tilde{B}_{i_0}^\varepsilon)(0) = o(\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon).$$

Alors, d'après la théorie elliptique standard, voir [49], $\frac{\tilde{R}^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon r^\varepsilon}$ converge dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2\setminus\{S_{i_0}\})$ vers $\tilde{R}$ qui satisfait

$$\Delta\tilde{R} = -2\left(\omega_x^{i_0}\wedge\tilde{R}_y + \tilde{R}_x\wedge\omega_y^{i_0}\right),$$

les relations conformes ,

$$\langle\omega_x^{i_0},\tilde{R}_y\rangle + \langle\tilde{R}_x,\omega_y^{i_0}\rangle = 0,$$
$$\langle\omega_x^{i_0},\tilde{R}_x\rangle - \langle\omega_y^{i_0},\tilde{R}_y\rangle = 0$$

et les conditions en 0,

$$\nabla\tilde{R}(0) = 0,$$
$$\nabla^2\tilde{R}(\nabla\omega^{i_0})(0) = 0.$$

De plus, $\nabla\tilde{R}$ est uniformément borné sur $\mathbb{R}^2\setminus\{S_{i_0}\}$, donc on peut l'étendre en une fonction lisse de $\mathbb{R}^2$ qui satisfait la même équation et dont le gradient reste uniformément borné. Finalement, en appliquant la proposition 7.1.2, on voit que

$$\nabla\tilde{R}\equiv 0,$$

ce qui prouve que $r_{i_0,R}^\varepsilon = o(r^\varepsilon)$. Comme dit plus haut, cette dernière estimée contredit (4.70) pour R assez grand, ε assez petit et z^ε tel que $\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon) = \frac{r^\varepsilon}{2}$, ce qui achève la preuve de l'affirmation 2. □

Finalement, en appliquant (4.70) avec z^ε tel que $\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon) = \frac{r^\varepsilon}{2}$, R assez grand et ε assez petit, l'affirmation 2 nous assure que

$$r^\varepsilon = O\left(t^\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon}\right). \tag{4.74}$$

Ainsi, pour obtenir l'estimée désirée, il suffit de montrer que $t^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon}\right)$. Cette estimée est renvoyée à la section 4.6. On va la supposer démontrée afin de démontrer le théorème. Cependant on peut remarquer que cette estimée est automatiquement satisfaite quand il n'y a qu'une bulle, puisque le terme d'interaction s'annule.

4.5 Preuve du théorème

Ici, on suppose que

$$r^\varepsilon + t^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon}\right).$$

Nous allons utiliser cette estimée sur la bulle la plus haute, c'est-à-dire ω_p^ε.

On dilate la solution en posant $\tilde{f} = f(\lambda_p^\varepsilon\,.\,+a_p^\varepsilon)$. D'après (4.56), $\tilde{R}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - \tilde{B}_p^\varepsilon$ satisfait l'équation suivante, sur tout compact de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{R}^\varepsilon = &-2\sum_{i=0}^{p}(\tilde{B}_p^\varepsilon)_x \wedge \tilde{R}_y^\varepsilon + \tilde{R}_x^\varepsilon \wedge (\tilde{B}_p^\varepsilon)_y + \tilde{R}_x^\varepsilon \wedge \tilde{R}_y^\varepsilon) \\
&+ \varepsilon^3\left(\frac{1}{6}\mathrm{Ric}_{ij,k}(\tilde{B}_p^\varepsilon)^i(\tilde{B}_p^\varepsilon)^j(\tilde{B}_p^\varepsilon)^k((\tilde{B}_p^\varepsilon)_x \wedge (\tilde{B}_p^\varepsilon)_y)\right. \\
&+ \frac{1}{3}R_{ikmj,n}(\tilde{B}_p^\varepsilon)^k(\tilde{B}_p^\varepsilon)^m(\tilde{B}_p^\varepsilon)^n((\tilde{B}_p^\varepsilon)_x \wedge (\tilde{B}_p^\varepsilon)_y)^i \\
&+ \left. B_{ijkmn}(\tilde{B}_p^\varepsilon)^m(\tilde{B}_p^\varepsilon)^n\left\langle\nabla(\tilde{B}_p^\varepsilon)^i, \nabla(\tilde{B}_p^\varepsilon)^k\right\rangle\right) \\
&+ o\left(\sum_{i=0}^{p}|\nabla\tilde{B}_i^\varepsilon||\nabla\tilde{R}^\varepsilon|\right) + O(\varepsilon^4|\nabla\tilde{u}^\varepsilon|^2)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

où B_{ijkmn} est un terme faisant intervenir les dérivées de la courbure (il est défini dans la sous-section 4.7.1). Puis on divise (4.75) par ε^3. Alors la théorie elliptique standard, voir [49], nous assure, qu'à une sous-suite près, $\frac{\tilde{R}^\varepsilon}{\varepsilon^3}$ converge dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ vers $\tilde{R}$ solution sur $\mathbb{R}^2$ de

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{R} = &-2(\hat{\omega}_x^p \wedge \tilde{R}_y + \tilde{R}_x \wedge \hat{\omega}_y^p) + \frac{1}{6}\mathrm{Ric}_{mn,k}(\hat{\omega}^p + p_p)^m(\hat{\omega}^p + p_p)^n(\hat{\omega}^p + p_p)^k(\hat{\omega}_x^p \wedge \hat{\omega}_y^p)_j \\
&+ \frac{1}{3}R_{ikmj,n}(\hat{\omega}^p + p_p)^k(\hat{\omega}^p + p_p)^m(\hat{\omega}^p + p_p)^n(\hat{\omega}_x^p \wedge \hat{\omega}_y^p)^i \\
&+ B_{ijkmn}(\hat{\omega}^p + p_p)^m(\hat{\omega}^p + p_p)^n\left\langle\nabla(\hat{\omega}^p)^i, \nabla(\hat{\omega}^p)^k\right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

D'autre part, quitte à composer $\tilde{R}$ avec une homographie, on peut supposer que $\hat{\omega}^p = \pi_N^{-1}$ que l'on notera maintenant ω, ainsi que p_p que l'on notera p.

De plus, on sait que ω_x, ω_y et $x\,\omega_x + y\,\omega_y$ sont des solutions de l'équation linéarisée. En effet, pour s'en assurer, il suffit de différencier $\omega(\,.\,+a)$ et $\omega(\lambda\,.\,)$ par rapport à leurs paramètres et d'utiliser l'invariance conforme de l'équation. En testant (4.76) contre ces fonctions, cela devrait nous fournir des informations.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de la preuve on note ω_x, ω_y et $x\,\omega_x + y\,\omega_y$ respectivement Y^1, Y^2 et Y^3. Soit $R > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} Y^l\Delta\tilde{R}\,dz = &\int_{B(0,R)} -2\langle Y^l, \omega_x \wedge \tilde{R}_y + \tilde{R}_x \wedge \omega_y\rangle\,dz \\
&+ \int_{B(0,R)} C_j(p_\infty, z)(Y^l)^j\,dz,
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
C_j(p_\infty, z) = {} & B_{ijkmn}(p_\infty)(\omega+p)^m(\omega+p)^n \left\langle \nabla\omega^i, \nabla\omega^k \right\rangle \\
& + \frac{1}{3} R_{ikmj,n}(p_\infty)(\omega+p)^k(\omega+p)^m(\omega+p)^n(\omega_x \wedge \omega_y)^i \\
& - \frac{1}{6}\mathrm{Ric}_{ij,k}(p_\infty)(\omega+p)^i(\omega+p)^j(\omega+p)^k(\omega_x \wedge \omega_y).
\end{aligned}
$$

Puis en intégrant par parties, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{B(0,R)} \langle \tilde{R}, \Delta Y^l + 2(Y^l_x \wedge \omega_y + \omega_x \wedge Y^l_y)\rangle dz \\
&= \int_{B(0,R)} C_j(p_\infty, z)(Y^l)^j dz \\
&+ O\left(\int_{\partial B(0,R)} (|\nabla\omega||Y^l| + |\omega||\nabla Y^l| + |\tilde{R}||\nabla Y^l| + |\nabla\tilde{R}||Y^l|) dz \right).
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

D'une part, d'après (4.70), on sait que

$$
\begin{cases} |\tilde{R}| = o(|z|) \\ |\nabla\tilde{R}| = o\,(1) \end{cases} \qquad \text{quand } z \to +\infty.
$$

D'autre part, d'après les formules de la section 4.1 sur la projection stéréographique, on obtient aussi les estimées suivantes

$$
\begin{cases} |\omega| = O(1) \\ |\nabla\omega| = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{cases} \qquad \text{quand } z \to +\infty,
$$

et

$$
\begin{cases} |Y^k| = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \\ |\nabla Y^k| = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{cases} \qquad \text{quand } z \to +\infty.
$$

Grâce à toutes ces estimées, on voit que dans (4.77), la première intégrande de droite est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ en entier, on peut donc passer à la limite quand R tend vers l'infini. D'autre part, en utilisant les estimées ci-dessus, on remarque que le terme de bord converge vers 0 lorsque R tend vers l'infini. On a donc

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} B_{ijlm}(p_\infty)(\omega+p)^m(\omega+p)^n \left\langle \nabla\omega^i, \nabla\omega^k \right\rangle (Y^l)^j \, dz = \\
& \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Ric}_{ij,k}(p_\infty)(\omega+p)^i(\omega+p)^j(\omega+p)^k(\omega_x \wedge \omega_y)(Y^l)^j \, dz \\
& - \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^2} R_{ikmj,n}(p_\infty)(\omega+p)^k(\omega+p)^m(\omega+p)^n(\omega_x \wedge \omega_y)^i(Y^l)^j \, dz\,.
\end{aligned}
$$

Puis en faisant un changement de variable $y = \omega(z)$ et en utilisant (4.10), on obtient

$$
\begin{aligned}
& \int_{S^2} B_{ijlm}(p_\infty)(y+p)^m(y+p)^n(\delta^{ik} - y^i y^k)(Y^l)^j \, dv_h = \\
& \frac{1}{6}\int_{S^2} \mathrm{Ric}_{ij,k}(p_\infty)(y+p)^i(y+p)^j(y+p)^k y_j(Y^l)^j \, dv_h \\
& - \frac{1}{3}\int_{S^2} R_{ikmj,n}(p_\infty)(y+p)^k(y+p)^m(y+p)^n y^i(Y^l)^j \, dv_h\,.
\end{aligned}
$$

Enfin on calcule $Y^l(y)$ à l'aide des formules de la section 4.1, on obtient

$$Y^1(\pi(y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^3 \\ 0 \\ y^1 \end{pmatrix} - y^1 y,$$

$$Y^2(\pi(y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y^3 \\ y^2 \end{pmatrix} - y^2 y,$$

$$Y^3(\pi(y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - y^3 y,$$

Maintenant en tenant compte du fait que toutes les intégrales ne faisant intervenir qu'un nombre impair de y s'annule et en utilisant les symétries du tenseur de Riemann, on obtient après quelques calculs

$$\int_{S^2} B_{ijkmn}(p_\infty) y^m y^n (\delta^{ik} - y^i y^k)(\delta^{jl} - y^j y^l)\, dv_h = 0 \text{ pour tout } l.$$

On peut remarquer que cette expression est indépendante de p, ce qui est bien naturel puisque p dépend du centre de carte choisi au début de notre analyse, or le résultat ne peut dépendre des coordonnées choisies.

Enfin, en remplaçant B_{ijkmn} par son expression, on obtient

$$\int_{S^2} (4R_{kmij,n}(p_\infty) + 2R_{imnj,k}(p_\infty) - R_{imnk,j}(p_\infty)) y^m y^n (\delta^{ik} - y^i y^k)(\delta^{jl} - y^j y^l)\, dv_h = 0.$$

Ainsi en appliquant les formules classiques suivantes sur les intégrales sphériques,

$$\int_{S^2} y^m y^n dv_h = \frac{4\pi}{3}\delta^{mn} \text{ et } \int_{S^2} y^m y^n y^l y^j dv_h = \frac{4\pi}{15}(\delta^{mn}\delta^{jl} + \delta^{mj}\delta^{nl} + \delta^{ml}\delta^{nj}),$$

on obtient

$$\mathrm{Ric}_{ml}{}^{,m}(p_\infty) = 0 \text{ pour tout } l.$$

Finalement, d'après la seconde identité de Bianchi, ceci donne

$$\nabla Scal(p_\infty) = 0,$$

ce qui achève la preuve du théorème. ■

4.6 Estimée sur l'interaction entre les bulles

L'objectif de cette section est de démontrer l'affirmation suivante, utilisée pour conclure la preuve du théorème dans la section précédente.

Affirmation : $t^\varepsilon = O(\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon})$**.**

Preuve de l'affirmation :

On suppose par contradiction que $\frac{\varepsilon^3}{\lambda_p^\varepsilon} = o(t^\varepsilon)$. On remarque d'abord que, d'après (4.70), ceci implique

$$r^\varepsilon = O(t^\varepsilon).$$

Avant de commencer la preuve, on donne quelques définitions supplémentaires au sujet de l'interaction entre les bulles.

On pose

$$I = \left\{ i | \exists j \text{ t.q. } \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{t_{ij}^\varepsilon}{t^\varepsilon} > 0 \right\}$$

l'ensemble des indices des bulles qui reçoivent une interaction maximale, et

$$T_i = \left\{ j \text{ t.q. } \liminf_{\varepsilon \to t0} \frac{t_{ij}^\varepsilon}{t^\varepsilon} > 0 \right\}$$

l'ensemble des indices des bulles qui donnent cette interaction maximale à une bulle donnée.

Tout d'abord on va démontrer que chaque élément de I reçoit au moins deux interactions maximales. En effet le reste étant négligeable, il faut qu'une autre interaction vienne contrebalancer la première afin qu'il n'y ait pas de contradiction avec la classification des solutions du linéarisé.

Affirmation 1 : Pour tout $i_0 \in I$ **on a**

$$|T_{i_0}| > 1. \tag{4.78}$$

Preuve de l'affirmation 1 :

On suppose par contradiction que $T_{i_0} = \{j_0\}$.

Dans un premier temps on montre que si une autre bulle « contient » $B_{i_0}^\varepsilon$, alors elle ne peut recevoir aucune interaction maximale. En effet, sinon $B_{i_0}^\varepsilon$ devrait recevoir plus d'une interaction maximale ce qui serait une contradiction.

Affirmation 1.1 : Soit $i \neq i_0$ **alors soit** $\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d_{i_0}^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} = +\infty$ **soit** $t_{ik}^\varepsilon = o(t^\varepsilon)$ **pour tout** $k \neq i$**.**

Preuve de l'affirmation 1.1 :

Soit $i \neq i_0$ et supposons que $\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d_{i_0}^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} < +\infty$. Alors, d'après (4.52), on a

$$\begin{cases} \lambda_{i_0}^\varepsilon = o(\lambda_i^\varepsilon), \\ |a_i^\varepsilon - a_{i_0}^\varepsilon| \leq \lambda_i^\varepsilon. \end{cases} \tag{4.79}$$

Supposons par contradiction qu'il existe $k \neq i$ tel que $t^\varepsilon = O(t^\varepsilon_{ik})$. En remarquant que cela conduit nécessairement au fait que $t^\varepsilon_{ki} = O(t^\varepsilon_{ik})$, on a alors

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_i)}{\lambda^\varepsilon_i} = +\infty. \tag{4.80}$$

Sinon on aurait

$$\begin{cases} \lambda^\varepsilon_k = o(\lambda^\varepsilon_i), \\ |a^\varepsilon_i - a^\varepsilon_k| = O(\lambda^\varepsilon_i), \end{cases}$$

qui donnerait

$$\begin{cases} t^\varepsilon_{ik} = O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(\lambda^\varepsilon_i)^2}\right), \\ \frac{1}{\lambda^\varepsilon_i} = O\left(t^\varepsilon_{ki}\right), \end{cases}$$

et conduirait au fait que $t^\varepsilon_{ik} = o(t^\varepsilon_{ki})$, ce qui est clairement une contradiction et prouve (4.80).

Alors, d'après (4.79) et (4.80), on a aussi

$$t^\varepsilon_{ik} = \frac{\lambda^\varepsilon_k}{(\lambda^\varepsilon_k)^2 + (\lambda^\varepsilon_i)^2 + |a^\varepsilon_i - a^\varepsilon_k|^2} = O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_i))^2}\right) = O\left(\frac{1}{d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_i)}\right),$$

et

$$\frac{1}{\lambda^\varepsilon_i} = O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_i}{(\lambda^\varepsilon_{i_0})^2 + (\lambda^\varepsilon_i)^2 + |a^\varepsilon_{i_0} - a^\varepsilon_i|^2}\right) = O(t^\varepsilon_{i_0 i}),$$

Puis, d'après (4.80), on vérifie facilement que $t^\varepsilon = o(t^\varepsilon_{i_0 i})$, ce qui est une contradiction et prouve l'affirmation 1.1. □

Nous allons montrer une estimée de décroissance sur ∇R^ε autour de $a^\varepsilon_{i_0}$. Soit $R > 0$ et z^ε tel que $|z^\varepsilon - a^\varepsilon_{i_0}| = R\lambda^\varepsilon_{i_0}$. Grâce à (4.70), on a

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| \leq o(t^\varepsilon) + O\left(\sum_{i=0}^{p} \sum_{j \neq i} t^\varepsilon_{ij} \left(\frac{Ln\left(2 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}\right)}{1 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}}\right)\right), \tag{4.81}$$

Il y a ensuite deux cas à considérer pour estimer les termes de la somme pour $i \neq i_0$.

Soit $\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d^\varepsilon_{i_0}(a^\varepsilon_i)}{\lambda^\varepsilon_i} = +\infty$ et on voit facilement que

$$\frac{Ln\left(2 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}\right)}{1 + \frac{|a^\varepsilon_i - z^\varepsilon|}{\lambda^\varepsilon_i}} = o(1). \tag{4.82}$$

Soit $\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d^\varepsilon_{i_0}(a^\varepsilon_i)}{\lambda^\varepsilon_i} < +\infty$ et d'après l'affirmation 1.1, pour tout $j \neq i_0$, on a

$$t^\varepsilon_{ij} = o(t^\varepsilon). \tag{4.83}$$

Finalement, d'après (4.82) et (4.83), on obtient

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)| \leq o(t^\varepsilon) + O\left(t^\varepsilon \frac{Ln\,(2+R)}{1+R}\right).$$

Donc on voit que $\frac{\nabla R^\varepsilon}{t^\varepsilon}$ décroît à l'infini, et ne peut donc pas compenser $\frac{\nabla B^\varepsilon_{j_0}}{t^\varepsilon}$ qui est constant. Mais la somme de ces deux fonctions devrait converger vers une solution du linéarisé, c'est-à-dire zéro, ce qui serait une contradiction. On va maintenant préciser cette preuve que l'on vient d'esquisser.

Tout d'abord on montre que pour tout $j \neq i_0$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d^\varepsilon_j(a^\varepsilon_{i_0})}{\lambda^\varepsilon_{i_0}} \neq 0. \tag{4.84}$$

En effet, d'après (4.52), on a

$$\lambda^\varepsilon_{i_0}\lambda^\varepsilon_{j_0} = o((d^\varepsilon_{i_0}(a^\varepsilon_{j_0}))^2 + (d^\varepsilon_{i_0}(a^\varepsilon_{j_0}))^2),$$

et si (4.84) se trouvait être faux pour un j, alors on aurait

$$t^\varepsilon_{i_0 j_0} = o\left(\frac{1}{\lambda^\varepsilon_{i_0}}\right) = o(t^\varepsilon_{j i_0}),$$

qui est une contradiction et prouve (4.84). Donc ceci assure que (4.49) est satisfaite.

On dilate ensuite l'espace autour de la bulle i_0 en posant $\tilde{f} = f(\lambda^\varepsilon_{i_0} z + a^\varepsilon_{i_0}) - f(a^\varepsilon_{i_0})$. Grâce à (4.50), (4.51), (4.56) et (4.57), on voit que $\tilde{B}^\varepsilon_i$ et $\tilde{R}^\varepsilon$ satisfont les équations suivantes, sur tout compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \{S_{i_0}\}$,

$$\begin{aligned}
&|\nabla \tilde{B}^\varepsilon_{i_0}| = O(1),\\
&|\nabla \tilde{B}^\varepsilon_{j_0}| = O(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon),\\
&|\nabla \tilde{B}^\varepsilon_{i}| = o(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon) \text{ pour } i \notin \{i_0, j_0\},\\
&|\nabla \tilde{R}^\varepsilon| = O\left(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Mais aussi

$$\begin{aligned}
&\Delta \tilde{B}^\varepsilon_i = -2(\tilde{B}^\varepsilon_i)_x \wedge (\tilde{B}^\varepsilon_i)_y + O(\varepsilon^3) \text{ pour tout } i,\\
&\Delta(\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon) = -2((\tilde{B}^\varepsilon_{i_0})_x \wedge (\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)_y + \wedge(\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)_x \wedge (\tilde{B}^\varepsilon_{i_0})_y) + o(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon),
\end{aligned}$$

et les relations conformes

$$\begin{aligned}
&\langle (\tilde{B}^\varepsilon_{i_0})_x, (\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)_y\rangle + \langle (\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)_x, (\tilde{B}^\varepsilon_{i_0})_y\rangle = o(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon),\\
&\langle (\tilde{B}^\varepsilon_{i_0})_x, (\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)_x\rangle - \langle (\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)_y, (\tilde{B}^\varepsilon_{i_0})_y\rangle = o(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon).
\end{aligned}$$

De plus, d'après (4.49), on a

$$\begin{aligned}
&\nabla(\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)(0) = o(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon),\\
&\nabla^2(\tilde{B}^\varepsilon_{j_0} + \tilde{R}^\varepsilon)(\nabla \tilde{B}^\varepsilon_{i_0}) = o(\lambda^\varepsilon_{i_0} t^\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Enfin, d'après la théorie elliptique standard, voir [49], à une sous suite près, on voit que $\frac{\tilde{B}^\varepsilon_{j_0}+\tilde{R}^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon_{i_0}t^\varepsilon}$ converge dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2\setminus\{S_{i_0}\})$ vers $\tilde{S}$ qui satisfait

$$\Delta\tilde{S} = -2\left(\omega^{i_0}_x\wedge\tilde{S}_y+\tilde{S}_x\wedge\omega^{i_0}_y\right),$$

les relations conformes

$$\begin{aligned}\langle\omega^{i_0}_x,\tilde{S}_y\rangle+\langle\tilde{S}_x,\omega^{i_0}_y\rangle&=0,\\ \langle\omega^{i_0}_x,\tilde{S}_x\rangle-\langle\tilde{S}_y,\omega^{i_0}_y\rangle&=0,\end{aligned}$$

et les conditions en 0,

$$\begin{aligned}&\nabla\tilde{S}(0)=0,\\ &\nabla^2\tilde{S}(\nabla\omega^{i_0}(0))=0.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $t^\varepsilon_{j_0i_0}=O(t^\varepsilon_{i_0j_0})$ et (4.52), on voit que

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{d_{j_0}(a^\varepsilon_{i_0})}{\lambda_{i_0}}=+\infty.$$

Alors, on en déduit que $\frac{\nabla\tilde{B}^\varepsilon_{j_0}}{\lambda^\varepsilon_{i_0}t^\varepsilon}$ est uniformément borné et satisfait

$$\Delta\tilde{B}^\varepsilon_{j_0}=o((\lambda^\varepsilon_{i_0}t^\varepsilon)^2)$$

Donc, on en déduit facilement que $\frac{\nabla\tilde{B}^\varepsilon_{j_0}}{\lambda^\varepsilon_{i_0}t^\varepsilon}$ converge vers un vecteur constant différent de zéro sur $\mathbb{R}^2$. De plus $\nabla\tilde{R}$ est uniformément borné sur $\mathbb{R}^2\setminus\{S_{i_0}\}$, on peut donc le prolonger en une fonction lisse de $\mathbb{R}^2$ qui satisfait la même équation et dont le gradient est toujours uniformément borné. Maintenant on peut appliquer la proposition 7.1.2 à $\tilde{S}=\tilde{R}+\tilde{B}_{j_0}$ et on voit que

$$\nabla(\tilde{R}+\tilde{B}_{j_0})\equiv0,$$

ce qui prouve que, pour R assez grand et ε assez petit, on a

$$|\nabla R^\varepsilon(z^\varepsilon)|\geq\frac{t^\varepsilon}{2}.$$

On a alors une contradiction avec (4.81) ce qui achève la preuve de l'affirmation 1. □

Maintenant notre objectif est de trouver parmi toutes les bulles recevant une interaction maximale une bonne configuration, c'est-à-dire une configuration où les bulles sont séparées. Alors en passant à la limite on aura une contradiction, puisque l'on aura une somme de plans qui devrait paramétrer une surface minimale, ce qui est impossible lorsque l'on provient de surfaces plongées. Ces plans sont les traces asymptotiques des B^ε_j en a^ε_i, c'est-à-dire leurs plans tangents.

Affirmation 2 : Il existe $i_0\in I$ tel que, en posant $d^\varepsilon=\min\left\{d^\varepsilon_j(a^\varepsilon_{i_0})\text{ t.q. }j\in T_{i_0}\right\}$, pour $k\in T_{i_0}$, soit $\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\lambda^\varepsilon_k}{\lambda^\varepsilon_{i_0}}>0$, soit $d^\varepsilon=o(d^\varepsilon_{i_0}(a^\varepsilon_k))$.

Ceci signifie qu'une bulle de T_{i_0} est soit à une distance équivalente à d_ε de $a^\varepsilon_{i_0}$ et alors a une interaction réciproque avec $B^\varepsilon_{i_0}$ soit part à l'infini.

Preuve de l'affirmation 2 :

Nous allons trouver $i_0 \in I$ par induction. En fait si on fixe $i_0 \in I$, il y a deux possibilités :

Premier cas : Il existe $j_0 \in T_{i_0}$ tel que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{t^\varepsilon_{j_0 i_0}}{t^\varepsilon} > 0$

Ceci signifie que l'interaction entre i_0 et j_0 est réciproque. On a alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda^\varepsilon_{i_0}}{\lambda^\varepsilon_{j_0}} > 0. \tag{4.86}$$

Dans ce cas, pour tout $k \in T_{i_0}$, soit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_{i_0})}{d^\varepsilon_{j_0}(a^\varepsilon_{i_0})} = +\infty,$$

soit, d'après (4.86), on a

$$\begin{aligned} t_{i_0 j_0} &= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_{i_0}}{(d^\varepsilon_{j_0}(a^\varepsilon_{i_0}))^2}\right) = O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_{i_0}}{(d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_{i_0}))^2 + (d^\varepsilon_{j_0}(a^\varepsilon_{i_0}))^2}\right) \\ &= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_{i_0}}{(d^\varepsilon_{i_0}(a^\varepsilon_k))^2 + (d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_{i_0}))^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{t^\varepsilon_{k i_0}}{t^\varepsilon} > 0,$$

et finalement on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda^\varepsilon_k}{\lambda^\varepsilon_{i_0}} > 0.$$

Donc, dans ce cas i_0 satisfait les conditions de l'affirmation.

Deuxième cas : Pour tout $j \in T_{i_0}$, on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{t^\varepsilon_{j i_0}}{t^\varepsilon} = 0$.

Soit $j_0 \in T_{i_0}$ tel que $\lambda^\varepsilon_{j_0} \le \lambda^\varepsilon_k$ pour tout $k \in T_{i_0}$. Alors j_0 satisfait

$$1 < |T_{j_0}| < |T_{i_0}|.$$

En fait, nous allons prouver que $0 < |T_{j_0}|$, l'inégalité de gauche découlera de l'affirmation 1. Soit $k \in T_{i_0} \setminus \{j_0\}$, qui est non vide d'après l'affirmation 1. Grâce au fait que $t^\varepsilon_{k i_0} = o(t^\varepsilon)$, on a

$$\lambda^\varepsilon_{i_0} = o(\lambda^\varepsilon_k). \tag{4.87}$$

De plus, d'après notre hypothèse sur j_0 et k, c'est-à-dire que

$$\lambda^\varepsilon_{j_0} \le \lambda^\varepsilon_k \text{ et } \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{t^\varepsilon_{i_0 k}}{t^\varepsilon_{i_0 j_0}} > 0,$$

on a alors

$$d^\varepsilon_{j_0}(a^\varepsilon_{i_0}) = O(d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_{i_0})). \tag{4.88}$$

D'autre part, d'après (4.87) et (4.88), on a

$$\begin{aligned}
t^\varepsilon_{i_0k} &= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_{i_0}))^2}\right)\\
&= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_{i_0}))^2 + (\lambda^\varepsilon_{j_0})^2}\right)\\
&= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(d^\varepsilon_k(a^\varepsilon_{j_0}))^2 + (d^\varepsilon_{j_0}(a^\varepsilon_k))^2}\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $t^\varepsilon_{i_0k} = O(t^\varepsilon_{j_0k})$ et la partie gauche de l'inégalité désirée.

Pour démontrer l'inégalité de droite, on prouve que $T_{j_0} \subset T_{i_0} \setminus \{j_0\}$. En effet, soit k dans le complémentaire de $T_{i_0} \setminus \{j_0\}$, alors $d^\varepsilon_{j_0}(a^\varepsilon_{i_0}) = O(d^\varepsilon_{j_0}(a^\varepsilon_k))$, sinon en utilisant (4.87) on voit facilement que $t^\varepsilon_{i_0j_0} = o(t^\varepsilon_{kj_0})$ ce qui est absurde. Donc on a

$$\begin{aligned}
t^\varepsilon_{j_0k} &= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(\lambda^\varepsilon_k)^2 + (\lambda^\varepsilon_{j_0})^2 + |a^\varepsilon_{j_0} - a^\varepsilon_k|^2}\right)\\
&= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(\lambda^\varepsilon_k)^2 + (\lambda^\varepsilon_{i_0})^2 + |a^\varepsilon_{i_0} - a^\varepsilon_{j_0}|^2 + |a^\varepsilon_{j_0} - a^\varepsilon_k|^2}\right)\\
&= O\left(\frac{\lambda^\varepsilon_k}{(\lambda^\varepsilon_k)^2 + (\lambda^\varepsilon_{i_0})^2 + |a^\varepsilon_k - a^\varepsilon_{i_0}|^2}\right)\\
&= O(t^\varepsilon_{i_0k})\\
&= o(t^\varepsilon),
\end{aligned}$$

donc $k \notin T_{i_0} \setminus \{j_0\}$, ce qui prouve l'inégalité.

Finalement si i_0 ne satisfait pas aux conditions de l'affirmation, on recommence avec j_0, et cette induction s'achève puisque la suite $|T_{i_0}|$ est strictement décroissante et plus grande que 1. Ceci achève la preuve de l'affirmation 2. □

Maintenant , nous sommes en mesure de démontrer l'affirmation principale de cette section. On fixe i_0 comme dans l'affirmation 2. On dilate alors l'espace autour de $a^\varepsilon_{i_0}$ en posant $\tilde{f} = \frac{f(d^\varepsilon z + a^\varepsilon_{i_0})}{d^\varepsilon t^\varepsilon}$, où $d^\varepsilon = \min\{|a^\varepsilon_{i_0} - a^\varepsilon_j| \text{ t.q. } j \in T_{i_0}\}$. Grâce à (4.50), (4.51), (4.56), (4.57), $\tilde{B}^\varepsilon_i$ et $\tilde{R}^\varepsilon$ vérifient les équations suivantes, sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{S}_{i_0}$, où $\tilde{S}_{i_0} = \left\{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a^\varepsilon_j - a^\varepsilon_{i_0}}{d^\varepsilon} \text{ t.q. } 1 \le j \le k\right\}$,

$$\begin{aligned}
&|\nabla \tilde{B}^\varepsilon_i| = O(1) \text{ pour } i \in T_{i_0} \cup \{i_0\},\\
&|\nabla \tilde{B}^\varepsilon_i| = o(1) \text{ pour } i \notin T_{i_0} \cup \{i_0\},\\
&|\nabla \tilde{R}^\varepsilon| = O\left(1\right),
\end{aligned}$$

et

$$\Delta \tilde{B}_i^\varepsilon = o(1),$$
$$\Delta \tilde{R}^\varepsilon = o(1),$$

les relations conformes

$$\langle (\tilde{B}_i^\varepsilon)_x, (\tilde{B}_i^\varepsilon)_y \rangle = o(1),$$
$$\langle (\tilde{B}_i^\varepsilon)_x, (\tilde{B}_i^\varepsilon)_x \rangle - \langle (\tilde{B}_i^\varepsilon)_y, (\tilde{B}_i^\varepsilon)_y \rangle = o(1).$$

et

$$\left\langle \sum_i (\tilde{B}_i^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon)_x, \sum_i (\tilde{B}_i^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon)_y \right\rangle = o(1),$$
$$\left\langle \sum_i (\tilde{B}_i^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon)_x, \sum_i (\tilde{B}_i^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon)_x \right\rangle - \left\langle \sum_i (\tilde{B}_i^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon)_y, \sum_i (\tilde{B}_i^\varepsilon + \tilde{R}^\varepsilon)_y \right\rangle = o(1).$$

Alors, d'après la théorie elliptique standard, voir [49], $\tilde{R}^\varepsilon$ et $\tilde{B}_i^\varepsilon$ convergent dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \{\tilde{S}_{i_0}\})$ vers $\tilde{R}$ et $\tilde{B}_i$ qui vérifient

$$\Delta \tilde{R} = \Delta \tilde{B}_i = 0,$$

les relations conformes

$$\langle (\tilde{B}_i)_x, (\tilde{B}_i)_y \rangle = 0,$$
$$\langle (\tilde{B}_i)_x, (\tilde{B}_i)_x \rangle - \langle (\tilde{B}_i)_y, (\tilde{B}_i)_y \rangle = 0,$$

et

$$\left\langle \sum_i (\tilde{B}_i + \tilde{R})_x, \sum_i (\tilde{B}_i + \tilde{R})_y \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle \sum_i (\tilde{B}_i + \tilde{R})_x, \sum_i (\tilde{B}_i + \tilde{R})_x \right\rangle - \left\langle \sum_i (\tilde{B}_i + \tilde{R})_y, \sum_i (\tilde{B}_i + \tilde{R})_y \right\rangle = 0.$$

D'une part, si $i \in T_{i_0} \cup \{i_0\}$ on vérifie facilement que $\tilde{B}_i$ est un paramétrage conforme du plan. Alors, soit ce paramétrage est singulier si $\tilde{a}_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{a_i^\varepsilon - a_{i_0}^\varepsilon}{d^\varepsilon}$ est fini, soit c'est une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
D'autre part, puisque $r^\varepsilon = O(t^\varepsilon)$, alors $\nabla \tilde{R}$ est uniformément borné sur $\mathbb{R}^2$, donc par le théorème de Liouville, $\nabla \tilde{R}$ est constant et dans ce cas $\tilde{R}$ est un paramétrage standard du plan. Soit j_0 est tel que $|a_{i_0}^\varepsilon - a_{j_0}^\varepsilon| = d^\varepsilon$, alors on a la somme de deux plans, $\tilde{B}_{i_0}$ et $\tilde{B}_{j_0}$, dont le paramétrage est singulier en des points différents. De plus ce paramétrage satisfait l'équation des surfaces minimales. Mais, comme ces plans sont des limites de surfaces plongées, ils doivent être parallèles. En fait, quitte à changer les coordonnées, on peut supposer que la troisième coordonnée de $\nabla \left(\sum_i \tilde{B}_i + \tilde{R} \right)$ s'annule. On a alors une application conforme de $\mathbb{R}^2$ dans lui même avec au moins deux singularités. On voit alors facilement que le paramétrage $\sum_i \tilde{B}_i + \tilde{R}$ admet nécessairement un point singulier. Pour cela il suffit d'utiliser la représentation

d'Enneper-Weierstrass comme présentée à la section 1.8. En effet, soit u la solution de l'équation des surfaces minimales, on pose

$$\Phi = u_x + iu_y.$$

Alors, Φ est holomorphe et $\Phi^2 = 0$. Mais en appliquant ceci à $\tilde{B}_i$, on voit facilement que Φ est une fraction rationnelle, avec autant de pôles que le paramétrage a de singularités. Puisqu'on a deux pôles différents, alors on voit que $(\tilde{B}_i + \tilde{R})_x + i(\tilde{B}_i + \tilde{R})_y$ doit s'annuler quelque part. Finalement, grâce aux relations conformes, la surface limite peut être considérée comme une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ dont la dérivée s'annule quelque part.

Mais, en appliquant le lemme 4.7.1, on obtient une contradiction avec le fait que u^ε soit plongée, ce qui achève la preuve de l'affirmation. □

4.7 Résultats techniques

4.7.1 Pourquoi les bulles sont-elles simples ?

Dans ce court paragraphe, on prouve un lemme expliquant pourquoi une surface plongée ne peut dégénérer sur une immersion possédant des points singuliers.

Lemme 4.7.1. *Soit $u^\varepsilon : B(0,1) \to \mathbb{R}^3$ une suite de plongement lisse telle qu'il existe $u^0 \in C^1(B(0,1), \mathbb{R}^3)$ et telle que*

$$u^\varepsilon \to u^0 \text{ dans } C^2_{loc}(B(0,1) \setminus \{0\}.$$

Alors u^0 ne peut être un paramétrage multiple, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plongement $U_0 \in C^1(B(0,1), \mathbb{R}^3)$, $\Phi \in \mathcal{O}(B(0,1), \mathbb{C})$ une fonction holomorphe et $k \geq 2$ entier tels que

$$\begin{aligned} &u^0 = U^0 \circ \Phi \\ &\text{et} \\ &\Phi(z) = z^k + o(|z|^k) \text{ quand } z \to 0. \end{aligned}$$

Preuve du lemme 4.7.1 :

Tout d'abord, à un difféomorphisme d'un voisinage de 0 près, on peut supposer que

$$u^\varepsilon \to U^0(z^l) \text{ dans } C^2_{loc}(B(0,\delta) \setminus \{0\}).$$

où $l \geq 2$ et $\delta > 0$. Soit $A_\delta = B\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \setminus B\left(0, \frac{\delta}{3}\right)$ et C_r le cylindre de centre $U^0(0)$ et de rayon r qui soit orthogonal à $T_{U^0(0)}U^0$, le plan tangent de l'image de U^0 en $U^0(0)$. On choisit $\delta > 0$ et $r > 0$ assez petit de sorte que $C_r \cap U_0(A_\delta)$ soit une courbe simple. Alors, pour ε assez petit, on voit facilement que l'intersection de $u^\varepsilon(A_\delta)$ et C_r tourne l fois autour du cylindre, donc $u^\varepsilon(A_\delta)$ s'auto-intersecte nécessairement, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de plongement et prouve le lemme. □

4.7.2 Développement limité de la métrique et des symboles de Christoffel

Tout d'abord on rappelle le développement limité de la métrique dans des coordonnées normales centrées en $p \in \mathcal{N}$, voir [105],

$$g_{ij}(y) = \delta_{ij} + \frac{R_{ikmj}(p)}{3} y^k y^m + \frac{R_{ikmj,n}(p)}{6} y^k y^m y^n + o(r^3).$$

où $r^2 = \sum y_i^2$. Soit $g^\varepsilon(y) = g(\varepsilon y)$, on a alors

$$(g_\varepsilon)_{ij}(y) = \delta_{ij} + \frac{\varepsilon^2}{3} R_{ikmj}(p) y^k y^m + \frac{\varepsilon^3}{6} R_{ikmj,n}(p) y^k y^m y^n + o(\varepsilon^3).$$

On en déduit facilement le développement limité de l'inverse de la métrique et de la racine de son déterminant

$$g_\epsilon^{ij}(y) = \delta_{ij} - \frac{\varepsilon^2}{3} R_{ikmj}(p) y^k y^m - \frac{\varepsilon^3}{6} R_{ikmj,n}(p) y^k y^m y^n + o(\varepsilon^3)$$

et

$$\sqrt{|g_\varepsilon|}(y) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{6} \mathrm{Ric}_{mn}(p) y^m y^n - \frac{\varepsilon^3}{12} \mathrm{Ric}_{mn,k}(p) y^m y^n y^k + o(\varepsilon^3).$$

Maintenant on va calculer le développement limité des symboles de Christoffel ,en utilisant leurs expressions en fonction de la métrique, c'est-à-dire

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l} \right).$$

Mais d'après les développements limités effectué ci-dessus, on a

$$(g_\varepsilon)_{jl,i}(y) = \frac{\varepsilon^2}{3} \left(R_{jiml}(p) + R_{jmil}(p) \right) y^m + \frac{\varepsilon^3}{6} \left(R_{jiml,n}(p) + R_{jmil,n}(p) + R_{jmnl,i}(p) \right) y^m y^n + o(\varepsilon^3)$$

$$(g_\varepsilon)_{il,j}(y) = \frac{\varepsilon^2}{3} \left(R_{ijml}(p) + R_{imjl}(p) \right) y^m + \frac{\varepsilon^3}{6} \left(R_{ijml,n}(p) + R_{imjl,n}(p) + R_{imnl,j}(p) \right) y^m y^n + o(\varepsilon^3)$$

$$(g_\varepsilon)_{ij,l}^\varepsilon(y) = \frac{\varepsilon}{3} \left(R_{ilmj}(p) + R_{imlj}(p) \right) y^m + \frac{\varepsilon^3}{6} \left(R_{ilmj,n}(p) + R_{imlj,n}(p) + R_{imnj,l}(p) \right) y^m y^n + o(\varepsilon^3)$$

Finalement, en utilisant la seconde identité de Bianchi, on a

$$\begin{aligned}(\Gamma_\varepsilon)_{ij}^k(y) = & \frac{\varepsilon^2}{3} \left(R_{jmik}(p) + R_{imjk}(p) \right) y^m \\ & + \frac{\varepsilon^3}{6} \left(R_{jmik,n}(p) + R_{imjk,n}(p) + R_{imjn,k}(p) \right) y^m y^n + o(\varepsilon^3),\end{aligned}$$

où $(\Gamma_\varepsilon)_{ij}^k$ est le symbole de Christoffel associé à g_ε. Ce que l'on écrit sous forme condensée

$$(\Gamma_\varepsilon)_{ik}^j(y) = A_{ijkm}(p) y^m \varepsilon^2 + B_{ijkmn}(p) y^m y^n \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) \tag{4.89}$$

où

$$A_{ijkm}(p) = \frac{1}{3} \left(R_{kmij}(p) + R_{imkj}(p) \right)$$

et

$$B_{ijkmn}(p) = \frac{1}{12} \left(2R_{kmij,n}(p) + 2R_{imkj,n}(p) + R_{kmnj,i}(p) + R_{imnj,k}(p) - R_{imnk,j}(p) \right).$$

4.7.3 Fonctions de Green et estimées intégrales

Soit G et G_R les fonctions de Green du laplacien respectivement sur le plan et la boule $B(0,R)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
G(z_1,z_2) &= \frac{1}{2\pi} Ln\left(|z_1-z_2|\right),\\
G_R(z_1,z_2) &= \frac{1}{2\pi}\left(Ln\left(|z_1-z_2|\right) - Ln\left(\left|\frac{R}{|z_1|}z_1 - \frac{|z_1|}{R}z_2\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

Lemme 4.7.2. *Soient u et f deux fonctions de $C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ qui satisfont*

$$\begin{cases}
\Delta u = f,\\
\|\nabla u\|_\infty < +\infty,\\
f = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \text{ quand } z \to +\infty.
\end{cases}$$

Alors on a

$$\nabla u(z_0) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G(z_0,z) f(z) dz.$$

Preuve du lemme 4.7.2 :

Soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ tels que $z_0 \in B(0,R)$, alors d'après la formule standard de Green, on a

$$\nabla u(z_0) = \int_{B(0,R)} G_R(z_0,z)\nabla f(z)dz + \int_{\partial B(0,R)} \frac{\partial G_R}{\partial n}(z_0,z)\nabla u(z) d\sigma.$$

Puis, en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla u(z_0) = &\int_{B(0,R)} \nabla G_R(z_0,z) f(z)dz + \int_{\partial B(0,R)} G_R(z_0,z) f(z) dz\\
&+ \int_{\partial B(0,R)} \frac{\partial G_R}{\partial n}(z_0,z)\nabla u(z) d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Or, pour z_0 fixé, on a

$$\begin{cases}
|G_R(z_0,z)| = O\left(Ln|z-z_0|\right)\\
|\nabla G_R(z_0,z)| = O\left(\frac{1}{|z-z_0|}\right)
\end{cases} \qquad \text{quand } z \to +\infty,$$

et

$$\left|\nabla\left(\frac{G_R}{\partial n}\right)(z_0,z)\right| = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \text{ quand } z \in \partial B(0,R) \text{ et } R \to +\infty.$$

Ceci nous autorise à prendre la limite quand R tend vers l'infini dans (4.90) et nous donne le résultat voulue. □

Enfin, on conclut cette section en donnant une estimée intégrale faisant intervenir la fonction de Green et la norme du gradient d'une bulle.

Lemme 4.7.3. *Il existe une constante positive C telle que, pour tout $z_0 \in \mathbb{R}^2$, on ait*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(z, z_0)| \frac{1}{1+|z|^2} dz \leq C \, \frac{Ln(2+|z_0|)}{1+|z_0|}.$$

Preuve du lemme 4.7.3 :

En appliquant une fois encore les estimées standards sur la fonction de Green, on sait qu'il existe une constante positive C, telle que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(z, z_0)| \frac{1}{1+|z|^2} dz &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{C}{|z-z_0|(1+|z|^2)} dz \\
&= \int_{B\left(z_0, \frac{|z_0|}{2}\right)} \frac{C}{|z-z_0|(1+|z|^2)} dz \\
&+ \int_{B\left(0, \frac{|z_0|}{2}\right)} \frac{C}{|z-z_0|(1+|z|^2)} dz \\
&+ \int_{\left\{|z| \geq \frac{|z_0|}{2}, |z-z_0| \geq \frac{|z_0|}{2}\right\}} \frac{C}{|z-z_0|(1+|z|^2)} dz.
\end{aligned}$$

Puis en majorant chaque terme on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla G(z, z_0)| \frac{1}{1+|z|^2} dz &\leq \frac{4C}{4+|z_0|^2} \int_{B\left(z_0, \frac{|z_0|}{2}\right)} \frac{1}{|z-z_0|} dz \\
&+ \frac{C}{|z_0|} \int_0^{\frac{|z_0|}{2}} \frac{2r}{1+r^2} dr \\
&+ 4C \int_{\frac{|z_0|}{2}}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \\
&\leq C \left(\frac{2|z_0|}{4+|z_0|^2} + \frac{1}{|z_0|} Ln\left(1 + \frac{|z_0|^2}{4}\right) + \frac{8}{|z_0|} \right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Chapitre 5

Surfaces à courbure moyenne constante à bord dans l'espace euclidien

Ce chapitre a pour but d'introduire une partie de la théorie des surfaces à courbure moyenne constante bordant un ensemble donné. Nous serons très loin d'être exhaustif au sujet de cette théorie assez complexe et où beaucoup de questions restent ouvertes.

5.1 Le problème de Plateau

Le problème originel de Plateau [1] était le suivant :

Etant donnée une courbe simple fermée Γ*, existe-t-il parmi toutes les surfaces ayant pour bord* Γ *une surface d'aire minimale ?*

La réponse est affirmative. Une première solution rigoureuse fut apportée indépendamment par Douglas [37] et Rado [93] dans les années 30. Puis une réponse complète fut donnée à l'aide de la théorie géométrique de la mesure, développée notamment par Almgren, Federer et Fleming. En effet Douglas et Rado ne considèrent que des surfaces de type-disque, alors que toutes les surfaces minimisantes ne sont pas de type disque, voir chapitre 8 de [84]. L'idée de Douglas et Rado est de minimiser la fonctionnelle d'aire (ou d'énergie) sur l'ensemble des surfaces admissibles. Toutefois cette fonctionnelle étant invariante sous l'action de difféomorphismes conformes et le groupe des difféomorphismes conformes du disque (groupe de Mobius) n'étant pas compact, il est alors clair que les suites minimisantes ne seront pas compactes. On trouvera une preuve claire de ce théorème au chapitre 1 du livre de Struwe [112] sur le problème de Plateau.

On peut considérer la généralisation suivante du problème de Plateau :

Etant donnée une courbe simple fermée Γ*, existe-t-il parmi toutes les surfaces ayant pour bord* Γ *et renfermant un volume fixé* V*, une surface d'aire minimale ?*

1. du nom du mathématicien et physicien Joseph Plateau qui « débroussailla » le problème des surfaces minimales posé initialement par Lagrange.

Ce problème est aussi connu sous le nom de *Problème des bulles de savon*, puisqu'il consiste à trouver la surface que formerait un film de savon bordant un contour donné et soumis à une pression donnée. Afin de résoudre ce problème, il est assez naturel de considérer le problème de minimisation suivant, généralisant celui de Douglas et Rado : minimiser la fonctionnelle de Dirichlet

$$D(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 \, dz,$$

sur

$$\left\{u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3 \text{ t.q } u(\partial\mathbb{D}) = \Gamma \text{ et } V(u) = V\right\}$$

où

$$V(u) = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{D}} \langle u, u_x \wedge u_y\rangle \, dz$$

est le volume algébrique du cône constitué de tous les segments joignant $u(z)$ et l'origine. L'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème est l'équation de courbure moyenne constante

$$\begin{cases} \Delta u = -2H\, u_x \wedge u_y, \\ \langle u_x, u_y\rangle = |u_x| - |u_y| = 0, \\ u_{|\partial\mathbb{D}} \text{ est un paramétrage croissant de } \Gamma. \end{cases} \tag{5.1}$$

Il existe un certain nombre de résultats d'existence sous des hypothèses reliant H et Γ. Nous citerons celui de Hildebrandt [56] qui propose une condition assez générale, dont on trouvera une preuve au chapitre 3 du livre de Struwe [112].

Théorème 5.1.1 (Hildebrandt, 1970)**.** *Soient $\Gamma \subset B(0,R)$ une courbe de Jordan rectifiable et $H \in \mathbb{R}$ tels que*

$$|H|R \leq 1.$$

Alors il existe une solution au problème (5.1).

De plus ce résultat est optimal comme le montre l'obstruction suivante due à Heinz [53].

Théorème 5.1.2 (Heinz, 1969)**.** *Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable de longueur $L(\Gamma)$. On suppose qu'il existe $u^0 \in \{u \in C^0(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^3)$ t.q. $u_{|\partial\mathbb{D}} = \Gamma\}$ et un vecteur $n^0 \in S^2$ tels que*

$$c^0 = \int_{\mathbb{D}} \langle n^0, u^0_x \wedge u^0_y\rangle \, dz > 0.$$

Alors si $H \in \mathbb{R}$ vérifie $|H| > \dfrac{L(\Gamma)}{2c^0}$, l'équation (5.1) n'admet aucune solution.

Par exemple, lorsque Γ est un cercle de rayon R, alors on ne peut y accrocher aucune surface à courbure moyenne constante plus grande que $\frac{1}{R}$. Par contre, si Γ est un cercle de rayon R et $|H|R < 1$ alors on constate qu'il existe deux solutions à (5.1), une « petite » S_1 et une « grande » S_2, comme le montre la figure suivante.

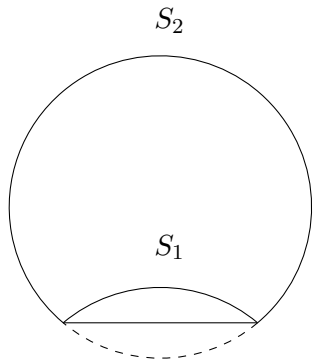


FIGURE 5.1 – Les deux solutions de (5.1) Lorsque Γ est un cercle

Il fut alors conjecturé qu'il devait en être de même pour un contour Γ et H vérifiant $|H|\|\Gamma\|_\infty < 1$. Cette conjecture fut démontrée indépendamment par Brezis et Coron [13] et Struwe [110].

Théorème 5.1.3. *Soient $\Gamma \subset B(0,R)$ une courbe de Jordan rectifiable et $H \in \mathbb{R}$ tel que*

$$|H|R < 1.$$

Alors il existe deux solutions distinctes au problème (5.1).

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur une méthode de type lemme du col. Toutefois, les suites de Palais-Smale considérées ne sont *a priori* pas compactes, la difficulté est donc de montrer que ces suites se situent sous un certain niveau d'énergie, afin de retrouver la compacité désirée. Cette preuve est à comparer avec celle de Brezis et Nirenberg [14] concernant l'existence d'une solution positive pour une équation elliptique à exposant de Sobolev critique, qui est elle même largement inspiré des travaux de Trudinger [119] et Aubin [4] sur le problème de Yamabe. On trouvera une preuve éclairante du résultat de Brezis et Nirenberg dans le livre de Struwe [113] sur les problèmes elliptiques non-linéaires.

Une fois l'existence de telles solutions démontrée, il reste deux points à explorer afin de résoudre complètement le problème géométrique : la régularité de telles solutions et l'existence de points singuliers (i.e. tel que $\nabla u(z) = 0$). Afin de ne pas rentrer dans les détails de ces sujets très techniques, nous donnons simplement deux résultats significatifs et nous renvoyons à [35] et [36] pour une étude complète de ces problèmes.

Théorème 5.1.4. *Soit Γ une courbe de Jordan de classe $C^{m,\alpha}$ avec $m \geq 2$ et $\alpha > 0$. Si u est solution faible de (5.1), alors $u \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$.*

En d'autres termes, pour des courbes assez régulières, les solutions héritent de la régularité de la courbe.

Théorème 5.1.5. *Soient Γ une courbe de Jordan de classe $C^{2,\alpha}$ et u une solution minimisante du problème (5.1), alors u n'a pas pas de point singulier sur $\mathbb{D}$. De plus, si Γ est analytique, alors u n' a pas de point singulier sur $\partial\mathbb{D}$.*

En effet l'existence d'un point branché donnerait lieu à un paramétrage multiple localement et donc viendrait contredire le fait que la solution est bien minimisante.

Une fois le problème géométrique résolu, il se pose un certain nombre de questions sur la nature des surfaces trouvées, comme par exemple le simple fait de savoir pour quel contour sont-elles plongées ? Stabilité en fonction du contour ? Combien de telles surfaces bordent un contour donné ?

Ces questions ont été largement traitées dans le cas des surfaces minimales. Par exemple, en 1978 Tomi et Tromba [115] ont prouvé, à l'aide de la théorie du degré, que chaque courbe lisse de $\mathbb{R}^3$ appartenant au bord d'un domaine convexe devait border un disque minimal plongé. Puis, en 1982, Almgren et Simon [2] montrent qu'il existe un disque minimal plongé stable, et enfin, la même année, Meeks et Yau [81] montrent que la solution de Douglas et Rado est effectivement plongée. Puis, en 1989, White [122], en reprenant l'idée de Tomi et Tromba d'utiliser la théorie du degré, donne une première description du nombre de disques plongés minimaux qu'admet un contour donné. Ces travaux se poursuivent encore aujourd'hui notamment grâce au lien étroit entre les surfaces minimales et la topologie des variétés de dimension 3, voir [52]. Plus généralement, on pourra consulter [57], notamment l'article de Colding et Minicozzi [31] qui se trouve dans le recueil, pour avoir une idée plus large des avancées récentes concernant la théorie des surfaces minimales.

Par contre ces questions restent largement ouvertes pour des H-surfaces générales et constituent un domaine très actif de l'analyse géométrique. Pour conclure ce paragraphe, nous donnons une conjecture qui reste ouverte malgré la simplicité de son énoncé, illustrant à quel point ce domaine est encore mal connu.

Conjecture 5.1.1. *Une surface plongée (ou disque immergé) de courbure moyenne constante non nulle bordant un cercle est un morceau de sphère.*

5.2 Surfaces à courbure moyenne constante à bord libre

Comme on l'a vu dans la section 1.4, le problème de partitionnement d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ donne également naissance à des surfaces à courbure moyenne constante. Leur existence étant assurée par la théorie géométrique de la mesure [84], on ne dispose d'aucune information sur la topologie de telles surfaces pour des domaines généraux. Cependant dans le cas de domaines strictement convexes, on sait qu'une telle surface est connexe et on dispose de bornes sur le nombre de composantes de son bord ainsi que sur son genre, voir [99]. D'ailleurs il est conjecturé que dans ce cas la surface est homéomorphe à un disque, voir [94].

Afin d'obtenir de telles surfaces de type disque, on peut, comme pour le problème de Plateau, considérer un problème variationnel : minimiser la fonctionnelle suivante

$$J_H(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2\, dz - (V(u) - V(\eta(u)))$$

sur

$$\left\{u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3 \text{ t.q } u(\partial\mathbb{D}) \in \partial\Omega \text{ et } V(u) = V\right\}$$

où η un opérateur de prolongement, de sorte que $\eta(u)(z) \in \partial\Omega$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $\eta(u)_{|\partial\mathbb{D}} = u_{|\partial\mathbb{D}}$, voir [111] pour plus de précision sur cet opérateur. L'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème est

$$\begin{cases} \Delta u = -2H\, u_x \wedge u_y, \\ \langle u_x, u_y \rangle = |u_x| - |u_y| = 0, \\ u(z) \in \partial\Omega \text{ pour tout } z \in \partial\mathbb{D}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Si de plus il s'agit d'une solution minimisante, on a :

$$\partial_\nu u(z) \perp T_{u(z)}\partial\Omega \text{ pour tout } z \in \partial\mathbb{D}. \tag{5.3}$$

On donne ici un résultat d'existence dû à Struwe [111]. Ici encore il s'agit de considérer des suites de Palais-Smale, par contre le comportement asymptotique est étudié à l'aide de la version parabolique de notre équation.

Théorème 5.2.1 (Struwe, 1988)**.** *Soient Ω un domaine difféomorphe à la boule unité et L le rayon de la plus petite boule contenant ce domaine. Alors il existe un ensemble $\mathcal{H}$ tel que*

$$0 \in \mathcal{H} \text{ et } \mathcal{H} \text{ est dense dans } \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right]$$

et de sorte que pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe une solution non triviale de (5.2) et (5.3).

On pourra aussi regarder un résultat similaire plus récent de Burger et Kuwert [16]. Au vu de ce résultat, on peut se demander ce qui se passe pour H grand. Surtout que dans ce cas, si on revient au problème de partitionnement, ces solutions enfermeraient de petits volumes et seraient probablement des disques puisque ne voyant pas la topologie du domaine. Cette intuition fut confirmée par Fall, [45]. Cependant, comme pour les constructions de Ye, et d'ailleurs les techniques sont sensiblement les mêmes, l'existence de telles solutions est sujette à une condition de courbure locale. Nous verrons par la suite qu'en fait cette condition est nécessaire.

Théorème 5.2.2 (Fall, 2007)**.** *Soient Ω un domaine lisse de $\mathbb{R}^3$ et $p \in \partial\Omega$ un point critique non-dégénéré de la courbure moyenne de $\partial\Omega$. Alors il existe une famille de solutions $u^\varepsilon \in C^2(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^3)$ de (5.2) et (5.3) pour $H = \frac{1}{\varepsilon}$, telle que $u^\varepsilon(\mathbb{D})$ soit plongée et $\|u^\varepsilon - p\|_\infty \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. De plus $\frac{1}{\varepsilon}u^\varepsilon$, correctement translaté, converge vers un hémisphère de rayon* 1.

Ce théorème est un analogue du théorème 3.2.1 pour les surfaces à courbure moyenne constante à bord libre, tant dans son énoncé que dans la méthode de démonstration qui considère une solution de l'équation limite, ici un hémisphère que l'on cherche à perturber via un théorème des fonctions implicites. Une fois ce parallèle fait, la question de la nécessité de la condition $\nabla H(p) = 0$ s'impose alors d'elle même. Une première réponse est apportée par Fall [46] qui démontre un analogue du théorème 3.3.2. En effet il montre que les solutions du problème de partitionnement, qui sont les équivalents des solutions du problème isopérimétrique dans ce contexte, converge vers un point de maximum de la courbure moyenne lorsque leur volume tend vers 0.

Théorème 5.2.3 (Fall, 2010)**.** *Les domaines isopérimétriques de petit volume d'un domaine lisse Ω de $\mathbb{R}^3$ se concentrent en un point de maximum de la courbure moyenne de $\partial\Omega$.*

Puis, comme pour le cas Riemannien, à l'aide d'une analyse asymptotique minutieuse, on démontre sous des hypothèses raisonnables que la condition $\nabla H(p) = 0$ est en fait nécessaire. D'une part, on suppose que le diamètre est contrôlé afin d'éviter d'avoir des solutions qui se concentrent sur des géodésiques par exemple. D'ailleurs, comme pour le cas riemannien de tels exemples ont été construit par Fall et Mahmoudi [47]. D'autre part, on suppose que l'aire est contrôlée afin d'éviter une infinité de bulles. Ces hypothèses faites, une analyse asymptotique montre qu'une telle suite de surfaces correctement dilatées converge vers une union de sphères et d'hémisphères. En particulier leurs traces au bord convergent vers une union de cercles. Une fois cette analyse faite, une utilisation adéquate de la formule d'équilibre montre le théorème suivant, [74].

Théorème 5.2.4. *Soient Ω un domaine lisse de $\mathbb{R}^3$ et une suite de disques plongés Σ^ε dans Ω vérifiant les hypothèses suivantes :*

(i) $\partial\Sigma^\varepsilon \subset \partial\Omega$ et $\partial\Sigma^\varepsilon$ et $\partial\Omega$ s'intersectent orthogonalement,

(ii) Σ^ε est à courbure moyenne constante égale à $\frac{1}{\varepsilon}$,

(iii) Le diamètre et l'aire de Σ^ε sont respectivement un $O(\varepsilon)$ et un $O(\varepsilon^2)$.

Alors, à une sous-suite près, Σ^ε converge vers $p \in \partial\Omega$ et on a nécessairement $\nabla H(p) = 0$.

La preuve de ce théorème est détaillée au chapitre suivant.

On conclut ce chapitre en donnant quelques résultats classiques de régularité pour les surfaces à courbure moyenne constante à bord libre et notamment une estimée *a priori* qui servira pour la preuve du théorème.

5.3 Régularité et estimée *a priori* sur les surfaces à courbure moyenne constante à bord libre

Dans cette section nous donnons un résultat général sur la régularité des surfaces à courbure moyenne constante à bord libre ; on trouvera tous les détails au chapitre 7 de [36].

Théorème 5.3.1. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^{m,\alpha}$ avec $m \geq 3$ et $\alpha > 0$ alors toute solution faible de (5.2) est $C^{m,\alpha}$.*

Comme dans le cas du problème de Plateau, les solutions héritent de la régularité du bord pourvu que celui-ci soit suffisamment lisse.

La preuve de ce résultat se décompose en trois étapes. Dans un premier temps, on démontre, à l'aide de l'inégalité isopérimétrique pour les surfaces, que les solutions sont $C^{0,\eta}$ jusqu'au bord. En effet le fait d'être à courbure moyenne constante donne une borne supérieure uniforme sur la courbure de Gauss et donc sur la constante isopérimétrique. Puis, à l'aide de bornes *a priori* dans des espaces $H^{k,p}$, on en déduit la régularité $C^{1,\frac{1}{2}}$ jusqu'au bord. Enfin à l'aide d'arguments classiques de *bootstrap*, on obtient que les solutions sont lisses à l'intérieur et ont jusqu'au bord la même régularité que la surface sur laquelle elles s'appuient pourvu que celle-ci soit au moins $C^{3,\alpha}$.

On donne ici l'estimée *a priori* qui est la clef de voûte de la deuxième étape et que l'on utilisera par la suite.

Théorème 5.3.2. *Soit Ω un domaine à bord lisse, dont on notera g la métrique du bord, et u une solution de (5.2). On suppose que u appartient à $C^{0,\eta}(\overline{\mathbb{D}})$. Alors, pour tout ouvert U de $\overline{\mathbb{D}}$ et tout $2 < p < +\infty$, il existe une constante c ne dépendant que de $\|g\|_3$, U, p ,$\int_U |\nabla u|^2 dz$ et du module de continuité de u telle que*

$$\int_U |\nabla u|^p dz < c.$$

Cette estimée avec la théorie elliptique standard nous permet d'obtenir des bornes uniformes du type

$$\|u\|_{2+\eta,U} < c,$$

où c ne dépendant que de $\|g\|_3$, U, p ,$\int_U |\nabla u|^2 dz$ et du module de continuité de u.

Remarque 5.3.1. *En particulier, on remarque que de toute suite de solutions avec une contrainte lisse et dont le gradient est uniformément borné sur un ouvert U de $\overline{\mathbb{D}}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément dans $C^2(U)$.*

Chapitre 6

Preuve du théorème 5.2.4

L'idée est d'appliquer la formule de la balance au bord de notre suite de surfaces afin de détecter la géométrie de $\partial\Omega$. Pour pouvoir en tirer assez d'informations, il va falloir bien connaître le comportement asymptotique de notre suite de surfaces. On commence par faire une décomposition en somme de sphères et d'hémisphères dans l'esprit de ce qu'on a déjà fait à la section 4.3.1. Il y a toutefois deux gros changements. D'une part, il y a notamment deux solutions limites (sphère et hémisphère). D'autre part, il faut obtenir une estimée L^∞ plutôt que l'estimée faible sur le gradient ; or l'équation se prête beaucoup mieux à l'obtention d'estimées sur le gradient. Enfin il faudra s'assurer que cette décomposition contient au moins un hémisphère, c'est-à-dire que le bord ne s'écrase pas en un point, ce qui nous empêcherait de conclure.

On considère un domaine lisse Ω de $\mathbb{R}^3$ et une suite de disques plongés Σ^ε dans Ω vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) $\partial\Sigma^\varepsilon \subset \partial\Omega$ et $\partial\Sigma^\varepsilon$ et $\partial\Omega$ s'intersectent orthogonalement,

(ii) Σ^ε est à courbure moyenne constante égale à $\frac{1}{\varepsilon}$,

(iii) Le diamètre et l'aire de Σ^ε sont respectivement un $O(\varepsilon)$ et un $O(\varepsilon^2)$.

Quitte à translater Ω et à extraire une sous-suite de Σ^ε, on peut supposer que Σ^ε se concentre en 0 et que de plus $0 \in \partial\Sigma^\varepsilon$.
On dilate maintenant l'espace par un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$ et on choisit un paramétrage conforme pour notre suite de surfaces, c'est-à-dire une suite de plongements $u^\varepsilon : \mathbb{D} \to \Omega$ tels que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = -2\, u^\varepsilon_x \wedge u^\varepsilon_y, \\ \langle u^\varepsilon_x, u^\varepsilon_y \rangle = \|u^\varepsilon_x\| - \|u^\varepsilon_y\| = 0, \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{D}, \\ &\|u^\varepsilon\|_\infty = O(1) \text{ et } \|\nabla u^\varepsilon\|_2 = O(1), \\ &u^\varepsilon(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\Omega^\varepsilon \text{ et } \left\langle u^\varepsilon_x \wedge u^\varepsilon_y, N^\varepsilon \right\rangle = 0 \text{ sur } \partial\mathbb{D}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $\Omega^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\Omega$ et N^ε est la normale sortante de $\partial\Omega^\varepsilon$. La régularité d'une telle suite de fonctions, dépend de la régularité du bord sur lequel elle vient s'accrocher, voir théorème 5.3.1. Dans le cas présent, ayant supposé le bord lisse, nos solutions sont automatiquement lisses jusqu'au bord.

6.1 Décomposition de u^ε en somme de sphères et d'hémisphères.

Théorème 6.1.1. *Soit u^ε une suite d'applications de $C^2(\overline{\mathbb{D}})$ solutions non-constantes de (6.1), alors soit u^ε converge uniformément vers 0, soit il existe $p \in \mathbb{N}$ et*

(i) $\omega^1, \dots, \omega^p$ des solutions de (4.11),

(ii) $a_1^\varepsilon, \dots, a_p^\varepsilon$ des suites de $\overline{\mathbb{D}}$, et

(iii) $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_p^\varepsilon$ des suites de nombres positifs telles que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_i^\varepsilon < +\infty$,

tels que, pour une sous-suite de u^ε (toujours notée u^ε) on ait

$$u_i^\varepsilon \to \omega^i \text{ dans } C^2_{loc}(\Omega_i \setminus S_i) \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ pour tout } 1 \le i \le p, \tag{A'}$$

où $u_i^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_i^\varepsilon\ . + a_i^\varepsilon)$, $\Omega_i = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \lambda_i^\varepsilon\ . + a_i^\varepsilon \in \mathbb{D} \right\}$ et
$S_i = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ \dfrac{a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \text{ t.q. } j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\} \right\}$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d_i^\varepsilon(a_j^\varepsilon)}{\lambda_j^\varepsilon} + \frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} \to +\infty \text{ pour tout } i \neq j, \tag{B'}$$

où $d_i^\varepsilon(x) = \sqrt{(\lambda_i^\varepsilon)^2 + |a_i^\varepsilon - x|^2}$,

$$d\left(u^\varepsilon(\mathbb{D}), \cup_{i=1}^k B_i\right) \not\to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0, \tag{D'}$$

où les B_i sont les ensembles limites des $\omega_i^\varepsilon(\mathbb{D})$, avec $\omega_i^\varepsilon = \omega_i\left(\frac{\cdot\ - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}\right)$, c'est-à-dire des sphères et des hémisphère.

Preuve du théorème 6.1.1 :

Nous allons extraire les bulles par induction, le processus s'arrêtera grâce à la borne uniforme sur l'énergie de u^ε.

Soit $k \ge 1$, on dit que u^ε vérifie la propriété (P_k) : s'il existe

(i) $\omega^1, \dots, \omega^k$ des solutions non-constantes de (4.11),

(ii) $a_1^\varepsilon, \dots, a_k^\varepsilon$ des suites de $\overline{\mathbb{D}}$ et

(iii) $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_k^\varepsilon$ des suites de réels positifs telles que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_i^\varepsilon < +\infty$,

tels que, pour une sous-suite u^ε (toujours notée u^ε) on ait

$$u_i^\varepsilon \to \omega_i \text{ in } C^2_{loc}(\Omega_i \setminus S_i) \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ pour tout } 1 \le i \le k, \tag{A_k}$$

où $u_i^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_i^\varepsilon\ . + a_i^\varepsilon)$, $\Omega_i = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \lambda_i^\varepsilon\ . + a_i^\varepsilon \in \mathbb{D} \right\}$ et
$S_i = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ \dfrac{a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \text{ t.q. } j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\} \right\}$.

$$\frac{d_i^\varepsilon(a_j^\varepsilon)}{\lambda_j^\varepsilon} + \frac{d_j^\varepsilon(a_i^\varepsilon)}{\lambda_i^\varepsilon} \to +\infty \text{ quand } \varepsilon \to 0 \text{ pour tout } i \neq j, \tag{B_k}$$

où $d_i^\varepsilon(x) = \sqrt{(\lambda_i^\varepsilon)^2 + |a_i^\varepsilon - x|^2}$. De plus, lorsque $\Omega_i \neq \mathbb{R}^2$ alors $\omega^i_{|\partial\Omega_i}$paramètre (peut être plusieurs fois) un cercle de rayon 1.

Affirmation 1 : Si (P_k) est vraie pour $k \geq 1$ alors soit (P_{k+1}) est vraie soit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\min_{1\leq i\leq k} d_i^\varepsilon(z)\right) \left|\nabla\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(z)\right| = 0, \tag{6.2}$$

où $\omega_i^\varepsilon = \omega_i\left(\frac{\cdot - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}\right)$ **.**

Preuve de l'affirmation 1 :

Supposons que (P_k) est vraie et qu'il existe $\gamma_0 > 0$ et une sous-suite u^ε (toujours notée u^ε) telle que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\min_{1\leq i\leq k} d_i^\varepsilon(z)\right) \left|\nabla\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(z)\right| \geq \gamma_0. \tag{6.3}$$

Soit $a_{k+1}^\varepsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ tel que

$$\left(\min_{1\leq i\leq k} d_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon)\right) \left|\nabla\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(a_{k+1}^\varepsilon)\right| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\min_{1\leq i\leq k} d_i^\varepsilon(z)\right) \left|\nabla\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(z)\right|.$$

On définit $\lambda_{k+1}^\varepsilon$ par

$$\left|\nabla\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(a_{k+1}^\varepsilon)\right| = \frac{1}{\lambda_{k+1}^\varepsilon}.$$

En remarquant que $\min\limits_{1\leq i\leq k} d_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon)$ est borné, il est alors clair que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_{k+1}^\varepsilon < +\infty. \tag{6.4}$$

Il y a maintenant deux cas à considérer.

Premier cas :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\min\limits_{1\leq i\leq k} d_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon)}{\lambda_{k+1}^\varepsilon} = +\infty. \tag{6.5}$$

Dans ce cas, (B_{k+1}) est automatiquement vérifiée. On pose alors

$$u_{k+1}^\varepsilon(z) = u^\varepsilon\left(\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon\right) \text{ pour tout } z \in \overline{\Omega}_{k+1}^\varepsilon$$

où $\Omega_{k+1}^\varepsilon = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon \in \mathbb{D}\right\}$.

Soit $z \in \Omega^\varepsilon_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}|\nabla u^\varepsilon_{k+1}(z)| &= \lambda^\varepsilon_{k+1}|\nabla u^\varepsilon(\lambda^\varepsilon_{k+1}z + a^\varepsilon_{k+1})| \\ &\leq \lambda^\varepsilon_{k+1}\left|\nabla\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega^\varepsilon_i\right)(\lambda^\varepsilon_{k+1}z + a^\varepsilon_{k+1})\right| \\ &+ \lambda^\varepsilon_{k+1}\left|\nabla\left(\sum_{i=1}^k \omega^\varepsilon_i\right)(\lambda^\varepsilon_{k+1}z + a^\varepsilon_{k+1})\right|.\end{aligned} \tag{6.6}$$

D'après (A_k) et (6.5), on voit facilement que

$$\lambda^\varepsilon_{k+1}\left|\nabla\left(\sum_{i=1}^k \omega^\varepsilon_i\right)(\lambda^\varepsilon_{k+1}z + a^\varepsilon_{k+1})\right| = o(1). \tag{6.7}$$

Puis en utilisant la définition de a^ε_{k+1}, (6.5), (6.6) et (6.7) on a

$$|\nabla u^\varepsilon_{k+1}(z)| \leq \frac{\min_{1\leq i\leq k} d^\varepsilon_i(a^\varepsilon_{k+1})}{\min_{1\leq i\leq k} d^\varepsilon_i(\lambda^\varepsilon_{k+1}z + a^\varepsilon_{k+1})} + o(1) = 1 + o(1). \tag{6.8}$$

Alors $|\nabla u^\varepsilon_{k+1}|$ est borné sur tout sous-ensemble compact de $\overline{\Omega}^\varepsilon_{k+1}$. De plus, grâce à l'invariance conforme de notre équation, u^ε_{k+1} vérifie toujours (6.1). Donc, en appliquant la théorie elliptique standard, voir la section 5.3 et [49], on voit qu'il existe une sous-suite de u^ε (toujours notée u^ε) et $\omega^{k+1} \in C^2(\overline{\Omega}_{k+1})$ tels que

$$u^\varepsilon_{k+1} \to \omega^{k+1} \text{ dans } C^2_{loc}\left(\overline{\Omega_{k+1}}\right)$$

et

$$\Delta\omega^{k+1} = -2\,\omega^{k+1}_x \wedge \omega^{k+1}_y \text{ sur } \Omega_{k+1},$$

où $\Omega_{k+1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Omega^\varepsilon_{k+1}$. Ici encore il y a deux possibilités, soit Ω_{k+1} est le plan tout entier, soit c'est un disque ou un demi plan (ce qui est conformément équivalent). Dans le cas du disque ou du demi plan, la condition au bord passe à la limite, c'est-à-dire, à rotation près,

$$\begin{aligned}&\omega^{k+1}(\partial\Omega_{k+1}) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ &\text{et} \\ &\left\langle \omega^{k+1}_x \wedge \omega^{k+1}_y, N\right\rangle = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{k+1},\end{aligned}$$

où $N = (0,0,1)$. De plus, grâce à l'invariance conforme de $\|\nabla.\|_2$, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$u^\varepsilon_{k+1} \rightharpoonup \omega^{k+1} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2)$$

et

$$\|\nabla\omega^{k+1}\|_2 \leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\|\nabla u^\varepsilon_{k+1}\|_2 = \liminf_{\varepsilon\to 0}\|\nabla u^\varepsilon\|_2 < +\infty.$$

Finalement, d'après le lemme 6.4.1, ω^{k+1} est bien de la forme voulue, de plus ω^{k+1} est non-constante puisque $|\nabla\omega^{k+1}(0)| = 1$. Ceci achève la preuve de (P_{k+1}) dans ce cas.

Deuxième cas :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\min\limits_{1\le i\le k} d_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon)}{\lambda_{k+1}^\varepsilon}=\gamma>0. \tag{6.9}$$

Tout d'abord, on a besoin de montrer (B_{k+1}). Supposons par l'absurde que (B_{k+1}) soit faux, alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe $1\le i_0\le k$ tel que

$$d_{k+1}^\varepsilon(a_{i_0}^\varepsilon)=O(\lambda_{i_0}^\varepsilon) \text{ et } d_{i_0}^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon)=O(\lambda_{k+1}^\varepsilon). \tag{6.10}$$

D'une part, (6.10) donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_{k+1}^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon}=c \text{ et } |a_{i_0}^\varepsilon-a_{k+1}^\varepsilon|=O(\lambda_{i_0}^\varepsilon), \tag{6.11}$$

où c est une constante positive. D'autre part, grâce à (A_k) et (B_k), on a

$$\nabla\left(\left(u^\varepsilon-\sum_{i=1}^k\omega_i^\varepsilon\right)(\lambda_{i_0}^\varepsilon\ .+a_{i_0}^\varepsilon)\right)\to 0 \text{ dans } C^2_{loc}\left(\Omega_{i_0}\setminus S_{i_0}\right). \tag{6.12}$$

Donc, d'après (6.9) et (6.11), on a nécessairement

$$d\left(\frac{a_{k+1}^\varepsilon-a_{i_0}^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon},S_{i_0}\right)=o(1).$$

Soit $j\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i_0\}$ tel que

$$\left|\frac{a_{k+1}^\varepsilon-a_j^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon}\right|=o(1).$$

En utilisant (6.9) et (6.11), on remarque que pour ε assez petit, on a

$$\frac{\lambda_j^\varepsilon}{\lambda_{k+1}^\varepsilon}\ge\frac{\gamma}{2},$$

puis, en utilisant encore (6.11), on remarque que, pour ε assez petit, on a

$$\frac{\lambda_j^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon}\ge\frac{\gamma}{4c},$$

Mais, puisque $\frac{a_{i_0}^\varepsilon-a_j^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon}=O(1)$ et i_0 et j satisfont (B_k), on a forcément

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon=o(\lambda_j^\varepsilon).$$

Donc pour tout j tel que $\frac{a_{k+1}^\varepsilon-a_j^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon}=o(1)$, on a

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon=o(\lambda_j^\varepsilon).$$

En particulier, d'après (A_k), il existe $\delta>0$ tel que pour tout $z\in B(0,\delta)$, on ait

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon|\nabla\omega_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon+z\lambda_{i_0}^\varepsilon)|=o(1) \text{ pour tout } i\ne i_0.$$

On voit alors facilement que

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon| = O(1) \text{ sur } B(a_{k+1}^\varepsilon, \delta\lambda_{i_0}^\varepsilon).$$

En utilisant une fois de plus la théorie elliptique standard, quitte à extraire une sous-suite, on voit que $u_{i_0}^\varepsilon$ converge vers ω^{i_0} dans $C^2_{loc}\left(B\left(c_{k+1}, \frac{\delta}{2}\right)\right)$ où $c_{k+1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a_{k+1}^\varepsilon - a_{i_0}^\varepsilon}{\lambda_{i_0}^\varepsilon}$. On en déduit alors que

$$|\nabla(u_{i_0}^\varepsilon - \omega^{i_0})(a_{k+1}^\varepsilon)| \to 0,$$

ce qui entraîne que

$$\lambda_{i_0}^\varepsilon \left|\nabla\left(\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(a_{k+1}^\varepsilon)\right)\right| \to 0,$$

ce qui, d'après (6.12), est une contradiction avec (6.9) et prouve (B_{k+1}).

Maintenant, on pose

$$u_{k+1}^\varepsilon = u^\varepsilon(\lambda_{k+1}^\varepsilon\ .\ + a_{k+1}^\varepsilon) \text{ pour tout } z \in \Omega_{k+1}^\varepsilon,$$

où $\Omega_{k+1}^\varepsilon = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon \in \mathbb{D}\right\}$. Soit $z \in \overline{\Omega_{k+1}^\varepsilon} \setminus \{S_{k+1}\}$, on a

$$\begin{aligned} |\nabla u_{k+1}^\varepsilon(z)| &= \lambda_{k+1}^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon(\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon)| \\ &\le \lambda_{k+1}^\varepsilon \left|\nabla\left(u^\varepsilon - \sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon)\right| \\ &+ \lambda_{k+1}^\varepsilon \left|\nabla\left(\sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon)\right|. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Grâce à (A_k) et (6.9), on obtient

$$\lambda_{k+1}^\varepsilon \left|\nabla\left(\sum_{i=1}^k \omega_i^\varepsilon\right)(\lambda_{k+1}^\varepsilon\ .\ + a_{k+1}^\varepsilon)\right| = O\left(\frac{1}{d(z, S_{k+1})}\right). \tag{6.14}$$

Puis en utilisant la définition de a_{k+1}^ε, (6.13) et (6.14) on a

$$|\nabla u_{k+1}^\varepsilon(z)| \le \frac{\min_{1\le i\le k} d_i^\varepsilon(a_{k+1}^\varepsilon)}{\min_{1\le i\le k} d_i^\varepsilon(\lambda_{k+1}^\varepsilon z + a_{k+1}^\varepsilon)} + O\left(\frac{1}{d(z, S_{k+1})}\right) = O\left(\frac{1}{d(z, S_{k+1})}\right). \tag{6.15}$$

Alors $|\nabla u_{k+1}^\varepsilon|$ est borné sur tout sous-ensemble compact de $\overline{\Omega_{k+1}^\varepsilon} \setminus S_{k+1}$. De plus, grâce à l'invariance conforme de l'équation, u_{k+1}^ε vérifie toujours (6.1). Donc, d'après la théorie elliptique standard, voir la section 5.3 et [49], il existe une sous-suite de u^ε (toujours notée u^ε) et $\omega^{k+1} \in C^2(\overline{\Omega_{k+1}} \setminus S_{k+1})$ telle que

$$u_{k+1}^\varepsilon \to \omega^{k+1} \text{ dans } C^1_{loc}(\overline{\Omega_{k+1}} \setminus S_{k+1}),$$

et

$$\Delta\omega^{k+1} = -2\,\omega_x^{k+1} \wedge \omega_y^{k+1} \text{ sur } \Omega_{k+1} \setminus S_{k+1}$$

où $\Omega_{k+1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega^\varepsilon_{k+1}$. Comme précédemment, il y a deux possibilités, soit Ω_{k+1} est le plan tout entier, soit c'est un disque ou un demi plan (ce qui est conformément équivalent). Dans le cas du disque ou du demi-plan, la condition au bord passe à la limite, c'est-à-dire, à rotation près,

$$\begin{aligned}&\omega^{k+1}(\partial\Omega_{k+1}) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}\\ &\text{et}\\ &\left\langle \omega^{k+1}_x \wedge \omega^{k+1}_y, N\right\rangle = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{k+1},\end{aligned}$$

où $N = (0,0,1)$.
De plus, grâce à l'invariance conforme de $\|\nabla.\|_2$, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$u^\varepsilon_{k+1} \rightharpoonup \omega^{k+1} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2)$$

et

$$\|\nabla\omega^{k+1}\|_2 \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon_{k+1}\|_2 = \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_2 < +\infty.$$

Alors, ω^{k+1} est solution de (4.11) sur Ω_{k+1} en entier et donc ω^{k+1} est bien de la forme voulue. Enfin, on a besoin de monter que ω^{k+1} est non-constante. C'est évident si $0 \notin S_{k+1}$, puisque dans ce cas $|\nabla\omega^{k+1}(0)| = 1$. Sinon, pour tout i_0 tel que

$$\frac{|a^\varepsilon_{i_0} - a^\varepsilon_{k+1}|}{\lambda^\varepsilon_{k+1}} = o(1),$$

d'après (6.9) et (B_{k+1}), on a

$$\lambda^\varepsilon_{i_0} = o(\lambda^\varepsilon_{k+1}).$$

Puis en reprenant l'argument de la preuve de (B_{k+1}) on montre que

$$\nabla u^\varepsilon_{k+1} \to \nabla\omega^{k+1} \text{ sur } B(0,\delta),$$

où $\delta > 0$. Ceci entraine que, dans tous les cas, $|\nabla\omega^{k+1}(0)| = 1$ et donc ω^{k+1} est non-constante. Ceci prouve (P_{k+1}) dans le deuxième cas. L'étude de ces deux cas clôt la preuve de l'affirmation 1. □

Ensuite, on a besoin de démontrer une affirmation sur la croissance de l'énergie de la somme des bulles. En fait, en utilisant (B_k), on montre que les bulles n'interagissent pas au sens faible et que chacune apporte au moins l'énergie d'un hémisphère, c'est-à-dire 4π.

Affirmation 2 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et

(i) $\omega^1, \dots, \omega^k$ **des solutions non-constantes de (4.11),**

(ii) $a^\varepsilon_1, \dots, a^\varepsilon_k$ **des suites de $\overline{\mathbb{D}}$, et**

(iii) $\lambda^\varepsilon_1, \dots, \lambda^\varepsilon_k$, **des suites de réels positifs telles que** $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda^\varepsilon_i = 0$,

tels que, avec u^ε, ils satisfassent (P_k). Alors

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_2^2 \ge \sum_{i=1}^k \|\nabla\omega^i\|_2^2 \ge 4\pi k.$$

Preuve de l'affirmation 2 :

Soit R un nombre réel positif, grâce à (B_k), pour ε assez petit, on a

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla u^\varepsilon|^2 dz \geq \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{D}\cap B(a_i^\varepsilon, R\lambda_i^\varepsilon)\setminus\Omega_i^\varepsilon(R)} |\nabla u^\varepsilon|^2 dz,$$

où $\Omega_i^\varepsilon(R) = \cup_{j\neq i} B(a_j^\varepsilon, R\lambda_j^\varepsilon)$. Puis, grâce à (A_k), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 dz &\geq \sum_{i=1}^{k} \int_{(\mathbb{D}_i\cap B(0,R))\setminus\Omega_i(R)} |\nabla \omega_i|^2 dz + \delta_{\varepsilon,R} \\ &\geq 4\pi k + \delta_{\varepsilon,R} \end{aligned} \tag{6.16}$$

où $\Omega_i(R) = \cup_{x\in S_i} B(x, \dfrac{1}{R})$ et $\lim\limits_{R\to+\infty} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_{\varepsilon,R} = 0$. Ici on minore l'énergie d'une solution par la plus petite *a priori*, c'est-à-dire celle d'un hémisphère. □

Preuve du théorème :

On commence par définir $a_1^\varepsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ et λ_1^ε par

$$|\nabla u^\varepsilon(a_1^\varepsilon)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\nabla u^\varepsilon(z)|$$

et

$$|\nabla u^\varepsilon(a_1^\varepsilon)| = \frac{1}{\lambda_1^\varepsilon}.$$

Soit λ_1^ε converge vers l'infini et alors u^ε converge uniformément vers 0 et le théorème est démontré. Sinon on pose

$$u_1^\varepsilon(z) = u^\varepsilon(a_1^\varepsilon + \lambda_1^\varepsilon z) \text{ pour tout } z \in \Omega_1^\varepsilon$$

où $\Omega_1^\varepsilon = \big\{z \in R^2 \text{ s.t. } a_1^\varepsilon + \lambda_1^\varepsilon z \in \mathbb{D}\big\}$.

Il est clair que $|\nabla u_1^\varepsilon|$ est borné sur tout sous-ensemble compact de $\overline{\Omega_1^\varepsilon}$. De plus grâce à l'invariance conforme de notre équation u_1^ε vérifie toujours (6.1). Donc, en appliquant la théorie elliptique standard, voir la section 5.3 et [49], on voit qu'il existe une sous-suite de u_1^ε (toujours notée u_1^ε) et $\omega^1 \in C^2(\Omega_1)$ tels que

$$u_1^\varepsilon \to \omega^1 \text{ dans } C^2_{loc}(\overline{\Omega_1})$$

et

$$\Delta\omega^1 = -2\,\omega_x^1 \wedge \omega_y^1 \text{ sur } \Omega_1,$$

où $\Omega_1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Omega_1^\varepsilon$. Il y a alors deux possibilités pour Ω_1, c'est soit le plan tout entier, soit un disque ou un demi plan (ce qui est conformément équivalent). Dans ce dernier cas, la condition

au bord passe à la limite, c'est-à-dire, à rotation près,

$$\omega^1(\partial\Omega_1) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$
$$\text{et}$$
$$\left\langle \omega_x^1 \wedge \omega_y^1, N \right\rangle = 0 \text{ sur } \partial\Omega_k,$$

où $N = (0,0,1)$. De plus, grâce à l'invariance conforme de $\|\nabla . \|_2$, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$u_1^\varepsilon \rightharpoonup \omega^1 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2)$$

et

$$\|\nabla \omega^1\|_2 \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u_1^\varepsilon\|_2 = \liminf_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_2 < +\infty.$$

Alors, d'après le lemme 6.4.1, ω^1 est bien de la forme voulue. Enfin ω^1 est non constante puisque $|\nabla \omega^1(0)| = 1$.

Maintenant on peut commencer l'induction. En effet, grâce aux affirmations 1 et 2 et le fait que l'énergie est uniformément bornée, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que (P_k) est vérifiée et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{z \in \mathbb{D}} \left(\min_{0 \leq i \leq k} d_i^\varepsilon(z) \right) \left| \nabla \left(u^\varepsilon - \sum_{i=0}^{k} \omega_i^\varepsilon \right)(z) \right| = 0, \tag{6.17}$$

où $\omega_i^\varepsilon = \omega_i \left(\dfrac{\cdot - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} \right)$. Ce qui prouve (A') et (B').

Il ne reste plus qu'à montrer (D'). On commence par l'affirmation suivante :

Affirmation 3 :

$$\left\| u^\varepsilon - \sum_{i=1}^{k} \omega_i^\varepsilon \right\|_2 \to 0 \textbf{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{6.18}$$

Preuve de l'affirmation 3 *:*

On pose

$$R^\varepsilon = u^\varepsilon - \sum_{i=1}^{k} \omega_i^\varepsilon$$

et on suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\nabla R^\varepsilon\|_2 \geq \delta.$$

Sous ces hypothèses, nous allons trouver une bulle supplémentaire ce qui va venir contredire (6.17). Pour trouver cette bulle, on suit la méthode développée dans [12].

Tout d'abord on introduit la fonction de concentration

$$C^\varepsilon(t) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{B(z,t)} |\nabla R^\varepsilon|^2 \, dz.$$

Il est clair que C^ε est continue, croissante en t et que $C^\varepsilon(0) = 0$. On fixe ν tel que

$$0 < \nu < \min\left\{\frac{1}{2C_0}, \frac{\delta}{2}\right\},$$

où C_0 est la constante de l'inégalité 7.2.2. Donc il existe $a^\varepsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ et $\lambda^\varepsilon > 0$ tels que

$$C^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = \int_{B(a^\varepsilon,\lambda^\varepsilon)} |\nabla R^\varepsilon|^2 \, dz = \nu.$$

Puis on dilate autour de a^ε, en posant $\tilde{f} = f(\lambda^\varepsilon\, z + a^\varepsilon)$ pour tout $z \in \Omega^\varepsilon = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \lambda^\varepsilon z + a^\varepsilon \in \mathbb{D}\right\}$, et on a

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla \tilde{R}^\varepsilon|^2 dz = \|\nabla R^\varepsilon\|_2^2 \leq C,$$

et

$$\|\tilde{R}^\varepsilon\|_\infty \leq C,$$

où C est un réel positif. De plus, en utilisant (6.1), on remarque que $\tilde{R}^\varepsilon$ satisfait

$$\Delta \tilde{R}^\varepsilon = -2\, \tilde{R}^\varepsilon_x \wedge \tilde{R}^\varepsilon_y + O\left(\sum_{i=0}^{k} |\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_i| \left(\sum_{j \neq i} |\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_j| + |\nabla \tilde{R}^\varepsilon|\right)\right)$$

D'autre part, d'après (B'), on a

$$|\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_i||\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_j| \to 0 \text{ dans } L^1_{loc}(\overline{\Omega^0}) \text{ pour } i \neq j$$

et, d'après (6.17), on a

$$|\nabla \tilde{\omega}^\varepsilon_i||\nabla \tilde{R}^\varepsilon| \to 0 \text{ dans } L^1_{loc}(\overline{\Omega^0}) \text{ pour tout } i,$$

avec $\Omega^0 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Omega^\varepsilon$. Finalement

$$\Delta \tilde{R}^\varepsilon = -2\, \tilde{R}^\varepsilon_x \wedge \tilde{R}^\varepsilon_y + h^\varepsilon,$$

où $h^\varepsilon \to 0$ dans $L^1_{loc}(\overline{\Omega^0})$ quand $\varepsilon \to 0$. Alors, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$\tilde{R}^\varepsilon \to R \text{ p.p. on } \Omega^0$$

et

$$\nabla R^\varepsilon \rightharpoonup \nabla R \text{ faiblement dans } L^2(\Omega^0).$$

De plus R est une solution faible de

$$\Delta R = -2 R_x \wedge R_y \text{ sur } \Omega^0.$$

Maintenant, grâce à notre choix de ν, nous allons montrer que la convergence faible est en fait une convergence forte. Soit $v^\varepsilon = \tilde{R}^\varepsilon - R$, alors v^ε vérifie

$$\Delta v^\varepsilon = -2\, v^\varepsilon_x \wedge v^\varepsilon_y - 2(v^\varepsilon_x \wedge R_y + R_x \wedge v^\varepsilon_y) + h^\varepsilon.$$

De plus, gâce au corollaire 7.2.1, il existe $\psi_\varepsilon \in H^1_0(\Omega^0)$ une solution de

$$\Delta\psi^\varepsilon = -2(v_x^\varepsilon \wedge R_y + R_x \wedge v_y^\varepsilon)$$

vérifiant

$$\|\nabla\psi^\varepsilon\|_2 + \|\psi^\varepsilon\|_\infty \leq \|\nabla v^\varepsilon\|_2 \|\nabla R\|_2. \tag{6.19}$$

D'autre part,

$$\int_{\Omega^0} |\nabla\psi^\varepsilon|^2 dz = -2\int_{\Omega^0} \langle \psi^\varepsilon, v_x^\varepsilon \wedge R_y + R_x \wedge v_y^\varepsilon\rangle\, dz.$$

Puis, en utilisant (6.19), on voit que $\psi^\varepsilon \wedge R_x$ et $\psi^\varepsilon \wedge R_y$ sont bornés dans $L^2(\Omega^0)$. Donc, puisque $\nabla v^\varepsilon \to 0$ faiblement dans $L^2(\Omega^0)$, il s'ensuit que

$$\int_{\Omega^0} |\nabla\psi^\varepsilon|^2 dz \to 0.$$

On en déduit que

$$\Delta v^\varepsilon = -2\, v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon + g^\varepsilon,$$

où $g^\varepsilon \to 0$ dans $D'(\overline{\Omega^0})$.

Finalement, soit $\phi \in C_c^\infty(\overline{\Omega^0})$ tel que $\mathrm{supp}(\phi)$ soit contenu dans une boule de rayon 1, en utilisant le lemme 7.2.2, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^0} |\nabla(\phi v^\varepsilon)|^2 dz &= -2\int_{\Omega^0} \langle v^\varepsilon, \phi v_x^\varepsilon \wedge \phi v_y^\varepsilon\rangle dz + o(1),\\ &\leq 2\left(C_0 \|\nabla v^\varepsilon_{|supp(\phi)}\|_2\right) \|\nabla(\phi v^\varepsilon)\|_2^2 + o(1).\end{aligned}$$

Grâce à notre choix de λ^ε, on a $C_0\|\nabla v^\varepsilon_{|supp(\phi)}\|_2 \leq \frac{1}{2}$, ce qui donne finalement

$$\int_{\Omega^0} |\nabla(\phi v^\varepsilon)|^2 dz = o(1)$$

ce qui prouve que

$$\nabla\tilde{R}^\varepsilon \to \nabla R \text{ fortement dans } L^2_{loc}(\overline{\Omega^0}).$$

Enfin, on peut remarquer que R n'est pas constante puisque $\|\nabla R\|_2 = \nu > 0$. Mais, d'après (6.17), on a que, pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, il existe i tel que

$$|\nabla\tilde{R}^\varepsilon(z)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_i^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon}\right)^2 + \left|z + \frac{a^\varepsilon - a_i^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon}\right|^2}}\right),$$

ce qui est une contradiction et prouve (6.18). □

Nous allons maintenant transformer notre décomposition H^1 en une décomposition L^∞. La décomposition H^1 signifie que la totalité de l'aire de notre surface est prise asymptotiquement dans les sphères et hémisphères de la décomposition. La décomposition L^∞ consiste à dire que, géométriquement, notre suite de surfaces s'approche uniformément de l'union de sphères et d'hémisphères limites.

Une idéee pourrait être d'utiliser l'inégalité de Wente, théorème 7.2.1, comme le font Brezis et Coron dans [12] afin de transformer une estimée H^1 en estimée L^∞ dans le cas des suites de solutions du problème de Plateau. Le problème ici est que, contrairement à [12], on ne contrôle pas ce qui se passe au bord. Afin de contourner cette difficulté nous allons prolonger nos surfaces par réflexion à l'extérieur de Ω, ce qui est possible car nos surfaces s'y attachent orthogonalement.

Nous allons donc réfléchir nos surfaces par rapport à $\partial\Omega^\varepsilon$ qui est presque un plan. Ainsi notre transformation sera presque une isométrie (en fait une symétrie) et conservera presque la courbure moyenne. De plus nos nouvelles surfaces seront au moins $C^{1,1}$ puisque nos surfaces et $\partial\Omega^\varepsilon$ se rencontrent orthogonalement.

Puisque $\partial\Omega^\varepsilon$ converge uniformément vers un plan, il existe un diffeomorphism $\psi^\varepsilon : B(0,2R) \to \mathbb{R}^3$, où R est choisi de sorte que $u^\varepsilon(\mathbb{D}) \subset B(0,R)$, qui envoie $\partial\Omega^\varepsilon \cap B(0,2)$ sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et qui préserve l'orthogonalité sur $\partial\Omega^\varepsilon$. En fait il suffit de relever le feuilletage réalisé par le fibré normal de $\partial\Omega^\varepsilon$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle surface de courbure moyenne presque égale à 1. On peut alors étendre notre application à S^2. Ici S^2 est identifié avec la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. On pose

$$v^\varepsilon(z) = -\begin{pmatrix} (v^\varepsilon)^1 \\ (v^\varepsilon)^2 \\ -(v^\varepsilon)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{z} \end{pmatrix} \text{ pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$$

où $v^\varepsilon = \psi^\varepsilon \circ u^\varepsilon$. En utilisant le fait que $v^\varepsilon(\overline{\mathbb{D}})$ et $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ se rencontrent orthogonalement, on montre que v^ε est $C^{1,1}$. On pose alors $\tilde{u}^\varepsilon = \psi^{-1} \circ v^\varepsilon$ qui est aussi $C^{1,1}$ avec une courbure moyenne qui converge uniformément vers 1.

Nous sommes alors en mesure de démontrer notre théorème. Supposons par l'absurde que nos surfaces ne convergent pas vers l'union de sphères. Alors la surface prolongée est telle que

$$d\left(\tilde{\Sigma}^\varepsilon, \cup_{i=1}^k \tilde{B}_i\right) \not\to 0,$$

où $\tilde{\Sigma}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon(S^2)$ et $\tilde{B}_i$ est l'union des sphères et hémisphères B_i et de leurs symétriques par rapport à $T_0\partial\Omega$.

Alors il existe $y^\varepsilon \in \tilde{\Sigma}^\varepsilon$ tel que

$$d\left(y^\varepsilon, \cup_{i=1}^k \tilde{B}_i\right) \not\to 0. \tag{6.20}$$

Soit $z^\varepsilon \in \hat{C}$ tel que $\tilde{u}^\varepsilon(z^\varepsilon) = y^\varepsilon$. Nous allons démontrer que u^ε admet un voisinage de z^ε sur lequel son énergie ne tend pas vers 0. En effet une surface dont la courbure moyenne est bornée qui passe par le centre d'une boule doit utiliser une certaine énergie pour quitter cette boule. D'ailleurs on retrouve cette idée lorsqu'on cherche à établir des formules de monotonie pour des surfaces dont la courbure moyenne est contrôlée. Ici on se contente simplement de monter que l'aire d'une telle surface ne peut être arbitrairement petite si son diamètre est minoré.

Puisque la courbure moyenne est uniformément bornée, la courbure de Gauss de notre surface est uniformément bornée par une constante positive K_0. Or, d'après (6.20), il existe $r_0 > 0$ de sorte que

$$B\left(y^\varepsilon, r_0\right) \cap \left(\cup_{i=1}^k \tilde{B}_i\right) = \emptyset.$$

Ensuite en utilisant un principe de comparaison de Bishop, voir théorème III.4.2 de [22], qui affirme que l'aire d'une boule sur une surface est minorée par l'aire de la boule de même rayon d'un espace modèle dont la courbure contrôle celle de notre surface, on voit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\left(B\left(y^\varepsilon, \frac{r_0}{2}\right) \cap \tilde{\Sigma}^\varepsilon\right) &\geq \mathrm{Vol}\left(B_{\tilde{\Sigma}^\varepsilon}\left(y^\varepsilon, \frac{r_0}{2}\right)\right) \\
&\geq \mathrm{Vol}\left(B_{M_{K_0}}\left(y^\varepsilon, \frac{r_0}{2}\right)\right) \\
&\geq C_0 r_0^2,
\end{aligned}$$

où M_{K_0} est l'espace modèle à courbure constante K^0 et C^0 est une constante positive. On voit alors que u^ε a son énergie uniformément minorée dans un voisinage de z^ε dont l'image par u^ε est loin des bulles, ce qui est une contradiction avec l'affirmation 3 puisque que toute l'aire de u^ε est prise par les sphères d'après la décomposition H^1. Ceci prouve (D') et achève la preuve du théorème. ■

6.2 Il y a au moins un hémisphère dans la décomposition

Pour démontrer notre résultat, il faut éliminer les surfaces qui viennent s'accrocher sur le bord de Ω^ε avec un bord qui se concentre en un point. Pour cela il suffit de montrer que dans la décomposition du théorème 6.1.1, il y a au moins une bulle dont le domaine de définition n'est pas le plan tout entier, c'est-à-dire qu'il y a au moins un hémisphère et pas seulement des sphères entières. En fait, nos surfaces étant plongées, on peut même supposer que les bulles sont simples. Pour cela on procède comme dans la preuve du théorème 4.3.1 en appliquant le lemme 4.7.1.

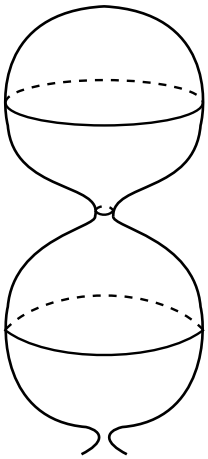


FIGURE 6.1 – Deux bulles jointes par un cou

L'idée de la démonstration repose sur le principe du maximum d'Aleksendrov exposé à la section 2.1.2 qui va interdire l'existence de cou, voir la figure 6.1, et donc l'existence de plusieur sphère. Donc il ne pourra en y avoir qu'une mais celle-ci ne peut se recoller au bord en faisant un angle droit.

Affirmation : Soit u^ε une suite d'applications de $C^2(\overline{\mathbb{D}})$ solutions de (6.1). On note p le nombre de bulles données par le théorème 6.1.1, ce nombre se décompose en k sphères et l hémisphères, de sorte que $p = k+l$. Alors on a forcément $l \geq 1$.

Preuve de l'affirmation :

Supposons que $l = 0$. Nous allons montrer dans un premier temps que $k \leq 1$, c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir de cou pour une telle suite de surfaces.

On suppose que $k \geq 2$ et on considère la bulle la plus haute, c'est-à-dire celle correspondant au plus petit λ_i^ε. On supposera que $i = 1$. D'après (B'), il ne peut y avoir d'autre bulle proche, c'est-à-dire, $u_1^\varepsilon \to \omega^1$ dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, où $u_1^\varepsilon = u^\varepsilon(a_1^\varepsilon + \lambda_1^\varepsilon\,.\,)$.

La bulle la plus haute est sur une autre bulle. Plus précisément, il existe $i > 1$ et $R_0 > 0$ tels que pour tout $R > 0$ on ait $B(a_1^\varepsilon, R\lambda_1^\varepsilon) \subset B(a_i^\varepsilon, R_0\lambda_i^\varepsilon)$ pour ε assez petit.

Sinon cette bulle serait isolée et deviendrait tangente au plan tangent à $\partial\Omega$ en 0. En effet, il existe $z^0 \in \partial\mathbb{D}$ tel que pour tout $R > 0$ et pour tout $z^\varepsilon \in \partial B(a_1^\varepsilon, R\lambda_1^\varepsilon)$, il existe un chemin Γ de $\overline{\mathbb{D}}$ joignant z^ε à z^0 évitant les autres bulles. Donc d'après l'estimée (6.17), pour ε assez petit, la bulle ω_1^ε serait quasiment tangente à $\partial\Omega^\varepsilon$. Ceci empêche l'existence d'une autre bulle isolé, car celle-ci serait également quasiment tangente à $\partial\Omega^\varepsilon$ au même point, puisque l'on peut prendre le même z^0 pour les deux bulles. Ceci empêcherait l'existence de cette seconde bulle tout en restant plongé et à l'intérieur de Ω. Donc cette seconde bulle serait nécessairement sur la bulle la plus haute et donc encore plus haute ce qui est contradictoire.

Il existe donc i_0 et $R_0 > 0$ tels que pour tout $R > 0$ on ait $B(a_1^\varepsilon, R\lambda_1^\varepsilon) \subset B(a_{i_0}^\varepsilon, R_0\lambda_{i_0}^\varepsilon)$. On choisit le $\lambda_{i_0}^\varepsilon$ minimal vérifiant cette propriété. Dans ce cas on considère un voisinage de a_ε^1, $B(a_1^\varepsilon, r\lambda_{i_0}^\varepsilon)$, où $r > 0$ est choisi de sorte que ce voisinage ne contienne aucune autre bulle. Pour ε assez petit, l'image de ce voisinage par u^ε, que l'on notera $\tilde{\Sigma}^\varepsilon$, ressemble à une sphère accrochée sur un morceau de sphère, voir figure 6.2.

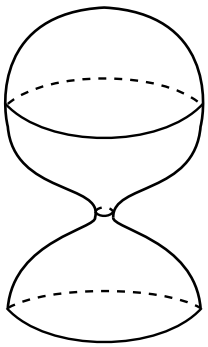


FIGURE 6.2 – $\tilde{\Sigma}^\varepsilon$ image par u^ε d'un voisinage de la plus haute bulle

Maintenant nous sommes en mesure d'appliquer le principe de réflexion d'Aleksandrov, comme on l'a présenté dans la preuve du théorème 2.1.3. Soit P^ε le plan tangent à $\tilde{\Sigma}^\varepsilon$ en $u^\varepsilon(a_1^\varepsilon)$ et ν^ε la normale extérieure en ce point. On pose $P_t^\varepsilon = P^\varepsilon + t\nu^\varepsilon$, $\tilde{\Sigma}_t^{\varepsilon,+} = \tilde{\Sigma}^\varepsilon \cap \{P^\varepsilon + u\nu^\varepsilon \text{ t.q. } u \geq t\}$ et $\tilde{\Sigma}_t^{\varepsilon,-}$ la réflexion de $\tilde{\Sigma}_t^{\varepsilon,+}$ par rapport à P_t^ε. On considère le premier temps t négatif tel que $\tilde{\Sigma}_t^{\varepsilon,-}$ rencontre $\tilde{\Sigma}^\varepsilon$. Pour ε assez petit, le point de contact ne peut être au bord de $\tilde{\Sigma}^\varepsilon$, à cause du cou. D'autre part au point de contact les surfaces ont la même orientation puisque $\tilde{\Sigma}_t^{\varepsilon,-}$ reste à « l'intérieur » de la bulle. Donc en appliquant le principe d'Aleksendrov, on a $\tilde{\Sigma}_t^{\varepsilon,-} = \tilde{\Sigma}^\varepsilon \setminus \tilde{\Sigma}_t^{\varepsilon,+}$, ce qui contredit clairement le fait que la surface soit plongée avec un bord. Ce qui prouve que $k \leq 1$.

Reste à exclure le cas $k = 0$ et $k = 1$. Si $k = 0$, alors $p = 0$ et dans ce cas la surface se concentre en un point. En fait on aurait même son aire qui tendrait vers 0, voir preuve du théorème 6.1.1 ou même appliquer directement le théorème 0.2 de [12]. Dans ce cas, on dilate alors l'espace par rapport à zéro de sorte que l'aire de la nouvelle surface, notée $\hat{\Sigma}^\varepsilon$ soit égale à 1. Ce qui impose à sa courbure moyenne de tendre vers 0. Mais alors la nouvelle surface $\hat{\Sigma}^\varepsilon$ tend vers une surface minimale bordant une courbe plane. En effet pour assurer la convergence il suffit de montrer que $|\nabla \hat{u}^\varepsilon|$ est uniformément borné, où $\hat{u}^\varepsilon$ est le paramétrage de $\hat{\Sigma}^\varepsilon$. La théorie de la régularité, exposée à la section 5.3, donnera la convergence dans $C^2(\overline{\mathbb{D}})$ par exemple.

Supposons que $\sup\limits_{\mathbb{D}} |\nabla \hat{u}^\varepsilon| \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$. On définit alors $a_1^\varepsilon \in \mathbb{D}$ et λ_1^ε de sorte que

$$|\nabla \hat{u}^\varepsilon(a_1^\varepsilon)| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |\nabla \hat{u}^\varepsilon(z)|$$

et

$$|\nabla \hat{u}^\varepsilon(a_1^\varepsilon)| = \frac{1}{\lambda_1^\varepsilon}.$$

Puis on pose

$$\hat{u}_1^\varepsilon(z) = \hat{u}^\varepsilon(a_1^\varepsilon + \lambda_1^\varepsilon z) \text{ pour tout } z \in \Omega_1^\varepsilon$$

où $\Omega_1^\varepsilon = \left\{ z \in R^2 \text{ s.t. } a_1^\varepsilon + \lambda_1^\varepsilon z \in \mathbb{D} \right\}$.

Il est clair que $|\nabla \hat{u}_1^\varepsilon|$ est borné sur tout sous-ensemble compact de $\overline{\Omega_1^\varepsilon}$. De plus, grâce à l'invariance conforme de notre équation, $\hat{u}_1^\varepsilon$ vérifie

$$\Delta \hat{u}_1^\varepsilon = o\left((\hat{u}_1^\varepsilon)_x \wedge (\hat{u}_1^\varepsilon)_y \right)$$

et

$$\langle (\hat{u}_1^\varepsilon)_x, (\hat{u}_1^\varepsilon)_y \rangle = |(\hat{u}_1^\varepsilon)_x| - |(\hat{u}_1^\varepsilon)_y| = 0.$$

Donc, en appliquant la théorie elliptique standard, voir la section 5.3 et [49], on voit qu'il existe une sous-suite de $\hat{u}_1^\varepsilon$ (toujours notée $\hat{u}_1^\varepsilon$) et $\beta^1 \in C^2(\Omega_1)$ tels que

$$\hat{u}_1^\varepsilon \to \beta^1 \text{ dans } C^2_{loc}(\overline{\Omega_1})$$

et

$$\begin{aligned} &\Delta \beta_1 = 0, \\ &\langle (\beta_1)_x, (\beta_1)_y \rangle = |(\beta_1)_x| - |(\beta_1)_y| = 0, \end{aligned}$$

où $\Omega_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1^\varepsilon$. Il y a alors deux possibilités pour Ω_1, soit le plan tout entier, soit un disque ou un demi plan (ce qui est conformément équivalent). Dans ce dernier cas la condition au bord passe à la limite, c'est-à-dire, à rotation près,

$$\begin{aligned}
&\beta^1(\partial\Omega_1) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\
&\text{et} \\
&\left\langle \beta^1_x \wedge \beta^1_y, N \right\rangle = 0 \text{ sur } \partial\Omega_k,
\end{aligned}$$

où $N = (0,0,1)$. Dans ce dernier cas β_1 se prolonge par symétrie en une application C^1 définie sur le plan tout entier.

De plus, grâce à l'invariance conforme de $\|\nabla . \|_2$, on a

$$\|\nabla\beta^1\|_2 \leq 2 \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla\hat{u}_1^\varepsilon\|_2 = 2 \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla\hat{u}^\varepsilon\|_2 = 2.$$

D'après le théorème de Liouville on a $\nabla\beta_1 \equiv 0$, ce qui vient contredire le fait que $|\nabla\beta_1(0)| = 1$. Ceci prouve que $|\nabla\hat{u}^\varepsilon|$ est uniformément borné et par la même la convergence de la suite de surfaces $\hat{\Sigma}^\varepsilon$.

Sous ces conditions de convergence, la condition au bord passe à la limite, c'est-à-dire la surface minimale ainsi obtenue rencontre le plan contenant son bord orthogonalement. Or d'après la théorie classique des surfaces minimales, voir [26], cette surface devrait être plane, ce qui vient contredire le fait qu'elle devrait faire au bord un angle droit avec le plan qui contient la courbe qu'elle borde.

Finalement, la seule possibilité restante est $k = 1$, c'est-à-dire qu'il y a exactement une bulle comme dans la figure suivante.

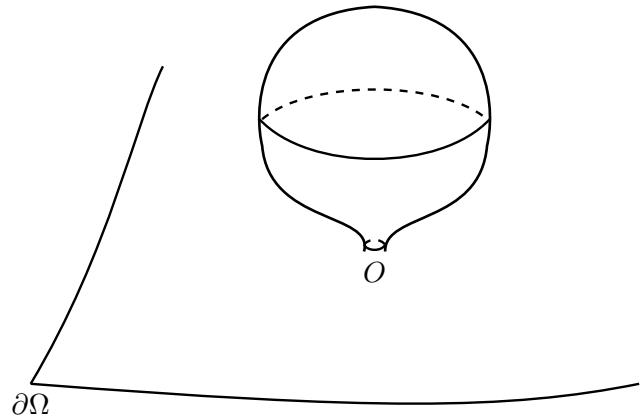


FIGURE 6.3 – Une bulle accrochée à $\partial\Omega$

Mais si on refait un principe de réflexion d'Aleksandrov par rapport au plan tangent de Σ^ε au point le plus éloigné de $\partial\Omega^\varepsilon$, le point de contact entre les deux surfaces est nécessairement au bord, sinon la surface devrait se refermer. En effet, car si l'on avait un point de contact intérieur alors on aurait une égalité locale entre les deux surfaces, puis globale par connexité,

ce qui est impossible puisque la partie supérieur est fermée contrairement à la partie inférieur. Donc le contact se fait au bord de $\partial\Sigma^\varepsilon$, or le plan tangent à Σ^ε au point le plus éloigné de $\partial\Omega^\varepsilon$ tendant vers celui de $\partial\Omega$, cela impose à l'angle que forme $\partial\Omega^\varepsilon$ et Σ^ε en ce point de contact de tendre vers zéro quand ε tend vers 0, ce qui est absurde et achève la preuve de l'affirmation.□

6.3 Preuve du théorème 5.2.4

D'après les deux dernières sections $u^\varepsilon(S^1)$ converge uniformément vers une union de cercles de rayon 1 centrés en des points (c_i) de $T_0\partial\Omega$.

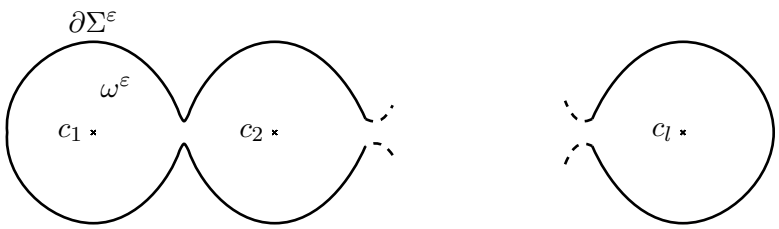


FIGURE 6.4 – ω^ε, surface bordée par $\partial\Sigma^\varepsilon$ sur $\partial\Omega^\varepsilon$

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le théorème 5.2.4. Pour cela on applique la formule de l'équilibre (1.11) à la suite Σ^ε. Ceci donne

$$2\int_{\omega^\varepsilon} \vec{N}^\varepsilon dv - \int_{\partial\Sigma^\varepsilon} \vec{\nu}^\varepsilon d\sigma = 0 \tag{6.21}$$

où $\vec{\nu}^\varepsilon$ est la conormale.

Le fait que Σ^ε et Ω^ε se rencontrent orthogonalement impose $\vec{\nu}^\varepsilon = \vec{N}^\varepsilon$. On fait alors un développement limité de $\vec{N}^\varepsilon$. Comme $\partial\Omega^\varepsilon$ est un graphe au dessus de son plan tangent on effectue le développement dans ces coordonnées. En fait, on ne va pas faire ce développement par rapport à 0 mais par rapport à un point $c^\varepsilon \in \partial\Omega^\varepsilon$ qui reste à distance finie de 0 et que l'on fixera plus tard :

$$\vec{N}^\varepsilon(z) = \vec{N}^\varepsilon(c^\varepsilon) + \varepsilon d\vec{N}_{c^\varepsilon}(z - c^\varepsilon) + \varepsilon^2 d^2\vec{N}_{c^\varepsilon}(z - c^\varepsilon)(z - c^\varepsilon) + o(\varepsilon^2).$$

Au premier ordre, le terme de gauche de (6.21) donne

$$(2|\omega^\varepsilon| - |\partial\Sigma^\varepsilon|)\,\vec{N}(c^\varepsilon). \tag{6.22}$$

On peut remarquer ici que grâce au théorème 6.1.1, on a d'une part

$$|\omega^\varepsilon| \to l\pi,$$

et d'autre part

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |\partial\Sigma^\varepsilon| \geq l2\pi.$$

Pour la première inégalité, on utilise la convergence L^∞ alors que pour la seconde, on utilise la convergence C^2_{loc}. Ensuite, en utilisant (6.22), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\partial\Sigma^\varepsilon| = l2\pi,$$

ce qui prouve que $\partial\Sigma^\varepsilon$ converge vers une union de l cercles au sens des courants ce qui justifie le fait que l'on puisse passer à la limite lorsqu'on intègre sur cet ensemble.

Afin d'éliminer (6.22) , on va projeter le terme de gauche de (6.21) orthogonalement à $\vec{N}^\varepsilon(c^\varepsilon)$, ce qui donne à l'ordre suivant

$$\varepsilon\pi^\varepsilon \left(2\int_{\omega^\varepsilon} d\vec{N}_{c^\varepsilon}(z-c^\varepsilon)\, dv - \int_{\partial\Sigma^\varepsilon} d\vec{N}_{c^\varepsilon}(z-c^\varepsilon)\, d\sigma \right) \tag{6.23}$$

où π^ε est la projection orthogonale parallèlement à $\vec{N}^\varepsilon(c^\varepsilon)$.

Puis on remarque qu'il existe c^ε tel que (6.23) soit nulle.En effet

$$2\int_{\omega^\varepsilon} (z-c^\varepsilon)\, dv - \int_{\partial\Sigma^\varepsilon} (z-c^\varepsilon)\, d\sigma$$

est le barycentre pondéré de $(\omega^\varepsilon, 2)$ et $(\partial\Sigma^\varepsilon, -1)$, donc il suffit de choisir c^ε correspondant à ce barycentre pour annuler (6.23).

Il reste alors le terme d'ordre 2, dans lequel on passe à la limite après avoir divisé par ε^2, ce qui donne

$$\pi^0 \left(2\int_{\omega^0} d^2\vec{N}_0(z-c^0)(z-c^0)\, dv - \int_{\partial\Sigma^0} d^2\vec{N}_{c^0}(z-c^0)(z-c^0)\, d\sigma \right) = 0 \tag{6.24}$$

où π^0 est la projection orthogonale parallèlement à $\vec{N}(0)$, c^0, ω^0 et $\partial\Sigma^0$ les limites respectives de c^ε, ω^ε et $\partial\Sigma^\varepsilon$. Comme annoncé plus haut, ω^0 et $\partial\Sigma^0$ sont respectivement une union de disques et une union de cercles de rayon 1 centrés en des points c_i. Dès lors on décompose l'intégrale sur ces sous-ensembles, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{l} \pi^0 \left(2\int_{D(c_i,1)} d^2\vec{N}_0(z-c^0)(z-c^0)\, dv - \int_{\partial D(c_i,1)} d^2\vec{N}_{c^0}(z-c^0)(z-c^0)\, d\sigma \right) =$$
$$\sum_{i=1}^{l} \pi^0 \left(2\int_{D(c_i,1)} d^2\vec{N}_0(z-c^i)(z-c^i)\, dv - \int_{\partial D(c_i,1)} d^2\vec{N}_{c^0}(z-c^i)(z-c^i)\, d\sigma \right).$$

Ici on a utilisé le fait que, par symétrie, l'intégrale est nulle si elle ne compte qu'un nombre impair de $z-c^i$ et le fait que $2|D(c_i,1)| = |\partial D(c_i,1)|$. Maintenant on intègre, ce qui trace $d^2\vec{N}$ et donne

$$l\left(2\int_{\mathbb{D}} |z|^2\, dz - 1 \right) \pi^0 \left(\Delta\vec{N}(0) \right) = 0.$$

Ceci donne d'après (1.9)

$$\frac{l}{2}\nabla H(0) = 0,$$

ce qui achève la preuve du théorème. ■

6.4 Résultats annexes

6.4.1 Classification des solution de l'équation limite quand le domaine est $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}$

Cette section est dédiée à une généralisation du lemme 4.1.1, où Brezis et Coron classifient les solutions de (4.11). Ici nous considérons des solutions définies sur le demi-plan et dont le bord est dans un plan fixé avec lequel elle forme un angle droit. Comme on pouvait s'y attendre les solutions paramètrent des hémisphères, d'ailleurs on trouvera un équivalent géométrique de ce résultat lorsque le bord est un cercle dans [78].

Lemme 6.4.1. *Soient $\Omega = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\begin{aligned}
&\Delta u = -2u_x \wedge u_y,\\
&\langle u_x, u_y\rangle = |u_x| - |u_y| = 0,\\
&\|\nabla u\|_2 < +\infty,\\
&u_{|\partial\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}
\end{aligned}$$

et l'angle quand il est défini est droit. Alors

$$u = C + \pi^{-1}\left(\frac{P}{Q}\right)$$

où π est la projection stéréographique et P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[z]$. De plus, $u_{|\partial\Omega}$ paramètre un cercle de rayon 1.

Preuve du lemme 6.4.1 :

Tout d'abord on peut supposer que $\Omega = \mathbb{D}$. En effet soit $\phi : \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\} \to \overline{\mathbb{H}}$ défini par

$$\phi(z) = -i\frac{z+1}{z-1}.$$

Il est bien connu que cette application est une bijection conforme. Donc si $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ vérifie les hypothèses du lemme, il en est de même de $\tilde{u} : \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ défini par $\tilde{u} = u \circ \phi$. Or, vu que $\|\nabla\tilde{u}\|_2 = \|\nabla u\|_2 < +\infty$, d'après la théorie de la régularité $\tilde{u}$ se prolonge en 1 de manière lisse.

Puis on peut prolonger u au plan tout entier en posant

$$u(z) = -\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ -u^3 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}.$$

Ce prolongement est C^1 et de plus on vérifie les hypothèses du lemme 4.1.1, puisque l'énergie est simplement doublée par un tel prolongement. Ce qui prouve la première partie du lemme. Enfin on remarque facilement que $u_{|\partial\Omega}$ décrit un cercle de rayon 1 en remarquant que u est égale à son application de Gauss au signe près, or notre hypothèse d'orthogonalité nous affirme que l'application est contenue dans un grand cercle au bord. Ceci achève la preuve du lemme.□

6.4.2 Un lemme technique

Ici Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Le lemme suivant est une adaptation du lemme A.3 de [12].

Lemme 6.4.2. *Soient ω une solution de (4.11), a_1^ε et a_2^ε deux suites de points de Ω et λ_1^ε et λ_2^ε deux suites de réels telles que*

$$\frac{\sqrt{|a_1^\varepsilon - a_2^\varepsilon|^2(\lambda_1^\varepsilon)^2}}{\lambda_2^\varepsilon} + \frac{\sqrt{|a_1^\varepsilon - a_2^\varepsilon|^2(\lambda_2^\varepsilon)^2}}{\lambda_1^\varepsilon} \to +\infty. \tag{6.25}$$

Enfin, soit $\alpha^\varepsilon \in W_0^{1,1}(\mathbb{D})$ l'unique solution de

$$\Delta\alpha^\varepsilon = -2((\omega_1^\varepsilon)_x \wedge (\omega_2^\varepsilon)_y + (\omega_2^\varepsilon)_x \wedge (\omega_1^\varepsilon)_y),$$

où $\omega_i^\varepsilon = \omega\left(\dfrac{z - a_i^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}\right)$. Alors

$$\|\alpha^\varepsilon\|_\infty \to 0.$$

Preuve du lemme 6.4.2 :

Quitte à translater ω, ce qui ne change rien à nos hypothèses, on peut supposer que $\lim\limits_{z\to\infty} \omega(z) = 0$.

Soit $z_0 \in \mathbb{D}$, d'après la formule de Green, on a

$$\begin{aligned}
\alpha^\varepsilon(z_0) &= -2\int_{\mathbb{D}} G(z, z_0)((\omega_1^\varepsilon)_x \wedge (\omega_2^\varepsilon)_y + (\omega_2^\varepsilon)_x \wedge (\omega_1^\varepsilon)_y)\, dz \\
&= -2\int_{\mathbb{D}} G(z, z_0)(((\omega_1^\varepsilon) \wedge (\omega_2^\varepsilon)_y)_x + ((\omega_2^\varepsilon)_x \wedge (\omega_1^\varepsilon))_y)\, dz \\
&= 2\int_{\mathbb{D}} G_x(z, z_0)(((\omega_1^\varepsilon) \wedge (\omega_2^\varepsilon)_y) + G_y(z, z_0)((\omega_2^\varepsilon)_x \wedge (\omega_1^\varepsilon))\, dz.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimées standard sur la fonction de Green, on obtient

$$|\alpha^\varepsilon(z_0)| = O\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|z - z_0|}|\omega_1^\varepsilon(z)||\nabla\omega_2^\varepsilon(z)|\, dz\right).$$

On effectue un changement de variable, ce qui donne

$$|\alpha^\varepsilon(z_0)| = O\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|z + \frac{a_2^\varepsilon - z_0}{\lambda_2^\varepsilon}|}|\tilde{\omega}^\varepsilon(z)||\nabla\omega(z)|\, dz\right),$$

où $\tilde{\omega} = \omega\left(\dfrac{\lambda_2^\varepsilon z + a_2^\varepsilon - a_1^\varepsilon}{\lambda_1^\varepsilon}\right)$. On vérifie facilement grâce à (6.25) que soit

$$\frac{\lambda_2^\varepsilon z + a_2^\varepsilon - a_1^\varepsilon}{\lambda_1^\varepsilon} \to +\infty \text{ pour presque tout } z \in \mathbb{R}^2,$$

soit

$$\frac{\lambda_1^\varepsilon z + a_2^\varepsilon - a_1^\varepsilon}{\lambda_2^\varepsilon} \to +\infty \text{ pour presque tout } z \in \mathbb{R}^2.$$

Donc, quitte à échanger ω_1^ε et ω_2^ε qui jouent des rôles parfaitement symétriques, on peut supposer que

$$\tilde{\omega} \to 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R}^2.$$

Le théorème de convergence dominée achève la preuve du lemme. $\square$

Chapitre 7

Annexes et résultats généraux

7.1 L'équation linéarisée

Avant de donner notre résultat sur la classification des solutions de l'équation linéarisée des H-bulles, on démontre un lemme sur les solutions de $\Delta\alpha = \frac{8}{(1+|x|^2)^2}\alpha$ satisfaisant une hypothèse de décroissance. En fait, comme nous le verrons plus tard, cette équation est l'équivalent scalaire de notre équation linéarisée.

Lemme 7.1.1. *Soit α une solution lisse de*

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \frac{8}{(1+|x|^2)^2}\alpha \text{ sur } \mathbb{R}^2, \\ \alpha(0) = \nabla\alpha(0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Si $|\alpha(x)| \leq c(1+|x|)^\tau$ pour $\tau \in [0,2[$ in $\mathbb{R}^2$, alors $\alpha \equiv 0$.

Un lemme semblable a déjà été prouvé par Chen et Lin avec $\tau \in [0,1[$, voir lemme 2.3 de [23]. Ce résultat n'est pas très surprenant puisque si l'on regarde cette équation sur la sphère S^2 via la projection stéréographique, elle se réduit à $\Delta_{S^2}\alpha = 2\alpha$. Or l'hypothèse de Chen et Lin implique que $\alpha \in H^1(S^2)$ et on sait que la seule solution vérifiant les conditions initiales est la fonction nulle.

Preuve du lemme 7.1.1 :

Ici on va reprendre la preuve de Chen et Lin avec notre hypothèse, mais avant nous allons démontrer que les coefficients de Fourier de α décroissent plus rapidement qu'attendu.

Soit $k \geq 2$, on pose

$$\alpha_k + i\beta_k = \int_0^{2\pi} \alpha e^{ik\theta}\, d\theta.$$

Alors

$$\Delta\alpha_k = \left(\frac{8}{(1+r^2)^2} - \frac{k^2}{r^2}\right)\alpha_k, \tag{7.2}$$

où $\Delta\alpha_k = \frac{-1}{r}\partial_r(r\partial_r\alpha_k)$. Puis on pose $\gamma_k = \frac{\alpha_k}{r^k}$ sur $[1,+\infty[$, et l'on montre facilement que α_k vérifie l'équation suivante

$$\Delta\alpha_k = -k^2 r^{k-2}\gamma_k - (2k+1)r^{k-1}\gamma_k' - r^k\gamma_k''. \tag{7.3}$$

D'autre part il existe, d'après notre hypothèse et (7.2), une constante positive c telle que

$$\Delta\alpha_k \leq cr^{\tau-4} - k^2 r^{k-2}\gamma_k \text{ sur } [1,+\infty[. \tag{7.4}$$

Donc, d'après (7.3) et (7.4), on a

$$\begin{aligned} -(2k+1)r^{k-1}\gamma_k' - r^k\gamma_k'' &\leq cr^{\tau-4} \\ r^{2k+1}\gamma_k'' + (2k+1)r^{2k}\gamma_k' &\geq -cr^{\tau+k-3} \\ (r^{2k+1}\gamma_k')' &\geq -cr^{\tau+k-3}. \end{aligned}$$

On intègre ensuite par parties sur $[1,r] \subset [1,+\infty[$, ce qui donne

$$\begin{aligned} r^{2k+1}\gamma_k'(r) - \gamma_k'(1) &\geq c\frac{1-r^{\tau+k-2}}{\tau+k-2} \\ \gamma_k'(r) &\geq \left(\frac{1}{r}\right)^{2k+1}\gamma_k'(1) + \frac{c}{\tau+k-2}\left(\frac{1}{r^{2k+1}} - r^{\tau-k-3}\right). \end{aligned}$$

Puis on intègre par parties sur $[R,+\infty[$, ce qui donne

$$-\gamma_k(r) \geq \frac{r^{-2k}}{2k}\gamma_k'(1) + \frac{c}{\tau+k-2}\left(\frac{1}{(2k)R^{2k}} + \frac{R^{\tau-k-2}}{\tau-k-2}\right)$$

Ici on a utilisé le fait que $\gamma_k(R) = O\left(R^{\tau-2}\right)$ et $\tau < 2$. D'après la dernière inégalité, il existe C une constante positive, telle que

$$\gamma_k(R) \leq CR^{\tau-k-2}$$

On a alors

$$\alpha_k(r) \leq C(r^{\tau-2}+1) \text{ sur } [0,+\infty[.$$

Puisque l'équation est linéaire on peut appliquer le même argument à $-\alpha$ et finalement on a l'estimée améliorée suivante : pour tout $k \geq 2$, il existe C_k une constante positive, telle que

$$|\alpha_k| \leq C_k(1+r)^{\tau-2} \text{ sur } [0,+\infty[.$$

Bien sûr le même résultat est vrai pour β_k.

Maintenant on peut suivre la preuve de Chen et Lin. Pour cela, on pose

$$\psi_i(x) = \frac{x_i}{(1+|x|^2)} \text{ pour tout } i = 1,2 \text{ et } \psi_0(x) = \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}$$

Nous allons démontrer que toute solution α de (7.1) qui satisfait $|\alpha(x)| \leq c(1+|x|)^\tau$ pour $\tau \in]0,2[$, est une combinaison linéaire des trois solutions élémentaires de (7.1), c'est-à-dire

$$\alpha = \sum_{i=0}^{2} a_i\psi_i,$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$. Et alors, les conditions en 0 donneront le résultat.

Afin de démontrer le résultat il suffit de démontrer que $\alpha_k \equiv 0$ et $\beta_k \equiv 0$ pour $k \geq 2$. On va démontrer cela pour α_k, il en ira de même pour β_k. Soit $\phi_1 = \int_0^{2\pi} \psi_1 cos(\theta) d\theta$. Alors $\phi_1 = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$. Supposons que $\alpha_k \not\equiv 0$ pour un certain $k \geq 2$. Puisque $\phi_1(r) > 0$ sur $]0, +\infty[$, alors par comparaison avec ϕ_1, α_k ne s'annule jamais sur $]0, +\infty[$.

Alors, d'après (7.2), on a

$$\begin{aligned}\phi_1(r)\alpha_k'(r)r - \alpha_k(r)\phi_1'(r)r &= \int_0^r (\alpha_k \Delta\phi_1 - \phi_1 \Delta\alpha_k) s ds \\ &= (k^2-1)\int_0^r \frac{\alpha_k \phi_1}{s} ds.\end{aligned}$$

Puisque $|\alpha_k| = O(1+r)^{\tau-2}$, pour une constante C, il existe une suite de $r_i \to +\infty$ telle que $\alpha_k'(r_i)r_i \leq C r_i^{\tau-2}$. Donc

$$0 = \lim_{i\to+\infty} \phi_1(r_i)\alpha_k'(r_i)r_i - \alpha_k(r_i)\phi_1'(r_i)r_i = (k^2-1)\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_k\phi_1}{s} ds,$$

en remarquant que $\dfrac{\alpha_k\phi_1}{s} = O((1+s)^{\tau-3})$ est intégrable. On a alors $\alpha_k \equiv 0$, ce qui est une contradiction et prouve le lemme. □

Dans la suite on va montrer comme l'étude de l'équation linéarisée se ramène à celle de l'équation précédente.

Proposition 7.1.1. *Soient ω une solution simple de (4.11) et $r \in C^2(\mathbb{R}^2)$ une solution de*

$$\Delta r + 2\left(r_x \wedge \omega_y + \omega_x \wedge r_y\right) = 0 \tag{7.5}$$

avec

$$\begin{aligned}\langle r_x, \omega_x\rangle - \langle r_y, \omega_y\rangle &= 0, \\ \langle r_x, \omega_y\rangle + \langle r_y, \omega_x\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{7.6}$$

On définit les fonctions lisses a, b, c, d, e et f par

$$\nabla r = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\omega_x + b\omega_y + c(\omega_x \wedge \omega_y) \\ d\omega_x + e\omega_y + f(\omega_x \wedge \omega_y) \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Alors a, b, c, d, e et f satisfont

$$\begin{aligned}&e = a \\ &d = -b \\ &\Delta a = |\nabla\omega|^2 a \\ &\Delta b = |\nabla\omega|^2 b \\ &c = \frac{2}{|\nabla\omega|^2}\left(-a_x + b_y\right) \\ &\quad et \\ &f = \frac{2}{|\nabla\omega|^2}\left(-b_x - a_y\right)\end{aligned}$$

Preuve de la proposition 7.1.1 :

Tout d'abord, d'après (7.6) et (7.7), on a

$$a = e$$
$$b = -d$$

Puis, en différenciant (7.7), on a

$$\Delta r = \left(-a_x + b_y + c\frac{|\nabla\omega|^2}{2}\right)\omega_x + \left(-b_x - a_y + f\frac{|\nabla\omega|^2}{2}\right)\omega_y$$
$$+ \left(-c_x - f_y - 2a - c\frac{(|\nabla\omega|^2)_x}{|\nabla\omega|^2} - f\frac{(|\nabla\omega|^2)_y}{|\nabla\omega|^2}\right)(\omega_x \wedge \omega_y)$$

Maintenant en utilisant (7.5) et en identifiant chaque coefficient de l'équation dans notre base orthogonale $(\omega_x, \omega_y, \omega_x \wedge \omega_y)$, on a

$$-a_x + b_y - c\frac{|\nabla\omega|^2}{2} = 0, \tag{7.8}$$

$$-b_x - a_y - f\frac{|\nabla\omega|^2}{2} = 0, \tag{7.9}$$

$$-c_x - f_y + 2a - c\frac{(|\nabla\omega|^2)_x}{|\nabla\omega|^2} - f\frac{(|\nabla\omega|^2)_y}{|\nabla\omega|^2} = 0. \tag{7.10}$$

De plus, en utilisant le fait que $r_{xy} = r_{yx}$, on a

$$a_y + b_x + f\frac{|\nabla\omega|^2}{2} = 0, \tag{7.11}$$

$$b_y - a_x - c\frac{|\nabla\omega|^2}{2} = 0, \tag{7.12}$$

$$2b + c_y - f_x + c\frac{(|\nabla\omega|^2)_y}{|\nabla\omega|^2} - f\frac{(|\nabla\omega|^2)_x}{|\nabla\omega|^2} = 0. \tag{7.13}$$

Puis, en sommant $(7.8)_x$, $-(7.11)_y$ et $-\frac{|\nabla\omega|^2}{2}(7.10)$ on a

$$\Delta a - |\nabla\omega|^2 a = 0.$$

D'autre part, en sommant $(7.9)_x$, $-(7.12)_y$ et $-\frac{|\nabla\omega|^2}{2}(7.13)$ on a

$$\Delta b - |\nabla\omega|^2 b = 0.$$

Finalement, grâce à (7.8), (7.9) , on a

$$c = \frac{2}{|\nabla\omega|^2}\left(-a_x + b_y\right)$$

et

$$f = \frac{2}{|\nabla\omega|^2}\left(-b_x - a_y\right).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer notre résultat sur les solutions de l'équation linéarisée.

Proposition 7.1.2. *Soient ω une solution simple de(4.11) et $r \in C^2(\mathbb{R}^2)$ une solution de*

$$\begin{aligned}
&\Delta r + 2\left(r_x \wedge \omega_y + \omega_x \wedge r_y\right) = 0,\\
&\langle r_x, \omega_y\rangle + \langle \omega_x, r_y\rangle = 0,\\
&\langle r_x, \omega_x\rangle = \langle r_y, \omega_y\rangle = 0,\\
&\nabla r(0) = \nabla^2 r(\nabla\omega)(0) = 0.
\end{aligned}$$

Si $|\nabla r|$ est borné, alors r est une fonction constante.

Preuve de la proposition 7.1.2 :

On remarque que, quitte à tout composer par une homographie, on peut supposer que

$$\omega(x,y) = \frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ r^2-1 \end{pmatrix}.$$

En effet, cela ne change rien puisque notre équations est invariante sous l'action d'une transformation conforme. Simplement les conditions initiales sont changées en

$$\nabla r(a) = \nabla^2 r(\nabla\omega)(a) = 0.$$

où a est la pré-image de 0 par l'homographie considérée (bien sûr, il se peut que ce soit ∞). Mais, quitte à composer le tout avec une translation ou une inversion, on peut ramener notre condition initiale en 0.

Dès lors nous allons démontrer que r est décroissante à l'infini à l'aide de la fonction de Green. En effet grâce au lemme 4.7.2 et 4.7.3, on vérifie facilement que

$$|\nabla r(z)| = O\left(\frac{Ln(|z|)}{|z|}\right) \text{ quand } z \to +\infty \tag{7.14}$$

D'autre part, soient a, b, c, d, e et f définis comme dans la proposition précédente. Alors ils vérifient

$$\begin{aligned}
&\Delta a = |\nabla\omega|^2 a\\
&\Delta b = |\nabla\omega|^2 b\\
&c = \frac{2}{|\nabla\omega|^2}\left(-a_x + b_y\right)\\
&\text{ et}\\
&f = \frac{2}{|\nabla\omega|^2}\left(-b_x - a_y\right)\\
&e - a = d + b = 0.
\end{aligned}$$

De plus, d'après nos conditions initiales et (7.14), on a

$$\begin{aligned}
&a(0) = b(0) = \nabla a(0) = \nabla b(0) = 0,\\
&|a|, |b| = O((1+|z|)^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

Alors a et b satisfont les hypothèses du lemme 7.1.1, donc $a \equiv b \equiv 0$, et on en déduit alors facilement que r est une fonction constante, ce qui achève la preuve. □

7.2 Inégalités de Wente classiques et généralisées

Le but de cette section est de donner un certain nombre d'inégalités de Wente classiques d'une part mais aussi de donner des généralisations de celles-ci.
On commence par rappeler l'inégalité classique, qui apparaît d'abord dans [120]. Elle a ensuite été largement exploitée par Brezis et Coron [13]. Enfin grâce aux travaux de Bethuel, Ghigladia et Topping, voir [9] et [116], on la présente dans sa version optimale.

Théorème 7.2.1 (Inégalité de Wente)**.** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et $v \in H^1(\Omega)$. Soit $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ une solution de*

$$\Delta u = -2v_x \wedge v_y \text{ sur } \Omega,$$

alors

$$\|u\|_\infty + \|\nabla u\|_2 \leq \frac{1}{\pi}\|\nabla v\|_2^2.$$

Ce qui est particulièrement remarquable ici est que la constante est indépendante de Ω.

A l'aide de cette version de l'inégalité de Wente, Topping a prouvé une inégalité de Wente pour les surfaces, voir théorème 4 de [116].

Théorème 7.2.2. *Soient Σ une surface de Riemann compacte et $v \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}^2)$. Si $u \in W^{1,1}(\Sigma)$ est une solution de*

$$\Delta u = det(\nabla v) \text{ sur } \Sigma,$$

alors

$$osc(u) + \|\nabla u\|_2 \leq \frac{1}{\pi}\|\nabla v\|_2^2,$$

où $osc(u) = \sup_{x,y\in\Sigma} |u(x) - u(y)|$.

A l'aide de ce résultat et en supposant que $u \in H^1$, on peut étendre l'inégalité au plan tout entier.

Corollaire 7.2.1. *Soient $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ une solution de*

$$\Delta u = -2v_x \wedge v_y \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

alors

$$\|\nabla u\|_2 \leq \frac{2}{\pi}\|\nabla v\|_2^2.$$

Preuve du corollaire 7.2.1 :

Soit π la projection stéréographique de S^2 sur $\mathbb{R}^2$. Grâce à l'invariance conforme de l'équation et de l'énergie, $u \circ \pi^{-1}$ et $v \circ \pi^{-1}$ satisfont les hypothèses du théorème 7.2.2 pour $\Sigma = S^2$. On a donc

$$osc(u) \leq \frac{1}{\pi}\|\nabla v\|_2^2$$

Puis en testant l'équation contre u et en intégrant par parties on obtient l'inégalité désirée.□

Comme conséquence du corollaire 7.2.1 et d'une inégalité d'interpolation due à Bethuel, Brezis et Helein [10], qui contrôle $\|\nabla\phi\|_\infty$ par $\|\Delta\phi\|_\infty$ et $\|\phi\|_\infty$ pour toute fonction $\phi \in C^2(B(0,1))$ nulle au bord, nous avaons le résultat suivant.

Lemme 7.2.1. *Soit $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2)$ et $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2)$ une solution de*

$$\Delta u = v_x \wedge v_y. \tag{7.15}$$

Alors il existe une constante positive C, indépendante de v, telle que

$$\|\nabla u\|_\infty \leq C\|\nabla v\|_\infty \|\nabla v\|_2.$$

Nous donnons ici une preuve de ce lemme qui ne passe pas par l'inégalité d'interpolation de [10].

Preuve du lemme 7.2.1 :

Supposons par l'absurde qu'une telle constante n'existe pas. Alors il existe deux suites de fonctions v^ε dans $H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ et u^ε dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ qui satisfont

$$\Delta u_\varepsilon = v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon,$$

et telles que

$$\frac{\|\nabla u^\varepsilon\|_\infty}{\|\nabla v^\varepsilon\|_\infty \|\nabla v^\varepsilon\|_2} \to +\infty.$$

Soit alors $z_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\nabla u^\varepsilon(z_\varepsilon) = \frac{\mu_\varepsilon}{2},$$

où $\mu_\varepsilon = \|\nabla u^\varepsilon\|_\infty$. On pose alors $\alpha_\varepsilon = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2}{\|\nabla u_\varepsilon\|_\infty}$ et

$$\tilde{u}^\varepsilon = \frac{u^\varepsilon(\alpha_\varepsilon z + z_\varepsilon) - u^\varepsilon(z_\varepsilon)}{\alpha_\varepsilon \mu_\varepsilon}.$$

Affirmation 1 : $\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_2 = 1$.

Preuve de l'affirmation 1 :

$$\begin{aligned}
\|\nabla \tilde{u^\varepsilon}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u^\varepsilon}|^2 dz \\
&= \frac{1}{\mu_\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon(\alpha_\varepsilon z + z_\varepsilon)|^2 dz \\
&= \frac{1}{\mu_\varepsilon^2 \alpha_\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon(z)|^2 dz \\
&= \frac{1}{\|\nabla u^\varepsilon\|_2^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon(z)|^2 dz \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Affirmation 2 : $|\Delta \tilde{u}^\varepsilon|$ est borné dans tous les L^p pour $p \geq 1$.

Preuve de l'affirmation 2 :

D'après (7.15), on a facilement que

$$|\Delta \tilde{u}^\varepsilon| \leq \frac{\alpha_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} |\nabla v^\varepsilon(\alpha_\varepsilon z + z_\varepsilon)|^2.$$

Ce qui donne, pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\|\Delta \tilde{u}^\varepsilon\|_p^p &\leq \frac{\alpha_\varepsilon^{p-2} \|\nabla v^\varepsilon\|_{2p}^{2p}}{\mu_\varepsilon^p} \\
&\leq \frac{\alpha_\varepsilon^{p-2} \|\nabla v^\varepsilon\|_\infty^{2p-2} \|\nabla v^\varepsilon\|_2^2}{\mu_\varepsilon^p} \\
&\leq \frac{\|\nabla u^\varepsilon\|_2^{p-2} \|\nabla v^\varepsilon\|_\infty^{2p-2} \|\nabla v^\varepsilon\|_2^2}{\mu_\varepsilon^{2p-2}}.
\end{aligned}$$

Enfin, d'après le corollaire 7.2.1, il existe C une constante indépendante de ε telle que

$$\|\Delta \tilde{u}^\varepsilon\|_p^p \leq C \frac{\|\nabla v^\varepsilon\|_\infty^{2p-2} \|\nabla v^\varepsilon\|_2^{2p-2}}{\mu_\varepsilon^{2p-2}} = C \left(\frac{\|\nabla u^\varepsilon\|}{\|\nabla v^\varepsilon\|_\infty \|\nabla v^\varepsilon\|_2} \right)^{2-2p}. \tag{7.16}$$

Il est clair que le terme de droite est borné et converge vers 0 pour $p > 1$.

Affirmation 3 : $\tilde{u}^\varepsilon \to \tilde{u}$ dans $C^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ qui satisfait au sens faible $\Delta \tilde{u} = 0$.

Preuve de l'affirmation 3 :

D'après l'affirmation 2, $\tilde{u}_\varepsilon$ est borné dans $W^{2,p}_{loc}$. Alors d'après la théorie elliptique standard, voir [49], à une sous-suite près, $\tilde{u}^\varepsilon$ converge vers $\tilde{u}$ dans $C^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Soit alors $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $p > 1$, d'après l'affirmation 2 et (7.16), on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \tilde{u}^\varepsilon, \nabla \phi \rangle dz \right| \leq \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_p \|\nabla \phi\|_{p'} \to 0.$$

Ce qui prouve l'affirmation.

Finalement, d'après les affirmations 1 et 3, $\tilde{u}$ satisfait

$$\begin{aligned}
&\Delta \tilde{u} = 0, \\
&\|\nabla \tilde{u}\|_\infty \leq 1, \\
&\|\nabla \tilde{u}\|_2 = 1, \\
&|\nabla \tilde{u}(0)| = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Liouville et les deux premières inégalités, $\nabla \tilde{u}$ devrait être constant, ce qui contredirait la dernière égalité et prouve le lemme. □

En guise de conclusion, on donne une version faible de l'inégalité de Wente, voir [12].

Lemme 7.2.2. *Soient $\Omega = B(0,1)$, $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $v \in H^1_0(\Omega)$, alors il existe C une constante positive et indépendant de u et v, telle que*

$$\left| \int_\Omega \langle u, v_x \wedge v_y \rangle \right| \leq C \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2^2.$$

7.3 Espaces de Lorentz et application à l'inégalité de Wente

L'objectif de cette section est de généraliser l'inégalité de Wente obtenue par Coifman, Lions, Meyers et Semmes dans les espaces de Lorentz [25].

On commence par introduire les espaces de Hardy et Lorentz. [1]

Définition 7.3.1. *Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1.$$

Pour chaque $t > 0$, on pose $\psi_t = t^{-n}\psi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$. Finalement, pour toute fonction $f \in L^1(\Omega)$, on définit

$$F(x) = \sup_{t>0} |\psi_t * f|,$$

et on dit que f appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On équipe l'espace de Hardy avec la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

On peut penser à l'espace de Hardy comme le plus gros sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour lequel les propriétés des $L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 < p < +\infty$, restent valables sans l'être dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ tout entier. On donne le théorème suivant afin d'illustrer ce fait.

Théorème 7.3.1. *Soient $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une solution de*

$$\Delta\phi = f.$$

Alors toutes les dérivées secondes de ϕ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante positive C telle que

$$\|\nabla^2\phi\|_1 \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Mais ce résultat peut encore être amélioré en considérant des espaces plus fins que les L^p : les espaces de Lorentz, voir [109] pour une théorie complète de tels espaces.

Définition 7.3.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Lorentz $L^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$ est constitué de l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\|f\|_{(2,1)} = \int_0^{+\infty} (f^*(t)) \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} < +\infty,$$

où f^* est le réarrangement décroissant de f sur $[0, |\Omega|]$.

Il est important de noter que $\|.\|_{(2,1)}$ n'est pas une norme. Toutefois elle est équivalente à une norme qui confère à $L^{2,1}$ une structure d'espace de Banach dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, on peut remarquer que $\|\nabla u\|_{(2,1)}$ est invariante par changement d'échelle comme $\|\nabla u\|_2$, ce qui est fondamental compte tenu de l'invariance conforme de notre équation.

Dans de tels espaces, on obtient le résultat de régularité suivant :

1. Ce qui suit est largement inspiré du chapitre 3 de [55].

Théorème 7.3.2. *Soit Ω un ouvert $\mathbb{R}^2$ dont le bord est lisse. Soit $f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ et ϕ une solution de*

$$\begin{aligned} &\Delta\phi = f \ \textit{sur}\ \Omega, \\ &\phi = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Alors les dérivées de ϕ appartiennent toutes à $L^{2,1}(\Omega)$ et il existe une constante positive C, dépendant seulement de Ω, telle que

$$\|\nabla\phi\|_{(2,1)} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}.$$

Grâce à ce résultat de régularité et au phénomène de compensation ci-dessous, on en déduit facilement une inégalité de Wente dans les espaces de Lorentz.

Théorème 7.3.3. *Soit $a, b \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on définit $\{a, b\}$ comme $a_x b_y - a_y b_x$ au sens faible, alors $\{a, b\} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ et il existe une constante positive C, indépendante de a et b, telle que*

$$\|\{a, b\}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\|a\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}\|b\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Corollaire 7.3.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a, b \in H^1(\Omega)$. Si $\phi \in L^1_{loc}$ est l'unique solution de*

$$\begin{aligned} &\Delta\phi = \{a, b\} \ \textit{sur}\ \Omega, \\ &\phi = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7.17}$$

Alors $\nabla\phi \in L^{2,1}(\Omega)$ et

$$\|\nabla\phi\|_{(2,1)} \leq C\|\nabla a\|_2\|\nabla b\|_2,$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de Ω.

En fait, d'après l'invariance conforme de la norme considérée, comme dans le lemme 7.2.1, la constante ne dépend probablement pas de Ω, on pense d'ailleurs que les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 7.2.1, voir [9], devraient fonctionner et montrer que la constante est indépendante de la taille et de la forme du domaine considéré.

Ce phénomène de compensation n'est pas propre à notre équation, mais il concerne tous les points critiques de fonctionnelles qui sont invariantes sous l'action de difféomorphisme conforme, voir [55] ou plus récemment la preuve de la conjecture d'Hildebrandt par Rivière [96].

Bibliographie

[1] Aleksandr Danilovich Aleksandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I. *Vestnik Leningrad. Univ.*, 11(19) :5–17, 1956.

[2] Frederick J. Almgren, Jr. and Leon Simon. Existence of embedded solutions of Plateau's problem. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 6(3) :447–495, 1979.

[3] Bernd Ammann, Emmanuel Humbert, and Mohameden Ould Ahmedou. An obstruction for the mean curvature of a conformal immersion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(2) :489–493 (electronic), 2007.

[4] Thierry Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3) :269–296, 1976.

[5] I. Ja. Bakelman and B. E. Kantor. Existence of a hypersurface homeomorphic to the sphere in Euclidean space with a given mean curvature. In *Geometry and topology, No. 1 (Russian)*, pages 3–10. Leningrad. Gos. Ped. Inst. im. Gercena, Leningrad, 1974.

[6] J. Lucas Barbosa and Manfredo do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, 185(3) :339–353, 1984.

[7] J. Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo, and Jost Eschenburg. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197(1) :123–138, 1988.

[8] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Differential geometry : manifolds, curves, and surfaces*, volume 115 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French by Silvio Levy.

[9] F. Bethuel and J.-M. Ghidaglia. Improved regularity of solutions to elliptic equations involving Jacobians and applications. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 72(5) :441–474, 1993.

[10] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 1(2) :123–148, 1993.

[11] Fabrice Bethuel and Olivier Rey. Multiple solutions to the Plateau problem for nonconstant mean curvature. *Duke Math. J.*, 73(3) :593–646, 1994.

[12] H. Brezis and J.-M. Coron. Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 89(1) :21–56, 1985.

[13] Haïm Brezis and Jean-Michel Coron. Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37(2) :149–187, 1984.

[14] Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36(4) :437–477, 1983.

[15] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller. *Geometric inequalities*, volume 285 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.

[16] Wolfram Bürger and Ernst Kuwert. Area-minimizing disks with free boundary and prescribed enclosed volume. *J. Reine Angew. Math.*, 621 :1–27, 2008.

[17] Adrian Butscher. CMC surfaces in Riemannian manifolds condensing to a compact network of curves. *Preprint*, 2009.

[18] Adrian Butscher and Rafe Mazzeo. CMC hypersurfaces condensing to geodesic segments and rays in Riemannian manifolds. *Preprint*, 2009.

[19] Paolo Caldiroli. H-bubbles with prescribed large mean curvature. *Manuscripta Math.*, 113(1) :125–142, 2004.

[20] Paolo Caldiroli and Roberta Musina. H-bubbles in a perturbative setting : the finite-dimensional reduction method. *Duke Math. J.*, 122(3) :457–484, 2004.

[21] Sagun Chanillo and Andrea Malchiodi. Asymptotic Morse theory for the equation $\Delta v = 2v_x \wedge v_y$. *Comm. Anal. Geom.*, 13(1) :187–251, 2005.

[22] Isaac Chavel. *Riemannian geometry*, volume 98 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2006. A modern introduction.

[23] Chiun-Chuan Chen and Chang-Shou Lin. Sharp estimates for solutions of multi-bubbles in compact Riemann surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 55(6) :728–771, 2002.

[24] Shiing-shen Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 :771–782, 1955.

[25] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, and S. Semmes. Compensated compactness and Hardy spaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 72(3) :247–286, 1993.

[26] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. *Minimal surfaces*, volume 4 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.

[27] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. I. Estimates off the axis for disks. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :27–68, 2004.

[28] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. II. Multi-valued graphs in disks. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :69–92, 2004.

[29] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. III. Planar domains. *Ann. of Math. (2)*, 160(2) :523–572, 2004.

[30] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. IV. Locally simply connected. *Ann. of Math. (2)*, 160(2) :573–615, 2004.

[31] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Embedded minimal disks. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 405–438. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[32] Björn E. J. Dahlberg. The converse of the four vertex theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(7) :2131–2135 (electronic), 2005.

[33] Charles Delaunay. Sur les surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. *J. de Mathématiques*, 6 :309–320, 1841.

[34] Dennis M. DeTurck and Jerry L. Kazdan. Some regularity theorems in Riemannian geometry. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(3) :249–260, 1981.

[35] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab. *Minimal surfaces. I*, volume 295 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Boundary value problems.

[36] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab. *Minimal surfaces. II*, volume 296 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Boundary regularity.

[37] Jesse Douglas. Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33(1) :263–321, 1931.

[38] Olivier Druet. Sharp local isoperimetric inequalities involving the scalar curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(8) :2351–2361 (electronic), 2002.

[39] Olivier Druet and Emmanuel Hebey. Elliptic equations of Yamabe type. *IMRS Int. Math. Res. Surv.*, (1) :1–113, 2005.

[40] Olivier Druet and Emmanuel Hebey. Stability for strongly coupled critical elliptic systems in a fully inhomogeneous medium. *Anal. PDE*, 2(3) :305–359, 2009.

[41] Olivier Druet, Emmanuel Hebey, and Frédéric Robert. *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry*, volume 45 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.

[42] Olivier Druet and Paul Laurain. Stability of the Pohožaev obstruction in dimension 3. *J.E.M.S.*, 12(5), 2010.

[43] Olivier Druet and Frédéric Robert. On the equivariance of the Kazdan-Warner and the Pohožaev identities. *unpublished*, 1999.

[44] James Eells and Andrea Ratto. *Harmonic maps and minimal immersions with symmetries*, volume 130 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. Methods of ordinary differential equations applied to elliptic variational problems.

[45] Mouhamed Moustapha Fall. Embedded disc-type surfaces with large constant mean curvature and free boundaries. *Preprint SISSA*, 2007.

[46] Mouhamed Moustapha Fall. Area-minimizing regions with small volume in Riemannian manifolds with boundary. *Pacific J. Math.*, 244(2) :235–260, 2010.

[47] Mouhamed Moustapha Fall and Fethi Mahmoudi. Hypersurfaces with free boundary and large constant mean curvature : concentration along submanifolds. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 7(3) :407–446, 2008.

[48] Thomas Friedrich. On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space. *J. Geom. Phys.*, 28(1-2) :143–157, 1998.

[49] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[50] Herman Gluck. The converse to the four vertex theorem. *Enseignement Math. (2)*, 17 :295–309, 1971.

[51] Karsten Grosse-Brauckmann, Robert B. Kusner, and John M. Sullivan. Constant mean curvature surfaces with three ends. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 97(26) :14067–14068 (electronic), 2000.

[52] Joel Hass. Minimal surfaces and the topology of three-manifolds. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 705–724. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[53] Erhard Heinz. On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35 :249–252, 1969.

[54] Frédéric Hélein. *Constant mean curvature surfaces, harmonic maps and integrable systems.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Notes taken by Roger Moser.

[55] Frédéric Hélein. *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, volume 150 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2002. Translated from the 1996 French original, With a foreword by James Eells.

[56] Stefan Hildebrandt. On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :97–114, 1970.

[57] David Hoffman, editor. *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Mathematics Proceedings*, Providence, RI, 2005. American Mathematical Society.

[58] Heinz Hopf. *Differential geometry in the large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1983. Notes taken by Peter Lax and John Gray, With a preface by S. S. Chern.

[59] Wu-yi Hsiang and Wen Ci Yu. A generalization of a theorem of Delaunay. *J. Differential Geom.*, 16(2) :161–177, 1981.

[60] Mohamed Jleli and Frank Pacard. An end-to-end construction for compact constant mean curvature surfaces. *Pacific J. Math.*, 221(1) :81–108, 2005.

[61] Jürgen Jost. *Compact Riemann surfaces.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2006. An introduction to contemporary mathematics.

[62] Nicolaos Kapouleas. Constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(2) :318–320, 1987.

[63] Nicolaos Kapouleas. Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space. *Ann. of Math. (2)*, 131(2) :239–330, 1990.

[64] Nicolaos Kapouleas. Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space. *J. Differential Geom.*, 33(3) :683–715, 1991.

[65] Nikolaos Kapouleas. Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori. *Invent. Math.*, 119(3) :443–518, 1995.

[66] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures. *Ann. of Math. (2)*, 101 :317–331, 1975.

[67] Jerry L. Kazdan and Frank W. Warner. Surfaces of revolution with monotonic increasing curvature and an application to the equation $\Delta u = 1 - Ke^{2u}$ on S^2. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 32 :139–141, 1972.

[68] Katsuei Kenmotsu. *Surfaces with constant mean curvature*, volume 221 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Translated from the 2000 Japanese original by Katsuhiro Moriya and revised by the author.

[69] Stephane Kirsch. Courbure moyenne et interfaces. *Thèse de doctorat*, 2007.

[70] Stephane Kirsch and Paul Laurain. An obstruction to the existence of immersed curves of prescribed curvature. *Potential Anal.*, 32(1) :29–39, 2010.

[71] A. Kneser. Bemerkung über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie. *Teubner*, 1912.

[72] Nicholas J. Korevaar, Rob Kusner, and Bruce Solomon. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Differential Geom.*, 30(2) :465–503, 1989.

[73] R. Kusner, R. Mazzeo, and D. Pollack. The moduli space of complete embedded constant mean curvature surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 6(1) :120–137, 1996.

[74] Paul Laurain. Asymptotic analysis for surfaces with large constant mean curvature and free boundaries. *Preprint*, 2010.

[75] Paul Laurain. Concentration of CMC surfaces in a Riemannian manifold. *Preprint*, 2010.

[76] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1) :37–91, 1987.

[77] Francisco J. López and Antonio Ros. Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 64(1) :34–43, 1989.

[78] Rafael López. A new proof of a characterization of small spherical caps. *Results Math.*, 55(3-4) :427–436, 2009.

[79] F. Mahmoudi, R. Mazzeo, and F. Pacard. Constant mean curvature hypersurfaces condensing on a submanifold. *Geom. Funct. Anal.*, 16(4) :924–958, 2006.

[80] Rafe Mazzeo, Frank Pacard, and Daniel Pollack. The conformal theory of Alexandrov embedded constant mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 525–559. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[81] William W. Meeks, III and Shing Tung Yau. The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness. *Math. Z.*, 179(2) :151–168, 1982.

[82] Sebastián Montiel and Antonio Ros. Compact hypersurfaces : the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. In *Differential geometry*, volume 52 of *Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math.*, pages 279–296. Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[83] Sebastián Montiel and Antonio Ros. *Curves and surfaces*, volume 69 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2009. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt.

[84] Frank Morgan. *Geometric measure theory*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, fourth edition, 2009. A beginner's guide.

[85] Frank Morgan and David L. Johnson. Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(3) :1017–1041, 2000.

[86] S. Mukhopadhaya. New methods in geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, (1) :31–37, 1909.

[87] Robert Osserman. The four-or-more vertex theorem. *Amer. Math. Monthly*, 92(5) :332–337, 1985.

[88] Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1986.

[89] F. Pacard. Constant mean curvature hypersurfaces in riemannian manifolds. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 7(4) :141–162, 2005.

[90] F. Pacard and X. Xu. Constant mean curvature spheres in Riemannian manifolds. *Manuscripta Math.*, 128(3) :275–295, 2009.

[91] U. Pinkall and I. Sterling. On the classification of constant mean curvature tori. *Ann. of Math. (2)*, 130(2) :407–451, 1989.

[92] S. I. Pohožaev. On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 165 :36–39, 1965.

[93] Tibor Radó. On Plateau's problem. *Ann. of Math. (2)*, 31(3) :457–469, 1930.

[94] Manuel Ritoré and Antonio Ros. Some updates on isoperimetric problems. *Math. Intelligencer*, 24(3) :9–14, 2002.

[95] Tristan Rivière. Le role de l'integrabilité par compensation dans l'analyse des problèmes invariants conformes. *http ://www.math.ethz.ch/ riviere/teaching.html*.

[96] Tristan Rivière. Conservation laws for conformally invariant variational problems. *Invent. Math.*, 168(1) :1–22, 2007.

[97] Antonio Ros. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 3(3-4) :447–453, 1987.

[98] Antonio Ros. The isoperimetric problem. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 175–209. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[99] Antonio Ros and Enaldo Vergasta. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geom. Dedicata*, 56(1) :19–33, 1995.

[100] Harold Rosenberg. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sci. Math.*, 117(2) :211–239, 1993.

[101] Harold Rosenberg. Constant mean curvature surfaces in homogeneously regular 3-manifolds. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 74(2) :227–238, 2006.

[102] Harold Rosenberg. Remarks on surfaces of large mean curvature. *C.R. Acad. Sci. Paris*, (Ser. I), 2008.

[103] Ernst A. Ruh and Jaak Vilms. The tension field of the Gauss map. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149 :569–573, 1970.

[104] J. Sacks and K. Uhlenbeck. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Ann. of Math. (2)*, 113(1) :1–24, 1981.

[105] Takashi Sakai. *Riemannian geometry*, volume 149 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the 1992 Japanese original by the author.

[106] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on differential geometry*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994. Lecture notes prepared by Wei Yue Ding, Kung Ching Chang [Gong Qing Zhang], Jia Qing Zhong and Yi Chao Xu, Translated from the Chinese by Ding and S. Y. Cheng, Preface translated from the Chinese by Kaising Tso.

[107] Servius. Commentaire sur l'Énéide de Virgile.

[108] Leon Simon. Existence of surfaces minimizing the Willmore functional. *Comm. Anal. Geom.*, 1(2) :281–326, 1993.

[109] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.

[110] Michael Struwe. Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 93(2) :135–157, 1986.

[111] Michael Struwe. The existence of surfaces of constant mean curvature with free boundaries. *Acta Math.*, 160(1-2) :19–64, 1988.

[112] Michael Struwe. *Plateau's problem and the calculus of variations*, volume 35 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.

[113] Michael Struwe. *Variational methods*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2008. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.

[114] Taoniu Sun. A note on constant geodesic curvature curves on surfaces. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(5) :1569–1584, 2009.

[115] Friedrich Tomi and Anthony J. Tromba. Extreme curves bound embedded minimal surfaces of the type of the disc. *Math. Z.*, 158(2) :137–145, 1978.

[116] Peter Topping. The optimal constant in Wente's L^∞ estimate. *Comment. Math. Helv.*, 72(2) :316–328, 1997.

[117] Peter Topping. Mean curvature flow and geometric inequalities. *J. Reine Angew. Math.*, 503 :47–61, 1998.

[118] Andrejs E. Treibergs and S. Walter Wei. Embedded hyperspheres with prescribed mean curvature. *J. Differential Geom.*, 18(3) :513–521, 1983.

[119] Neil S. Trudinger. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 22 :265–274, 1968.

[120] Henry C. Wente. An existence theorem for surfaces of constant mean curvature. *J. Math. Anal. Appl.*, 26 :318–344, 1969.

[121] Henry C. Wente. Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Pacific J. Math.*, 121(1) :193–243, 1986.

[122] Brian White. New applications of mapping degrees to minimal surface theory. *J. Differential Geom.*, 29(1) :143–162, 1989.

[123] Rugang Ye. Foliation by constant mean curvature spheres. *Pacific J. Math.*, 147(2) :381–396, 1991.

[124] Rugang Ye. Constant mean curvature foliation : singularity structure and curvature estimate. *Pacific J. Math.*, 174(2) :569–587, 1996.