Régularité des applications harmoniques

Dorian Martino
Sous la direction de Paul Laurain

12 juillet 2020

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Applications harmoniques **5**
2.1 Solutions faibles . . . 6
2.1.1 Applications faiblement harmoniques . . . 6
2.1.2 Applications faiblement Noether harmoniques . . . 8
2.1.3 Applications minimisantes . . . 9
2.1.4 Applications faiblement stationnaires . . . 10
2.2 Compacité par compensation des applications harmoniques à valeurs dans la sphère . . . 10
2.3 Continuité implique régularité . . . 11

3 Lagrangiens quadratiques invariant conformes **12**
3.1 Transformations conformes . . . 12
3.2 Lagrangiens invariants conformes . . . 14

4 Quelques points d'analyse **17**
4.1 Espaces de Lorentz . . . 17
4.2 Espace de Hardy $\mathcal{H}^1$ . . . 20
4.3 Espace BMO . . . 21
4.4 Estimations de Morrey . . . 23
4.5 Inégalités de Wente . . . 24
4.6 Décomposition de Hodge . . . 27

5 Régularité des applications faiblement harmoniques à valeurs dans la sphère **30**
5.1 Preuve de Hélein . . . 30
5.2 Preuve de Rivière . . . 34

6 Applications harmoniques sans symétries **37**
6.1 Retrouver des symétries : le tore . . . 37
6.2 Preuve de Hélein . . . 43
6.2.1 Cas où $\mathcal{M}$ est une surface . . . 43
6.2.2 Cas quelconque . . . 43
6.3 Preuve de Rivière . . . 47
6.3.1 Applications harmoniques . . . 47
6.3.2 Conjecture de Heinz-Hildebrandt . . . 49
6.3.3 Passage à la limite . . . 58
6.4 Amélioration par Schikorra . . . 59

7 Surfaces minimales **62**
7.1 Problème de Plateau . . . 62
7.2 Surfaces minimales stables . . . 64

8 Conclusion **67**

A Outils d'analyse **68**
A.1 Espaces de Lorentz . . . 68
A.1.1 Réarrangement décroissant . . . 68
A.1.2 Dualité . . . 70
A.1.3 Interpolation . . . 74
A.2 Espace BMO . . . 79
A.2.1 Moyennes locales . . . 79
A.2.2 Inégalité de John-Nirenberg . . . 81
A.2.3 Fonction maximale . . . 83
A.3 Décomposition de Paley-Littlewood . . . 85
A.4 Espaces de Hardy . . . 89
A.4.1 Définition . . . 89
A.4.2 Décomposition atomique . . . 92
A.4.3 Intégrales singulières . . . 99
A.4.4 Dualité . . . 104
A.5 Inégalité de Polya-Szego . . . 108
A.6 Systèmes elliptiques . . . 110
A.6.1 Estimations de Schauder . . . 110
A.6.2 Systèmes à second membre quadratique . . . 113

Chapitre 1

Introduction

Pour résoudre l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ sur un domaine Ω, on peut chercher à minimiser $\int_\Omega |\nabla u|^2$. Maintenant, on peut faire de même pour une applications $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ où $(\mathcal{M}, g)$ et $(\mathcal{N}, h)$ sont deux variétés riemanniennes avec $\mathcal{N}$ compacte : on cherche à minimiser $L(u) := \int_\mathcal{M} |du(x)|^2 d\mathrm{vol}_g(x)$ où $|du(x)|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de $du(x) : T_x\mathcal{M} \to T_{u(x)}\mathcal{N}$, en coordonnées locales $|du(x)|^2 = g^{\alpha\beta}(x)h_{ij}(u(x))\partial_\alpha u^i(x)\partial_\beta u^j(x)$ (avec la convention d'Einstein).

Afin d'étudier la régularité des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange associée, il est plus simple de plonger isométriquement $\mathcal{N}$ dans un $\mathbb{R}^N$ (par le théorème de Nash). Si A est la seconde forme fondamentale, l'équation $\Delta u = 0$ est alors remplacée par $\Delta_g u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0$, qui se lie en coordonnées

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\partial_\alpha(g^{\alpha\beta}\sqrt{\det(g)}\partial_\beta u^i) + A^i_{jk}(u)\nabla u^j \cdot \nabla u^k = 0$$

Dans le cas où $\dim \mathcal{M} = 1$, i.e. $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$, il s'agit de l'équation des géodésiques :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad (u^i)'' + A^i_{jk}(u^j)'(u^k)' = 0$$

Dans le cas où $\dim \mathcal{M} \geq 2$, on obtient un système non-linéaire dont a priori, la régularité ne va pas de soit. En effet, on cherche à minimiser $\int |du|^2$ donc on suppose u de classe $W^{1,2}$ mais alors $\nabla u^j \cdot \nabla u^k$ est L^1 et on obtient $\Delta u \in L^1$. La théorie classique des EDPs elliptiques ne permet pas un argument de bootstrap.

Une manière de remédier à cette non linéarité du type $|\nabla u|^2$ est de chercher des lois de conservation, i.e. de chercher des équations du type $\mathrm{div}(f(x, u)\nabla u) = 0$. Ces équations donnent des formulations faibles plus agréables à manipuler. Pour en trouver, on peut s'aider des symétries : le théorème de Noether assure l'existence de telles relations dès que $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{N}$ possède certaines symétries, par exemple si $\mathcal{N} = \mathbb{S}^{n-1}$ (cas qui sera étudié à part).

Dans le cas général, l'idée de Hélein [1] est de chercher une base de $T_u\mathcal{N}$ dans laquelle l'équation des applications harmoniques s'exprime bien. Cela conduit à la notion de repère (ou de jauge) de Coulomb et l'on retrouve des lois de conservation venant de l'action de $SO_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, ce qui revient à appliquer le théorème de Noether dans un cadre un peu différent.
Rivière [2] remarque que dans cette base bien particulière, le système s'écrit alors sous la forme $\Delta u^i = \Omega^i_j \cdot \nabla u^j$ avec $\Omega^i_j = -\Omega^j_i$ et cette anti-symétrie permet de conclure.

Dans le cas où $\dim \mathcal{M} = 2$, on remarque que L est conformément invariant : pour tout difféomorphisme conforme $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\int |d(u \circ \phi)|^2 d\mathrm{vol}_g = \int |du|^2 d\mathrm{vol}_g$. De manière générale, en dimension 2, Grüter [3] a montré que l'équation d'Euler-Lagrange associée à un lagrangien quadratique invariant conforme est un mélange entre l'équation des applications harmoniques et l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite $\Delta u = 2H\partial_x u \times \partial_y u$. La méthode de Rivière s'adapte parfaitement à ce cas aussi. Cela permet de répondre à la conjecture de Heinz-Hildebrandt :

tout point critique d'un lagrangien quadratique invariant conforme est Hölder continu. Ces points critiques sont en fait, aussi régulier que le permettent $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$.

Remerciements : Je remercie Paul Laurain pour m'avoir orienté vers ce sujet remarquable ainsi que pour sa disponibilité et ses très nombreuses explications.

Chapitre 2

Applications harmoniques

Cette partie vient de [1]. Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne.
En coordonnées locales $(x^1, \cdots, x^m)$ sur $\mathcal{M}$, la métrique s'écrit $g_{\alpha\beta} = g(x)(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta})$, on note $g^{-1} := (g^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in[\![1,m]\!]}$ la matrice inverse de $(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in[\![1,m]\!]}$ et le laplacien sur $\mathcal{M}$ est alors donné par

$$\forall \phi \in C^2(\mathcal{M}), \quad \Delta_g \phi := \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{\det(g)} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi \right)$$

où on a utilisé la convention d'Einstein : on somme sur les indices répétés.

Definition 2.0.1 :

Une application lisse ϕ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite harmonique si $\Delta_g \phi = 0$ sur Ω.

A une métrique g, on peut lui associer une forme volume $d\mathrm{vol}_g := \sqrt{\det(g)} dx^1 \cdots dx^m$. Pour toute application lisse ϕ définit sur un ouvert $\Omega \subset \mathcal{M}$, on considère son intégrale de Dirichlet

$$E_{(\Omega,g)}(\phi) := \int_\Omega |d\phi|^2 d\mathrm{vol}_g$$

Maintenant si $\psi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$E_{(\Omega,g)}(\phi + t\psi) =_{t\to 0} E_{(\Omega,g)}(\phi) - t \int_\Omega \psi \Delta_g \phi \; d\mathrm{vol}_g + O(t^2)$$

On remarque alors qu'une application harmonique est un point critique de l'énergie de Dirichlet.
Maintenant prenons $(\mathcal{N}, h)$ une autre variété riemannienne. Pour l'étude que l'on fera par la suite, on considérera que $\mathcal{N}$ est plongée dans une $\mathbb{R}^N$. On définit alors de la même manière la fonctionnelle de Dirichlet

$$\forall u \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N}), \quad E_{(\mathcal{M},g)}(u) = \frac{1}{2} \int_\mathcal{M} |du(x)|^2 d\mathrm{vol}_g(x)$$

avec en coordonnées locales, $|du(x)|^2 = g^{\alpha\beta}(x) h_{ij}(u(x)) \partial_\alpha u^i(x) \partial_\beta u^j(x) = g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u \rangle_h$.

Definition 2.0.2 :

Une application $u \in C^2(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ est harmonique si $\forall x \in \mathcal{M},\ \Delta_g u(x) \perp T_{u(x)}\mathcal{N}$, i.e. en notant A la seconde forme fondamentale de $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$,

$$\Delta_g u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0$$

L'équation se lit $\forall i,\ \forall x,\ \Delta_g u^i(x) + g^{\alpha\beta}(x) A^i_{jk}(u(x))\partial_\alpha u^j(x)\partial_\beta u^k(x) = 0$.
Une manière d'obtenir l'existence de solutions faibles non constantes est de chercher à minimiser l'intégrale de Dirichlet parmi une classe de fonctions en fixant une condition au bord d'un domaine, ou alors en cherchant un minimiseur parmi toutes les fonctions homotopes à une application donnée non homotope à un point.

2.1 Solutions faibles

La question est alors d'étudier la régularité des solutions de cette équation. L'équation étant non linéaire, il y a plusieurs manière de définir une solution faible. On en définit ici quelques unes.

2.1.1 Applications faiblement harmoniques

On suppose $\mathcal{N}$ compacte plongée isométriquement de manière C^2 dans $\mathbb{R}^N$. On fixe $\delta > 0$ tel qu'il existe une projection $P : V_\delta\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ de classe C^1 où $V_\delta\mathcal{N}$ est le voisinage tubulaire de $\mathcal{N}$ de rayon δ.

Definition 2.1.1 :

Une fonction $u \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ est dite faiblement harmonique si

$$\forall v \in H^1_0(\mathcal{M};\mathcal{N}), \quad \frac{d}{dt}_{|t=0} E[P(u+tv)] = 0$$

Proposition 2.1.2 :

Soit $u \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ faiblement harmonique. Alors u vérifie

(i) $-\Delta u \perp T_u\mathcal{N}$ faiblement, i.e. si $v \in H^1_0(\mathcal{M};\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathcal{M};\mathbb{R}^N)$ vérifie pour presque tout $x \in \mathcal{M}$, $v(x) \in T_{u(x)}\mathcal{N}$ alors

$$\int_{\mathcal{M}} g^{\alpha\beta}(x) \left\langle \partial_\alpha u, \partial_\beta v \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \ d\mathrm{vol}_g(x) = 0$$

(ii) Faiblement :

$$\Delta_g u + g^{\alpha\beta} A(u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u) = 0$$

i.e. pour tout $v \in H^1_0(\mathcal{M};\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathcal{M};\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathcal{M}} -g^{\alpha\beta}(x) \left\langle \partial_\alpha u, \partial_\beta v \right\rangle + g^{\alpha\beta}(x) \left\langle A(u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u), v \right\rangle \ d\mathrm{vol}_g(x) = 0$$

Démonstration. Soit $v \in H^1_0(\mathcal{M};\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathcal{M};\mathbb{R}^N)$ vérifiant pour presque tout $x \in \mathcal{M}$, $v(x) \in T_{u(x)}\mathcal{N}$.
Pour $t > 0$, notons $P(u+tv) = u + tw_t$ où $w_t = \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y^i}(u+stv)v^i \ ds$. Donc

$$E[P(u+tv)] = \int_{\mathcal{M}} |du + tdw_t|^2 \underset{t\to 0}{=} E(u) + t\int_{\mathcal{M}} \langle du, dw_t\rangle + o(t)$$

Donc l'hypothèse u faiblement harmonique donne

$$\int_{\mathcal{M}} \langle du, dw_0\rangle = 0$$

Avec pour tout $\beta \in [\![1, \dim \mathcal{M}]\!]$,

$$\partial_\beta w_0 = \partial_\beta \left[\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y^i}(u) v^i \, ds \right] = \partial_\beta [dP(u) \cdot v] = \partial_\beta v$$

car $v \in T_u\mathcal{N}$ presque partout donc $dP(u) \cdot v = v$ et (i) suit.
Maintenant, si l'on oublie l'hypothèse $v \in T_u\mathcal{N}$ presque partout, il reste

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta w_0 \rangle &= g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta [dP(u)] \cdot v + dP(u) \cdot \partial_\beta v \rangle \\
&= g^{\alpha\beta} \langle \partial_\beta [dP(u)] \cdot \partial_\alpha u, v \rangle + g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta v \rangle \quad \text{car } \partial_\beta [dP(u)] \text{ est un opérateur symétrique} \\
&= g^{\alpha\beta} \left\langle -\partial_\beta [dP^\perp(u)] \cdot \partial_\alpha u, v \right\rangle + g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta v \rangle \quad \text{car } id = dP(u) + dP^\perp(u) \text{ et } \partial_\beta id = 0 \\
&= -g^{\alpha\beta} \langle A(u)(\partial_\alpha u, \partial_\beta u), v \rangle + g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta v \rangle
\end{aligned}$$

d'où (ii). □

On vérifie que la notion d'application faiblement harmonique ne dépend pas du choix du plongement $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$:

Proposition 2.1.3 :

Soit $J_1 : (\mathcal{N}, h) \to \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ et $J_2 : (\mathcal{N}, h) \to \mathcal{N}_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ deux immersions isométriques de classe C^2 de $(\mathcal{N}, h)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$ une extension de classe C^2 de $J_2 \circ J_1^{-1}$ telle que $\Phi = \begin{cases} J_2 \circ J_1^{-1} & \text{sur } \mathcal{N}_1 \\ 0 & \text{sur } (V_{2\delta}\mathcal{N}_1)^c \end{cases}$
Alors $u \in W^{1,2}(\mathcal{M}; \mathcal{N}_1)$ est faiblement harmonique si et seulement si $\Phi \circ u \in W^{1,2}(\mathcal{M}; \mathcal{N}_2)$ est faiblement harmonique.

Démonstration. Quitte à voire $\mathbb{R}^{N_1}$ et $\mathbb{R}^{N_2}$ comme des sous espaces de $\mathbb{R}^{\max(N_1, N_2)}$, on peut supposer $N_1 = N_2$. Il suffit de montrer que si $\Phi \circ u$ est faiblement harmonique, alors u l'est aussi.
Prenons $u \in W^{1,2}(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ et supposons $\Phi \circ u \in W^{1,2}(\mathcal{M}; \mathcal{N}_2)$ faiblement harmonique.
Soit $v \in W_0^{1,2}(\mathcal{M}; \mathbb{R}^N)$ et $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit pour que $u + tv \in V_\delta \mathcal{N}_1$ presque partout.
Notons $u_t := P(u + tv)$. Alors $d\Phi_{u_t} : T_{u_t}\mathcal{N}_1 \to T_{\Phi(u_t)}\mathcal{N}_2$ est une isométrie et donc

$$|d\Phi_{u_t} [d(P(u + tv))]|^2 = |d(P(u + tv))|^2 \quad \text{presque partout}$$

Or $\Phi \circ P = \Phi$ sur $V_\delta \mathcal{N}_1$ donc

$$|d(\Phi(u + tv)))|^2 = |d(P(u + tv))|^2 \quad \text{presque partout}$$

Notons $w_t := \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial y^i}(u + stv) v^i ds \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}^N)$ de sorte que $\Phi(u + tv) = \Phi(u) + tw_t$. Calculons alors l'intégrale de Dirichlet :

$$\begin{aligned}
E_{(\mathcal{M},g)}(P(u + tv)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |d(P(u + tv))|^2 d\mathrm{vol}_g \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |d(\Phi(u + tv)))|^2 d\mathrm{vol}_g \\
&\underset{t \to 0}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |d(\Phi \circ u)|^2 d\mathrm{vol}_g + t \int_{\mathcal{M}} g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha (\Phi \circ u), \partial_\beta w_t \rangle \, d\mathrm{vol}_g + O(t^2)
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} E_{(\mathcal{M},g)}(P(u + tv)) = \int_{\mathcal{M}} g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha (\Phi \circ u), \partial_\beta w_0 \rangle \, d\mathrm{vol}_g$$

Et $w_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial y^i}(u) v^i = d\Phi_u(v) \in T_{\Phi(u)}\mathcal{N}_2$. Comme $\Phi \circ u$ est faiblement harmonique, le lemme précédent donne que cette intégrale vaut 0 et u est faiblement harmonique □

Dans le cas où $\mathcal{N}$ possède des symétries, on obtient des lois de conservation par le théorème de Noether :

Théorème 2.1.4 : Noether

Soir X un champ de vecteurs lipschitz sur $\mathcal{N}$ qui génère un flot d'isométrie (champ de Killing). Alors pour tout $u \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ faiblement harmonique le champ de vecteur sur $\mathcal{M}$

$$J = J^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = g^{\alpha\beta}\sqrt{\det(g)}\,\langle X(u), \partial_\beta u\rangle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

est faiblement de divergence nulle, i.e.

$$\forall \phi \in H^1_0(\mathcal{M};\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathcal{M};\mathbb{R}), \quad \int_{\mathcal{M}} g^{\alpha\beta}\,\langle X(u), \partial_\beta u\rangle\,\partial_\alpha \phi\; d\mathrm{vol}_g = 0$$

Démonstration. On se place en coordonnées locales sur un domaine Ω et on considère $\phi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
E(\exp_u(t\phi X(u))) &\underset{t\to 0}{=} E(u + t\phi X(u) + o(t)) \\
&\underset{t\to 0}{=} \int_\Omega |du + td(\phi X(u)) + o(t)|^2 \\
&\underset{t\to 0}{=} E(u) + t\int_\Omega g^{\alpha\beta}\,\langle \partial_\alpha u, \partial_\beta(\phi X(u))\rangle + o(t) \\
&\underset{t\to 0}{=} E(u) + t\int_\Omega g^{\alpha\beta}\,[\partial_\beta\phi\,\langle \partial_\alpha u, X(u)\rangle + \phi\,\langle \partial_\alpha u, \partial_\beta(X(u))\rangle] + o(t)
\end{aligned}$$

Comme X est un champ de Killing, dX est anti-symétrique et

$$g^{\alpha\beta}\,\langle \partial_\alpha u, \partial_\beta(X(u))\rangle = g^{\alpha\beta}\,\langle \partial_\alpha u, dX(u)\cdot\partial_\beta u\rangle = -g^{\alpha\beta}\,\langle dX(u)\cdot\partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle$$

Par conséquent, cette quantité est nulle et l'hypothèse u faiblement harmonique donne que

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} E(\exp_u(t\phi X(u))) = \int_\Omega g^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi\,\langle \partial_\alpha u, X(u)\rangle$$

□

En particulier, pour des application à valeurs dans $\mathbb{S}^n$, on obtient :

Théorème 2.1.5 :

Dans $\mathbb{S}^n$, l'équation se réécrit $-\Delta u = u|du|^2$ et le théorème de Noether donne $\mathrm{div}(u^i\nabla u^j - u^j\nabla u^i) = 0$.

Démonstration. On choisit pour X la multiplication par des matrices anti-symétriques (c'est l'algèbre de Lie du groupe des rotations) : on pose $E_{i,j}$ la matrice avec un 1 en position (i,j) et des 0 ailleurs, et $X : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (E_{i,j} - E_{j,i})x$. De sorte que

$$0 = \mathrm{div}(\langle (E_{i,j} - E_{j,i})u, \nabla u\rangle) = \mathrm{div}(u_j\nabla u_i - u_i\nabla u_j)$$

□

2.1.2 Applications faiblement Noether harmoniques

Definition 2.1.6 :

Une application $u \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ est dite faiblement Noether harmonique si et seulement si pour toute famille de difféomorphismes de $\mathcal{M}$, $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dépendant de t de manière C^1 et telle que $\Phi_t = id_{\mathcal{M}}$ en dehors d'un compact de $\mathcal{M}$ (indépendant de t) et $\Phi_0 = id_{\mathcal{M}}$, on a

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} E(u\circ\Phi_t) = 0$$

On a également une loi de conservation pour les applications faiblement Noether harmoniques :

Théorème 2.1.7 : Noether

Une application $u \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ est faiblement Noether harmonique si et seulement si son tenseur énergie-impulsion

$$S_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}|du|^2 g_{\alpha\beta} - \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle$$

a une dérivée covariante faiblement nulle, i.e. pour tout champ de vecteur X de classe C^1_c,

$$\int_{\mathcal{M}} (L_X g^\sharp)^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} d\mathrm{vol}_g = 0$$

Démonstration. Soit X un tel champ de vecteurs et considérons $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ son flot. Commençons par remarquer que

$$E_{(\mathcal{M},g)}(u\circ\Phi_t) = \int_{\mathcal{M}} |d_x(u\circ\Phi_t)|^2_{u\circ\Phi_t(x)} d\mathrm{vol}_g(x) = \int_{\mathcal{M}} |d_{\Phi_{-t}(y)}(u\circ\Phi_t)|^2_{u\circ\Phi_t\circ\Phi_{-t}(y)} d\mathrm{vol}_{\Phi^*_{-t}g}(y) = E_{(\mathcal{M},\Phi^*_{-t}g)}(u)$$

De plus la définition de la dérivée de Lie

$$(L_X g)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\Phi_t^* g(x) - g(x)\right]$$

donne $\Phi^*_{-t}g =_{t\to 0} g - tL_X g + o(t)$ et par conséquent

$$\det(\Phi^*_{-t}g) =_{t\to 0} \det(g)\det(I - tg^{-1}(L_X g) + o(t)) = \det(g)(1 + \mathrm{tr}_g(L_X g) + o(t))$$

Il suit

$$\begin{aligned} E_{(\mathcal{M},\Phi^*_{-t}g)}(u) &=_{t\to 0} \int_{\mathcal{M}} (g^{\alpha\beta} - t(L_X g^{-1})^{\alpha\beta}) \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle \sqrt{\det(g)}\sqrt{1 - tg^{ab}(L_X g)_{ab}}\, dx + o(t) \\ &=_{t\to 0} \int_{\mathcal{M}} g^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle d\mathrm{vol}_g - t\int_{\mathcal{M}} (L_X g^{-1})^{\alpha\beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle - \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle g^{ab}(L_X g)_{ab}\, d\mathrm{vol}_g + o(t) \end{aligned}$$

Or $0 = L_X(g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}) = (L_X g^{-1})^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}(L_X g)_{\alpha\beta}$ et par conséquent,

$$E_{(\mathcal{M},g)}(u\circ\Phi_t) = E_{(\mathcal{M},\Phi^*_{-t}g)}(u) \quad =_{t\to 0} \quad E_{(\mathcal{M},g)}(u) - t\int_{\mathcal{M}} (L_X g^{-1})^{\alpha\beta} \left(\frac{|du|^2}{2} g_{\alpha\beta} + \langle \partial_\alpha u, \partial_\beta u\rangle\right) d\mathrm{vol}_g + o(t)$$

Comme la dérivée en $t = 0$ du membre de gauche est nulle (u faiblement Noether harmonique), le résultat suit. □

2.1.3 Applications minimisantes

Definition 2.1.8 :

Une application $u \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ est minimisante si pour tout $x \in \mathcal{M}$ il existe $K_x \subset \mathcal{M}$ compact tel que pour tout $v \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ vérifiant $v = u$ presque partout sur $\mathcal{M} \setminus K_x$, $E(v) \geq E(u)$.

2.1.4 Applications faiblement stationnaires

Definition 2.1.9 :

Une application $u \in H^1(\mathcal{M};\mathcal{N})$ est dite faiblement stationnaire si elle est à la fois faiblement harmonique et faiblement Noether harmonique.

2.2 Compacité par compensation des applications harmoniques à valeurs dans la sphère

On peut se demander si, étant donné une suite d'applications faiblement harmoniques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement dans $H^1(\mathcal{M};\mathbb{S}^n)$ vers certaine une fonction $u \in H^1(\mathcal{M};\mathbb{S}^n)$, la limite u est également harmonique. Si l'on examine l'équation telle quelle : $\Delta u + |du|^2 u = 0$, il n'y a pas de raison pour que ce soit vrai. En effet, même si on peut supposer que $(u_n)_n$ converge fortement dans L^2 (par Rellich-Kondrakov) vers u, il n'est pas clair que $(|du_n|^2 u_n)_n$ converge fortement vers $|du|^2 u$.
Une première application des lois de conservation est de surmonter ce problème dans le cas $\mathcal{N} = \mathbb{S}^n$:

Théorème 2.2.1 :

> Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^1(\mathcal{M};\mathbb{S}^n)$ telle que $\Delta u_k + |du_k|^2 u_k = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ et $u_k \rightharpoonup u$ dans $H^1(\mathcal{M};\mathbb{S}^n)$. Alors u est faiblement harmonique.

Démonstration. On applique le théorème de Noether : pour tout $\alpha \in H^1_0(\mathcal{M}; so_{n+1}) \cap L^\infty(\mathcal{M}; so_{n+1})$,

$$\int_{\mathcal{M}} \langle d\alpha, u_k \times du_k \rangle \, \mathrm{dvol}_g = 0$$

Soit $\Omega \subset \mathcal{M}$ un ouvert borné et on suppose $\mathrm{supp}(\alpha) \subset \Omega$. Le théorème de Rellich Kondrakov, dit que quitte à extraire une sous-suite, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers un certain $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$ (et même presque partout quitte à extraire encore et donc u est bien à valeurs dans $\mathbb{S}^n$). Ainsi $(u_k \times du_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^1(\Omega; so_{n+1})$: on peut passer à la limite dans l'égalité précédente pour avoir

$$\int_{\mathcal{M}} \langle d\alpha, u \times du \rangle \, \mathrm{dvol}_g = 0$$

Vérifions que u est bien une application faiblement harmonique. Prenons $\phi \in H^1_0(\mathcal{M};\mathbb{R}^{n+1}) \cap L^\infty(\mathcal{M};\mathbb{R}^{n+1})$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \langle d\phi, du \rangle - \langle u, \phi \rangle |du|^2 \, \mathrm{dvol}_g &= \int_{\mathcal{M}} \langle du, d(\phi - \langle u, \phi \rangle u) \rangle \, \mathrm{dvol}_g \\
&= \int_{\mathcal{M}} \langle u, u \rangle \langle du, d(\phi - \langle u, \phi \rangle u) \rangle - \langle u, d(\phi - \langle u, \phi \rangle u) \rangle \cdot \langle u, du \rangle \, \mathrm{dvol}_g \\
&= \int_{\mathcal{M}} \langle u \times du, u \times d(\phi - \langle u, \phi \rangle u) \rangle \, \mathrm{dvol}_g \\
&= \int_{\mathcal{M}} \langle u \times du, d(u \times \phi) \rangle \, \mathrm{dvol}_g \\
\text{car} \quad & \langle u \times du, du \times (\phi - \langle u, \phi \rangle u) \rangle = \langle u, du \rangle \cdot \langle du, \phi - \langle u, \phi \rangle u \rangle - \langle u, \phi - \langle u, \phi \rangle u) \rangle \langle du, du \rangle = 0 \\
&= 0 \quad \text{en prenant } \alpha = u \times \phi
\end{aligned}$$

□

2.3 Continuité implique régularité

Un résultat général dont la démonstration est en annexe, section A.6, permet de démontrer :

Théorème 2.3.1 :

> Toute fonction harmonique continue est lisse.

On donne le plan de la preuve :

Une fonction harmonique vérifie en coordonnées un système de la forme $\partial_\alpha(B_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^i) = f_j(x,u,\nabla u)$ où $B_{ij}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\sqrt{\det(g)}\delta_{ij}$ et $f_j(x,u,p) = -\sqrt{\det(g)}\delta_{ij}A_{kl}^i(u)g_{\alpha\beta}(x)p^{\alpha k}p^{\beta l}$. En particulier, $|f_j(x,u,p)| \leq C|p|^2$.
En comparant u à la solution v de $\partial_\alpha(B_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta v^i) = 0$ sur une boule, $v = u$ au bord de cette boule, on obtient grâce aux estimations de Morrey présentées en section 4.4, que u est hölderienne, puis que ∇u aussi.

Par conséquent, le second membre $A(u)(\nabla u, \nabla u)$ est localement L^2 car continue. Les estimations de Schauder permettent alors un argument de bootstrap.

Pour conclure à la régularité des applications harmoniques, il suffit donc de montrer leur continuité. Comme il est plus aisé d'obtenir des estimations intégrales, on montrera en fait la continuité locale hölderienne. Il suffit donc de se considérer des applications définis sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 3

Lagrangiens quadratiques invariant conformes

En considérant des applications définient sur le disque D^2, on remarque que l'énergie de Dirichlet est invariante par le groupe de Möbius. Plus généralement, on décrit ici les applications conformes ainsi que les lagrangiens possédant la propriété d'être invariante par transformation conforme.
Cette présentation vient de [2].

3.1 Transformations conformes

Definition 3.1.1 :

Soit $(\mathcal{M}^m, g)$ et $(\mathcal{N}^n, h)$ deux variétés riemanniennes, $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe C^1. On dit que u est conforme si en tout $p \in \mathcal{M}$, du_p est une composée d'isométries et de dilatations de $T_p\mathcal{M} \to du_p(T_p\mathcal{M})$, i.e.

$$\forall p \in \mathcal{M},\ \forall X, Y \in T_p\mathcal{M}, \quad \langle du_p(X), du_p(Y)\rangle_h |X|_g |Y|_g = |du_p(X)|_h |du_p(Y)|_h \langle X, Y\rangle_g$$

Lemme 3.1.2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Alors

$$[\forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ay\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0] \Leftrightarrow \left[\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \langle Ax, Ay\rangle_{\mathbb{R}^n} = e^{2\lambda} \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right]$$

Démonstration. Supposons que $\forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ay\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et posons

$$\forall y \in \mathbb{R}^m, \quad L_x y := \langle Ax, Ay\rangle_{\mathbb{R}^n} - \frac{|Ax|^2_{\mathbb{R}^n}}{|x|^2_{\mathbb{R}^m}} \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

Alors $L_x x = 0$ et $L_x(\mathrm{Vect}(x)^\perp) = \{0\}$. Donc $L_x = 0$. Par conséquent,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad \frac{|Ax|^2_{\mathbb{R}^n}}{|x|^2_{\mathbb{R}^m}} \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle Ax, Ay\rangle_{\mathbb{R}^n} = \frac{|Ay|^2_{\mathbb{R}^n}}{|y|^2_{\mathbb{R}^m}} \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Si $\langle x, y\rangle \neq 0$, on obtient $\frac{|Ay|^2_{\mathbb{R}^n}}{|y|^2_{\mathbb{R}^m}} = \frac{|Ay|^2_{\mathbb{R}^n}}{|y|^2_{\mathbb{R}^m}}$.
Dans le cas contraire, on pose $z = \frac{x+y}{2}$ et on obtient $\langle x, z\rangle \neq 0$ et $\langle y, z\rangle \neq 0$. Par ce qui précède, $\frac{|Ax|^2_{\mathbb{R}^n}}{|x|^2_{\mathbb{R}^m}} = \frac{|Az|^2_{\mathbb{R}^n}}{|z|^2_{\mathbb{R}^m}} = \frac{|Ay|^2_{\mathbb{R}^n}}{|y|^2_{\mathbb{R}^m}}$.
Donc la quantité $\frac{|Ax|^2_{\mathbb{R}^n}}{|x|^2_{\mathbb{R}^m}}$ est indépendante de $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, on l'écrit sous la forme e^λ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le sens réciproque est clair. □

On en déduit :

Lemme 3.1.3 :

Une application $u \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ non constante est conforme si et seulement s'il existe $\lambda \in C^0(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall p \in \mathcal{M},\ \forall X, Y \in T_p\mathcal{M}, \quad \langle du_p(X), du_p(Y)\rangle_h = e^{2\lambda(p)} \langle X, Y\rangle_g$$

En particulier, $\forall i,\ |\partial_i u| = e^\lambda$ et $\forall i \neq j,\ \langle \partial_i u, \partial_j u\rangle = 0$.
En dimension 2, les applications conformes sont les fonctions holomorphes et anti-holomorphes. En dimension supérieure ou égale à 3, les applications conformes sont les composées de translations et rotations ainsi que translations et renversements (cf [2], théorème II.1).

Proposition 3.1.4 :

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine connexe de $\mathbb{C}$ et $u \in C^1(U; \mathbb{C})$. Alors u est conforme si et seulement si $\partial_z u := \frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_y u) = 0$ sur U ou bien $\partial_{\bar{z}} u := \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_y u) = 0$ sur U.

Démonstration. Notons $u = u^1 + iu^2$ avec $u^1, u^2 \in C^1(U; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(\partial_z u)(\partial_z \bar{u}) = \langle \partial_z u, \partial_{\bar{z}} u\rangle &= \frac{1}{4}[\partial_x u^1 + \partial_y u^2 + i(\partial_x u^2 - \partial_y u^1)][(\partial_x u^1 - \partial_y u^2) - i(\partial_y u^1 + \partial_x u^2)] \\ &= \frac{1}{4}\left[|\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2 - 2i\left\langle \partial_x \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \partial_y \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}\right\rangle\right]\end{aligned}$$

Donc u est conforme si et seulement si u est holomorphe ou anti-holomorphe. □

Dans le cas $\dim \mathcal{M} = 2$, on remarque que si $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est une application conforme alors son tenseur énergie-impulsion est nul. La condition d'être Noether harmonique signifie que l'image est paramétrée de manière "harmonique".

Regardons l'effet d'une transformation conforme sur l'intégrale de Dirichlet en dimension 2.
Soit $(\mathcal{M}, g)$ et $(\mathcal{M}', g')$ deux surfaces riemanniennes, $\Omega \subset \mathcal{M}$ et $\Omega' \subset \mathcal{M}'$ deux ouverts et $T : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme conforme. Il existe $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \quad e^{2\lambda(x)} g_{\alpha\beta}(x) = g'_{ij}(T(x))\partial^i T_\alpha(x)\partial^j T_\beta(x)$$

Donc

$$\forall x \in \Omega, \quad e^{2\lambda(x)} g'^{ij}(T(x)) = g^{\alpha\beta}(x)\partial^i T_\alpha(x)\partial^j T_\beta(x)$$

Donc pour tout $\phi \in C^1(\Omega'; \mathbb{R})$, $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}(x)\partial_\alpha(\phi \circ T)(x)\partial_\beta(\phi \circ T)(x) &= g^{\alpha\beta}(x)\partial_i\phi(T(x))\partial^i T_\alpha(x)\partial_j\phi(T(x))\partial^j T_\beta(x) \\ &= e^{2\lambda(x)} g'^{ij}(T(x))\partial_i\phi(T(x))\partial_j\phi(T(x)) \end{aligned}$$

Si l'on regarde la forme volume : en écriture matricielle, on a $e^{2\lambda(x)}g(x) = (dT(x))^T g'(T(x))dT(x)$ et par conséquent, comme $|\det(dT)| = |\nabla^\perp T_1 \cdot \nabla T_2| = |\nabla T_1|^2 = e^{2\lambda}$ (T est conforme, avec $\nabla^\perp = (-\partial_2, \partial_1)$),

$$e^{2\lambda(x)}\sqrt{\det g(x)} = |\det dT(x)|\sqrt{\det g'(T(x))} = e^{2\lambda(x)}\sqrt{\det g'(T(x))}$$

Et par conséquent, $E_{(\Omega,g)}(\phi \circ T) = E_{(\Omega',g')}(\phi)$.

3.2 Lagrangiens invariants conformes

On considère un lagrangien de la forme

$$L(u) = \int_{D^2} l(u, \nabla u)dxdy$$

où $l : \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ vérifie une condition de coercivité et de "presque quadraticité" $C^{-1}|p|^2 \leq l(z,p) \leq C|p|^2$. On suppose que L est invariant conforme : pour tout $u \in H^1(D^2; \mathbb{R}^N)$ et toute transformation conforme injective $f : D^2 \to u(D^2)$,

$$L(u \circ f) = \int_{f^{-1}(D^2)} l(u \circ f, \nabla(u \circ f)) = \int_{D^2} l(u, \nabla u) = L(u)$$

Exemples :

i) Etant donné une métrique $g = (g_{ij})_{i,j \in [\![1,N]\!]} \in C^1(\mathbb{R}^N; S_N^{++}(\mathbb{R}^N))$ telle que $C^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq C\delta_{ij}$ sur $\mathbb{R}^N$ et $\|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$. On cherche à minimiser $E_g(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|_g^2$, dont les points critiques sont les applications faiblement harmoniques. Si u est conforme, alors $u(D^2)$ est une surface minimale de $(\mathbb{R}^N, g)$. On exhibera en dernière partie comment les applications harmoniques interviennent dans l'étude des surfaces minimales.

ii) On considère une 2-forme ω dont les coefficients $(\omega_{ij})_{i,j \in [\![1,N]\!]} \in C^1(\mathbb{R}^N; so_N)$ vérifient $\|\nabla\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$. Pour $u \in H^1(D^2; \mathbb{R}^N)$, on considère

$$E^\omega(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2 + \omega(u)(\nabla u, \nabla u)\ dx = \int_{D^2} |\nabla u|^2 + \omega_{ij}(u)\nabla^\perp u^i \cdot \nabla u^j\ dx$$

L'équation d'Euler-Lagrange associe est $\Delta u^i - 2H^i_{kl}(u)\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l = 0$ où H est donné par

$$\forall z \in \mathbb{R}^N,\ \forall U, V, W \in \mathbb{R}^N, \quad d\omega(z)(U,V,W) = 4U \cdot H(V,W) = 4\sum_{i=1}^N U^i H^i(V,W)$$

En dimension $N = 3$ cela se réécrit $d\omega = 4H dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ et l'équation s'écrit $\Delta u = 2H(u)\partial_x u \times \partial_y u$, qui est l'équation de prescription de la courbure moyenne.
En dimension quelconque si u est une solution conforme à ce système, alors $u(D^2)$ est une surface dont le vecteur de courbure moyenne est, en notant $e^\lambda = |\partial_x u| = |\partial_y u|$ le facteur conforme,

$$e^\lambda u^* H = \left(\lambda H^i_{kl}(u)\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l\right)_{1 \leq i \leq N}$$

iii) On peut combiner les deux exemples précédents en

$$E_g^\omega(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|_g^2 + u^*\omega\ dx$$

Et le système devient

$$\forall i \in [\![1,N]\!], \quad \Delta u^i + \Gamma^i_{kl}(u)\nabla u^k \cdot \nabla u^l - 2H^i_{kl}(u)\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l = 0$$

Une solution conforme u définit une surface $u(D^2)$ dont le vecteur de courbure moyenne dans $(\mathbb{R}^N, g)$ est $|\partial_x u| u^* H$.

En fait, il s'agit des seuls possibilités de fonctionnelles quadratiques invariantes conformes :

Théorème 3.2.1 : Grüter [3]

Soit $l : \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 en la première variable et C^2 en la seconde. On suppose que

$$\exists C > 0,\ \forall z \in \mathbb{R}^N,\ \forall p \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^N, \quad C^{-1}|p|^2 \leq l(z,p) \leq C|p|^2$$

et on note

$$\forall u \in H^1(D^2;\mathbb{R}^N), \quad L(u) = \int_{D^2} l(u(x), \nabla u(x))dx$$

On suppose L invariant conforme : pour toute application conforme ϕ,

$$\forall u \in H^1(D^2;\mathbb{R}^N), \quad L(u \circ \phi) = \int_{\phi^{-1}(D^2)} l(u \circ \phi, \nabla(u \circ \phi)) = L(u)$$

Alors il existe une métrique g sur $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 et une 2-forme ω de classe C^1 telles que $L = E_g^\omega$.

Démonstration. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ deux ouverts et $\phi : U \to D^2$ un difféomorphisme conforme. Alors

$$\forall u \in H^1(D^2;\mathbb{R}^N), \quad \int_{D^2} l(u(x), d_x u \cdot d_{\phi^{-1}(x)}\phi) \frac{dx}{|\det(d_{\phi^{-1}(x)}\phi)|} = \int_{D^2} l(u, du)$$

Par conséquent,

$$\forall (z,p) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^N),\ \forall y \in U, \quad l(z, pd_y\phi) = |\det(d_y\phi)| l(z,p) = \frac{1}{2}|\nabla\phi(y)|^2 l(z,p)$$

En prenant $U = B_{\mathbb{R}^2}(0, |\lambda|)$ et $\phi : x \mapsto \lambda x$, on trouve

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad l(z, \lambda p) = \lambda^2 l(z,p)$$

Or l est de classe C^2 en p donc on peut passer à la limite $\lambda \to 0$ pour avoir l'égalité pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, puis on peut dériver deux fois et prendre $\lambda = 0$ pour obtenir, en notant $p = (p^i_\alpha)_{i \in [\![1,N]\!], \alpha \in \{1,2\}}$,

$$\forall (z,p) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^N), \quad l(z,p) = \frac{1}{2}\partial^2_{p^i_\alpha p^j_\beta} l(z,0) p^i_\alpha p^j_\beta$$

On note alors $A_{ij;\alpha\beta}(z) = \partial^2_{p^i_\alpha p^j_\beta} l(z,0)$ et $A_{ij} = (A_{ij;\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \{1,2\}}$ et on trouve l'écriture

$$\forall u \in H^1(D^2;\mathbb{R}^N), \quad L(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} (\nabla u^i)^T A_{ij}(u) \nabla u^j = \frac{1}{2}\int_{D^2} A_{ij;\alpha\beta}(u) \partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j$$

On considère maintenant $U = D^2$ et $\phi : x \mapsto R_\theta x$ où R_θ est la matrice de rotation d'angle θ.

$$p^i A_{ij}(z)(p^j)^T = l(z,p) = l(z, pR_\theta) = p^i R_\theta A_{ij}(z) R_\theta^T (p^k)^T$$

Donc $A_{ij} = R_\theta A_{ij}(z) R_\theta^T$. En choisissant $\theta = \pi/2$, on trouve que A_{ij} est de la forme $\begin{pmatrix} a_{ij} & -b_{ij} \\ b_{ij} & a_{ij} \end{pmatrix}$ avec $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = -b_{ji}$. L'hypothèse de croissance donne alors que $\begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{pmatrix}$ est définie positive et donc définit une métrique. □

Plus généralement, on peut regarder des applications à valeurs dans une variété riemannienne $(\mathcal{N}^n, g)$ de classe C^2 (qu'on supposera compact sans bords). On peut plonger $\mathcal{N}$ isométriquement dans un $\mathbb{R}^N$ et on considère encore, pour une 2-forme ω sur $\mathcal{N}^n$, le Lagrangien

$$\forall u \in H^1(D^2;\mathcal{N}), \quad E^\omega(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2 + u^*\omega\ dx$$

Dont l'équation d'Euler-Lagrange est, en notant A la seconde forme fondamentale de $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$.

$$\Delta u + A(u)(\partial_x u, \partial_x u) + A(u)(\partial_y u, \partial_y u) = \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u) = 2H(u)(\partial_x u, \partial_y u)$$

Le cas $\omega = 0$ correspond aux applications harmoniques.
L'objectif de ce mémoire est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 : Conjecture de Heinz-Hildebrandt

> Les points critiques d'énergie finie d'un Lagrangien invariant conforme à croissance quadratique sont Hölder continus.

Comme l'équation d'Euler-Lagrange associée est critique (au sens des injections de Sobolev), la régularité de ne va a priori pas de soit.
Exemple de non régularité : On considère l'équation $\Delta u + |\nabla u|^2 = 0$, qui est l'équation d'Euler-Lagrange du Lagrangien (non quadratique)

$$L(u) = \int_{D^2} e^{2u(x)} |\nabla u(x)|^2 dx$$

Dont une solution explicite est $u(x) = \log\log(2/|x|)$ qui n'est pas lisse.
La question est alors de comprendre ce qui différencie $|\nabla u|^2$ de $A(u)(\nabla u, \nabla u)$.

Chapitre 4

Quelques points d'analyse

Comme expliqué dans l'introduction, la théorie classique des EDPs elliptiques ne permet pas de conclure quant à la régularité des applications harmoniques. Il faut donc chercher des outils plus précis. On expose ici quelques notions utiles pour la suite. Les preuves et constructions non faites ici sont données en annexe.

4.1 Espaces de Lorentz

Toutes les preuves sont faites en annexe, section A.1.
Les espaces de Lorentz sont des raffinements des espaces L^p. Un intérêt particulier est lié aux inégalités de Wente, que l'on exposera dans la suite.

Un réarrangement d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable est une fonction ayant des sous-niveaux de même mesure.

Definition 4.1.1 : Réarrangement

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable. On note $d_f(\lambda) = |\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \lambda\}|$. Le réarrangement décroissant de $|f|$ est

$$f^* : \left| \begin{array}{ccc} [0, |\Omega|) & \to & \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \\ s & \mapsto & \inf\{t \geq 0 \mid d_f(t) \leq s\} \end{array} \right.$$

de sorte que f^* est décroissante et vérifie

$$\forall s \geq 0, \quad d_f(s) = d_{f^*}(s)$$

Definition 4.1.2 : Espace de Lorentz

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $p, q \in (0, +\infty]$. L'espace de Lorentz $L^{(p,q)}(\Omega; \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que

$$|f|_{(p,q)} := \left[\int_0^{+\infty} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} =_{\text{si } p<\infty} p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\infty} \left[d_f(s)^{\frac{1}{p}} s \right]^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad \text{si } q < +\infty$$

$$|f|_{(p,\infty)} := \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad \text{si } q = +\infty$$

On pose

$$f^{**}(t) := \sup_{|E|\geq t} \frac{1}{|E|}\int_E |f| = \sup_{|E|\geq t} \frac{1}{|E|}\int_0^{|E|} d_{f\mathbf{1}_E}(s)ds$$

Alors

$$\|f\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} := \begin{cases} \left[\int_0^{+\infty}(t^{1/p}f^{**}(t))^q\frac{dt}{t}\right]^{1/q} & \text{si } q<+\infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p}f^{**}(t) & \text{si } q=+\infty \end{cases}$$

définit une norme sur $L^{(p,q)}(\Omega)$ et il existe $C>0$ telle que $C^{-1}|\cdot|_{(p,q)} \leq \|\cdot\|_{L^{(p,q)}} \leq C|\cdot|_{(p,q)}$.

Les espaces de Lorentz sont des espaces de Banach dont on liste quelques propriétés.
Une inclusion bien pratique : si $p\in(0,\infty]$ et $0<q<q'\leq\infty$ alors $L^{(p,q)}\subset L^{(p,q')}$.
Le calcul des espaces duaux suivant les valeurs de p et q sont donnés en annexe. On utilisera uniquement le fait que si $1<p<\infty$ et $1\leq q<\infty$, $(L^{(p,q)})' = L^{(p',q')}$, pour $q=\infty$ $L^{(p',1)} \subsetneq (L^{(p,\infty)})'$.

On a le théorème d'interpolation suivant (preuve en annexe, théorème A.1.9) :

Théorème 4.1.3 : Interpolation

Sot $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ et $U\subset\mathbb{R}^n$ deux ouverts. Soit $1\leq r_0<r_1\leq\infty$ et $1\leq p_0\neq p_1\leq\infty$ et T un opérateur linéaire continu dont le domaine contient $\bigcup_{r_0\leq r\leq r_1} L^r(\Omega)$ et tel que $T: L^{r_0}(\Omega)\to L^{p_0}(U)$ et $T: L^{r_1}(\Omega)\to L^{p_1}(U)$ soient continues.
Alors pour tout $\theta\in[0,1]$ si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1}$$

Alors pour tout $q\in[1,\infty]$, $T: L^{(r,q)}(\Omega)\to L^{(p,q)}(U)$ est continu.

Une application :

Proposition 4.1.4 : Décomposition de Hodge d'un champ de vecteurs

Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un ouvert C^1. A chaque champ de vecteurs $g\in L^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$, on peut associer des fonctions α,β,v définies sur Ω telles que

$$\begin{cases} -\Delta\alpha &= -\mathrm{div}(g) & \text{dans } \Omega \\ \alpha &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta\beta &= -\mathrm{div}(g^\perp) = \partial_y g^1 - \partial_x g^2 & \text{dans } \Omega \\ \beta &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De sorte que $g = \nabla\alpha - \nabla^\perp\beta + \nabla v$ et v vérifie $-\Delta v = 0$ dans Ω.
On pose $P(g) = d\alpha$ et $H(g) = dv$.
Pour $p\in(1,\infty)$, $P,H: L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)\to L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ sont continus. Par le théorème d'interpolation, P,H sont aussi continus de $L^{(p,q)}(\Omega;\mathbb{R}^2)\to L^{(p,q)}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ pour tout $p\in(1,\infty)$ et $q\in[1,\infty]$.

Un exemple d'utilisation pour les applications harmoniques : (preuve en annexe, théorème A.1.10)

Théorème 4.1.5 :

Soit $u: B_2\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ harmonique. Alors

$$\forall 0<r<R<2,\ \forall p\in[1,\infty],\ \exists C=C(r,R,p)>0, \qquad \|\nabla u\|_{L^p(B_r)} \leq C\|\nabla u\|_{L^{(2,\infty)}(B_R)}$$

Remarques : en examinant la preuve, on voit que

- on peut faire de même avec les dérivées d'ordre supérieur
- on peut contrôler $\|\nabla u\|_{L^p(B_r)}$ par d'autres normes que $\|\nabla u\|_{L^{(2,\infty)}(B_R)}$ (ex : $\|\nabla u\|_{L^2(B_{R_2}\setminus B_{R_1})}$, $\|u\|_{L^1(B_R)}$,...) : quitte à réduire la taille des boules, toutes les normes sont "équivalentes"

Une injection utile :

Théorème 4.1.6 :

Pour $m \geq 2$, $W^{1,1}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{\left(\frac{m}{m-1},1\right)}(\mathbb{R}^m)$.

Démonstration. On considère le cas d'une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ (cet espace est dense dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^m)$). Soit $\tilde{f}$ son réarrangement symétrique décroissant, i.e. l'unique fonction radiale telle que

$$\forall s \geq 0, \quad |\{x \in \mathbb{R}^m \mid |f(x)| \geq s\} = |\{x \in \mathbb{R}^m \mid \tilde{f}(x) \geq s\}|$$

On note f^* le réarrangement décroissant de $|f|$ sur $[0,\infty)$ et en notant $\alpha_m := \frac{1}{m}|\mathbb{S}^{m-1}|$, on a $f^*(\alpha_m|x|^m) = \tilde{f}(x)$. L'inégalité de Polya-Szegö (preuve en annexe, section A.5) donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} |df(x)|dx &\geq \int_{\mathbb{R}^m} |d\tilde{f}(x)|dx \\
&\geq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} -\partial_r \tilde{f}(r) r^{m-1} d\sigma(x)\ dr \\
&\geq -|\mathbb{S}^{m-1}| \int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{f}}{dr} r^{m-1} dr \\
&\geq (m-1)|\mathbb{S}^{m-1}| \int_0^{+\infty} \tilde{f}(r) r^{m-2} dr \\
&\geq (m-1)\alpha_m^{1/m} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m-1}{m}} f^*(t) \frac{dt}{t} \quad \text{avec le changement de variable } t = \alpha_m r^m \\
&\geq C(m)\|f\|_{L^{(\frac{m}{m-1},1)}(\mathbb{R}^m)}
\end{aligned}$$

□

Dans le cas critique $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ ne s'injecte pas dans $C^0(\mathbb{R}^2)$ mais si les dérivées sont dans un espace légèrement plus petit, on obtient :

Théorème 4.1.7 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert de classe C^1, $f \in H^1(\Omega)$ telle que $\partial_x f, \partial_y f \in L^{(2,1)}(\Omega)$.
Alors f est continue et bornée sur Ω.

Dans la suite, on notera $K : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{-1}{2\pi} \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ le noyau du laplacien dans $\mathbb{R}^2$: $-\Delta K = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Alors K est dans l'espace $BMO(\mathbb{R}^2)$ que l'on définira plus bas et

$$dK = -\frac{1}{2\pi r^2}\,(xdx + ydy) \in L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)$$

Démonstration. Soit $f \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$. On peut étendre f en $g \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ et l'opérateur d'extension $f \mapsto g$ est continu dans tous les $W^{1,p}$ pour $p \in [1,\infty]$ et par le théorème d'interpolation, $\|dg\|_{L^{(2,1)}} \leq C(\Omega)\|df\|_{L^{(2,1)}}$. Par construction de g, on a pour tout $z \in \mathbb{R}^2$,

$$g(z) = \delta_0 * g(z) = (-\Delta K) * g(z) = (\nabla K) * (\nabla g)(z)$$

Il suit $|g(z)| \leq \|dK\|_{L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)}\|dg\|_{L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)}$ et donc

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C\|df\|_{L^{(2,1)}(\Omega)}$$

La densité de $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ dans $W^{1,(2,1)}$ donne le résultat. □

4.2 Espace de Hardy $\mathcal{H}^1$

Le résultat de Calderon-Zygmund dit que pour une fonction u, si $\Delta u \in L^p$ pour un certain $p \in (1,\infty)$, alors $u \in W^{2,p}$ (voir [4]). Mais comme on l'a vu dans l'introduction, on se retrouve dans le cas critique $p = 1$ et on ne peut pas conclure que $u \in W^{2,1}$. En fait on verra que si l'on a mieux : $\Delta u \in \mathcal{H}^1$, alors on peut conclure que $u \in W^{2,1}$.
On explique ce qu'est cet espace $\mathcal{H}^1$ ici, avec les preuves en annexe (section A.4).

Definition 4.2.1 : Espace de Hardy

L'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ satisfaisant l'une des deux conditions équivalents :

- Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^m} \psi = 1$, pour $t > 0$, $\psi_t : x \mapsto t^{-m}\psi(x/t)$ et $M(f;\psi) : x \mapsto \sup_{t>0} |\psi_t \star f(x)|$, alors $M(f;\psi) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ et
$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} + \|M(f;\psi)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}$$
- On définit la transformée de Riesz de f pour $\alpha \in [\![1,m]\!]$ par $\mathcal{F}(R_\alpha f)(\xi) = -i\frac{\xi_\alpha}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi)$. Alors les $R_\alpha f$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^m)$ et
$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} + \sum_{\alpha=1}^m \|R_\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}$$

Des exemples typiques d'élément de $\mathcal{H}^1$ sont les fonctions de la forme $\langle \nabla\phi, E\rangle$ où $\phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ et $E \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ est un champ de vecteur de divergence nulle. En dimension $m = 2$, on définit l'opérateur $\nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x)$. Les fonctions de forme jacobienne, i.e. $\left\langle \nabla\phi, \nabla^\perp\psi\right\rangle$ pour $\phi, \psi \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, sont des éléments de $\mathcal{H}^1$ (proposition A.4.18). Les fonctions de la forme $\left\langle \nabla\phi, \nabla^\perp\psi\right\rangle c$ avec $c \in W_0^{1,2} \cap L^\infty$ sont également dans $\mathcal{H}^1$ (proposition A.4.19).

Dans le cas où $\Delta\phi \in L^1$, on a

Théorème 4.2.2 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert de classe C^1, $f \in L^1(\Omega)$, ϕ une solution de

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= f \quad \text{dans } \Omega \\ \phi &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors $\partial_x\phi, \partial_y\phi \in L^{(2,\infty)}(\Omega)$ et $\|d\phi\|_{L^{(2,\infty)}(\Omega)} \leq C(\Omega)\|f\|_{L^1(\Omega)}$.
Si de plus, $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ alors $\partial_x\phi, \partial_y\phi \in L^{(2,1)}(\Omega)$ et $\|d\phi\|_{L^{(2,1)}(\Omega)} \leq C(\Omega)\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}$ (en particulier, ϕ est

continue bornée). Donc $\phi \in W_0^{2,1}(\Omega)$ et on a l'estimation $\|\phi\|_{W^{2,1}} \leq C(\Omega)\|f\|_{\mathcal{H}^1}$.

Démonstration. Toujours avec la notation $K : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2\pi}\log(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ on a $dK \in L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)$.
Considérons le cas $f \in L^1(\Omega)$. On étend f par 0 pour obtenir $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et on pose $\Psi := K * \hat{f}$. Alors $-\Delta\Psi = f$ dans $\mathbb{R}^2$ et $d\Psi = dK * f$, comme $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $dK \in L^{(2,\infty)}$, on obtient $d\Psi \in L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)$ avec $\|d\Psi\|_{L^{(2,\infty)}} \leq \|dK\|_{L^{(2,\infty)}}\|f\|_{L^1}$. Pour revenir à ϕ, il suffit de remarquer que $d\phi = P(d\Psi_{|\Omega})$ où P est défini dans la proposition 4.1.0.4.
Maintenant, si $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, 20 donne que $\Psi \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ donc $d\Psi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \subset L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)$. L'estimation de la norme est faite dans la preuve de la proposition A.4.20.

□

Ceci montre que pour avoir de la continuité, il faut mieux que L^1. Une première apparition de $\mathcal{H}^1$ dans notre cadre :

Lemme 4.2.3 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, $u \in H^1(\Omega;\mathbb{S}^n)$ faiblement harmonique. Alors pour tout $B(x_0,r) \Subset \Omega$, il existe $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^{n+1})$ tel que $-\Delta u = f$ dans $B(x_0,r)$.

Démonstration. Posons $\beta^{ij} = \star(u^i du^j - u^j du^i)$. Alors $d\beta^{ij} = 0$ dans Ω. Comme $B(x_0,r)$ est simplement connexe, il existe $B(x_0,r) \Subset B' \Subset \Omega$ une boule et une $(m-2)$-forme α^{ij} telle que $d\alpha^{ij} = \beta^{ij}$ dans B'. Soit $\chi \in C_c^\infty(B';\mathbb{R})$ valant 1 sur $B(x_0,r)$. Définissons alors $f^i \in L^1(\mathbb{R}^m)$ par

$$\begin{cases} f^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sum_{j=1}^{n+1} d(\chi u^j) \wedge d(\chi\alpha^{ij}) \quad \text{dans } B' \\ f^i = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^m \setminus B' \end{cases}$$

En notant $d(\chi\alpha^{ij}) = \sum_k E_k(\star dx^k)$, alors E est définit un champ de vecteur de divergence nulle. Par suite, $f^i \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et l'équation $-\Delta u = u|du|^2$ se réécrit dans B' :

$$-\Delta u^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sum_{j=1}^{n+1} du^j \wedge \beta^{ij} = f^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

□

4.3 Espace BMO

On définit l'espace Bounded Mean Oscillation (BMO). Toutes les preuves sont faites en annexe, section A.2.

Definition 4.3.1 : Espace BMO

Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$, on note

$$\forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall r > 0, \quad f_{x,r} = f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f$$

On pose

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^m)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^m, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f_{x,r}|dy$$

et $BMO(\mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des f telle que $\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^m)} < +\infty$. $BMO(\mathbb{R}^m)/\mathbb{R}$ est un espace de Banach.

En fait, une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ est dans BMO si et seulement si

$$\exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall r > 0, \exists c_{x,r} \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - c_{x,r}|dy \leq A$$

i.e. pour vérifier qu'une fonction est dans BMO, on n'est pas obligé de comparer f à ses moyennes locales.

Exemple : $\log|.| \in BMO(\mathbb{R}^m) \setminus L^\infty(\mathbb{R}^m)$ (donc le noyau du laplacien K également).
Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $R > 0$, on cherche $C_{x_0,R} \in \mathbb{R}$ tel que $|\log|.| - C_{x_0,R}|_{B(x_0,R)}$ soit borné. On remarque que

$$\frac{1}{\nu_m R^m}\int_{B(x_0,R)} |\log|x| - C_{x_0,R}|dx = \frac{1}{\nu_m}\int_{B(\frac{x_0}{R},1)} |\log|y| + C_{x_0,R} + \log R|\ dy$$

On peut donc prendre $C_{x_0,R} = C_{R^{-1}x_0,1} + \log R$ et on est réduit au cas $R = 1$.
Si $|x_0| \leq 2$, on a

$$\int_{B(x_0,1)} |\log|x||dx \leq \int_{B(0,3)} |\log|x||dx < +\infty$$

Si $|x_0| > 2$, on prend $C_{x_0,1} := \log|x_0|$ et on trouve

$$\frac{1}{\nu_m}\int_{B(x_0,1)} |\log|x| - \log|x_0||dx \leq \frac{1}{\nu_m}\int_{B(x_0,1)} \left|\log\frac{1+|x_0|}{|x_0|}\right| dx \leq \log 2$$

Donc $\log|.| \in BMO(\mathbb{R}^m)$.

Contre-exemple : $h : \left(x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\log\frac{1}{x}\right) \notin BMO(\mathbb{R})$.
Sur l'intervalle $(-\epsilon, \epsilon)$ avec $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, on a

$$h_{(-\epsilon,\epsilon)} = \frac{1}{2\epsilon}\int_0^\epsilon \log\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\left(1 + \log\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |h(x) - h_{(-\epsilon,\epsilon)}|dx \geq \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{0} |h_{(-\epsilon,\epsilon)}|dx = \frac{1}{4}\left(1 + \log\frac{1}{\epsilon}\right) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} +\infty$$

Le résultat suivant a contribué à la médaille Fields de Fefferman (preuve en annexe, théorème A.4.17) :

Théorème 4.3.2 : Fefferman-Stein

> BMO($\mathbb{R}^m$) est le dual de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$.

On utilisera souvent pour conclure nos preuves le résultat suivant :

Proposition 4.3.3 :

> Si $m \geq 2$, $f \in L^1(B_{\mathbb{R}^m}(0,1))$, $\alpha \in (0,m)$, alors $\frac{1}{|x|^\alpha} * (f\mathbf{1}_{B(0,1)}) \in BMO(B(0,1))$ et en particulier, il existe $p > 1$ tel que $\frac{1}{|x|^\alpha} * (f\mathbf{1}_{B(0,1)}) \in L^p(B(0,1))$.

Un lemme dont nous aurons besoin dans ce mémoire :

Lemme 4.3.4 :

Soit $f, g, h \in H^1(\mathbb{R}^m)$. On suppose $h \in BMO(\mathbb{R}^m)$ alors on peut donner un sens à

$$\int_{\mathbb{R}^m} \{f, g\}_{\alpha\beta} h = \int_{\mathbb{R}^m} \{h, f\}_{\alpha\beta} g = \int_{\mathbb{R}^m} \{g, h\}_{\alpha\beta} f$$

avec $\{f, g\}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha f \partial_\beta g - \partial_\alpha g \partial_\beta f$ et on a les estimations

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} \{f, g\}_{\alpha\beta} h \right| \leq C \|df\|_{L^2} \|dg\|_{L^2} \|h\|_{BMO}$$

Démonstration. Dans le cas où $f, g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, il s'agit de la dualité $\mathcal{H}^1 - BMO$.
L'estimation permet d'utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. □

4.4 Estimations de Morrey

Pour conclure à une régularité hölderienne on utilisera les résultats suivant.
Cette section vient de [5], chapitre 3.

Théorème 4.4.1 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe. Soit $u \in L^2(\Omega)$ et $\alpha \in (0, 1)$ tels que

$$\forall B(x, r) \subset \Omega, \quad \int_{B(x,r)} |u - u_{x,r}|^2 \leq M^2 r^{n+2\alpha}$$

Alors $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ et pour tout $\Omega' \Subset \Omega$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega')} + \sup_{x \neq y \in \Omega'} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq c(n, \alpha, \Omega, \Omega')(M + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Démonstration. Notons $R_0 := \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Pour $x_0 \in \Omega'$ et $0 < r_1 < r_2 \leq R_0$, on a

$$\forall x, \quad |u_{x_0,r_1} - u_{x_0,r_2}|^2 \leq 2(|u(x) - u_{x_0,r_1}|^2 + |u(x) - u_{x_0,r_2}|^2)$$

Donc en intégrant sur $B(x_0, r_1)$, si l'on note $\omega_n := |B(0, 1)|$,

$$|u_{x_0,r_1} - u_{x_0,r_2}|^2 \leq \frac{2}{\omega_n r_1^n} \left(\int_{B(x_0,r_1)} |u - u_{x_0,r_1}|^2 + \int_{B(x_0,r_2)} |u - u_{x_0,r_2}|^2 \right) \leq \frac{2M^2}{\omega_n r_1^n} \left(r_1^{n+2\alpha} + r_2^{n+2\alpha} \right)$$

En choisissant $R \leq R_0$ et $r_1 := 2^{-i-1}R$ et $r_2 := 2^{-i}R$, on trouve

$$|u_{x_0,2^{-i-1}R} - u_{x_0,2^{-i}R}| \leq c(n) 2^{-(i+1)\alpha} M R^\alpha$$

Donc pour $h < k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{x_0,2^{-h}R} - u_{x_0,2^{-k}R}| \leq \frac{c(n)}{2^{(h+1)\alpha}} M R^\alpha \sum_{i=0}^{k-h-1} \frac{1}{2^{i\alpha}} \leq \frac{c(n, \alpha)}{2^{h\alpha}} M R^\alpha$$

Donc $(u_{x_0,2^{-i}R})_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers une certaine limite $\hat{u}(x_0)$ qui est indépendante du choix de R. Donc $\hat{u}(x_0) = \lim_{r\to 0} u_{x_0,r}$ avec la vitesse de convergence

$$\forall r \in (0, R_0], \quad |u_{x_0,r} - \hat{u}(x_0)| \leq c(n,\alpha) M r^\alpha$$

Or $(x \mapsto u_{x,r})_{r>0}$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers u lorsque $r \to 0$. Donc $u = \hat{u}$ presque partout et la vitesse de convergence donne que cette convergence est uniforme. Comme chaque $x \mapsto u_{x,r}$ est continue pour tout $r > 0$, u est également continue avec la borne

$$\forall x \in \Omega',\ \forall R \in (0, R_0], \quad |u(x)| \leq CMR^\alpha + |u_{x,R}|$$

Il suit

$$\sup_{\Omega'} |u| \leq C[MR^\alpha + \|u\|_{L^2(\Omega)}]$$

Prouvons maintenant que u est hölderienne. Soit $x, y \in \Omega'$ tels $R := |x-y| \leq R_0/2$. Alors

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{x,2R}| + |u(y) - u_{y,2R}| + |u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq c(n,\alpha)M(2R)^\alpha + |u_{x,2R} - u_{y,2R}|$$

Si $\zeta \in B(x, 2R) \cap B(y, 2R)$,

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq |u_{x,2R} - u(\zeta)| + |u_{y,2R} - u(\zeta)|$$

Et en intégrant,

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 \leq \frac{2}{|B(x,r)|}\left(\int_{B(x,2R)} |u - u_{x,2R}|^2 + \int_{B(y,2R)} |u - u_{y,2R}|^2\right) \leq c(n,\alpha)M^2R^{2\alpha}$$

D'où $|u(x) - u(y)| \leq c(n,\alpha)M|x-y|^\alpha$ et pour $|x-y| > R_0/2$,

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\sup_{\Omega'} |u| \leq c\left(M + \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{R_0^\alpha}\right)|x-y|^\alpha$$

□

Corollary 4.4.2 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe, $\alpha \in (0,1)$ et $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ vérifiant

$$\forall B(x,r) \subset \Omega, \quad \int_{B(x,r)} |du|^2 \leq M^2 r^{n-2+2\alpha}$$

Alors $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ et

$$\forall \Omega' \Subset \Omega, \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega')} + \sup_{x\neq y\in\Omega'} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq c(M + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Démonstration. L'inégalité de Poincaré donne

$$\int_{B(r,x)} |u - u_{x,r}|^2 \leq c(n)r^2 \int_{B(x,r)} |du|^2 \leq c(n)M^2 r^{n+2\alpha}$$

□

4.5 Inégalités de Wente

Cette section vient de [1], chapitre 3. Un premier résultat qui ne nécessite pas d'argument sophistiqué, c'est l'exemple type du cas critique où $\Delta\phi \in L^1$ mais où l'on peut quand même conclure que ϕ est régulière :

Théorème 4.5.1 : Inégalité de Wente

Soit $a, b \in H^1(D^2)$ et $\phi \in W_0^{1,p}(D^2)$ pour $p \in [1,2)$ la solution à

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a = \nabla a \cdot \nabla^\perp b & \text{dans } D^2 \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

Alors $\phi \in W_0^{1,2} \cap C^0(D^2)$ et il existe $C > 0$ indépendante de a et b telle que

$$\|\phi\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla\phi\|_{L^2(D^2)} \leq C\|\nabla a\|_{L^2(D^2)}\|\nabla b\|_{L^2(D^2)}$$

Démonstration. Par densité, on peut supposer que $a, b \in C^\infty(D^2)$.
Si $\phi \in L^\infty(D^2)$, alors

$$\int_{D^2} |\nabla\phi|^2 = -\int_{D^2} \phi\Delta\phi \leq \|\phi\|_{L^\infty}\|\partial_x a\partial_y b - \partial_x b\partial_y a\|_{L^1} \leq \|\phi\|_{L^\infty}\|\nabla a\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2}$$

Il reste à montrer que $\phi \in L^\infty$. On peut étendre a et b en $\tilde{a}, \tilde{b} \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ (qui est dense dans $W^{1,2}(\mathbb{C})$). On définit la fonction suivante, à l'aide de la formule de représentation de Green :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \tilde{\phi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \log\frac{1}{|x-y|}\nabla^\perp\tilde{a} \cdot \nabla\tilde{b}(y)dy$$

Ainsi, $\tilde{\phi}$ vérifie $-\Delta\tilde{\phi} = \nabla^\perp\tilde{a} \cdot \nabla\tilde{b}$ sur $\mathbb{C}$ et il suffit de montrer que $|\tilde{\phi}(0)| \leq C\|\nabla a\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2}$ car les autres valeurs de $\tilde{\phi}$ se trouve en composant $\tilde{\phi}$ par un difféomorphisme conforme, et cette composée vérifie la même équation (en composant $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ par ce difféomorphisme). On a

$$\begin{aligned}
|\tilde{\phi}(0)| &= |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \log\frac{1}{|y|}\nabla^\perp\tilde{a} \cdot \nabla\tilde{b}(y)dy| \\
&= |-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \log(r)\left[\partial_r(\tilde{a}\partial_\theta\tilde{b}) - \partial_\theta(\tilde{a}\partial_r\tilde{b})\right] drd\theta| \\
&= |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \tilde{a}\partial_\theta\tilde{b}\frac{dr}{r}d\theta| \\
&= |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \left[\tilde{a} - \frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int_{\partial B(0,r)}\tilde{a}\right]\partial_\theta\tilde{b}\frac{dr}{r}d\theta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\left|\tilde{a} - \frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int_{\partial B(0,r)}\tilde{a}\right|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi}|\partial_\theta\tilde{b}|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dr}{r} \\
&\leq C\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}|\partial_\theta\tilde{a}|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi}|\partial_\theta\tilde{b}|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dr}{r} \\
&\leq C\|\nabla\tilde{a}\|_{L^2(\mathbb{C})}\|\nabla\tilde{b}\|_{L^2(\mathbb{C})} \\
&\leq C\|\nabla a\|_{L^2(D^2)}\|\nabla b\|_{L^2(D^2)} \quad \text{par continuité de l'opérateur de prolongement}
\end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que

$$\begin{cases} \Delta(\phi - \tilde{\phi}) = 0 & \text{dans } D^2 \\ \phi - \tilde{\phi} = -\tilde{\phi} & \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

et le principe du maximum donne

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty} + \|\phi - \tilde{\phi}\|_{L^\infty} \leq 2\|\tilde{\phi}\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla a\|_{L^2(D^2)}\|\nabla b\|_{L^2(D^2)}$$

□

Remarque : changer une condition de Dirichlet homogène par une condition de Neumann homogène ne permet pas toujours de conserver la régularité, comme le fait remarquer [6]. Cependant si l'une des fonctions du second membre (a ou b) possède une trace sur ∂D^2 nulle, alors le résultat reste vrai.

Théorème 4.5.2 : Inégalité de Wente

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de classe C^1, $a, b \in H^1(\Omega)$ et ϕ une solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\phi & = & \nabla^\perp a \cdot \nabla b & \text{dans } \Omega \\ \phi & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Alors $d\phi \in L^{(2,1)}(\Omega)$ et

$$\|d\phi\|_{L^{(2,1)}(\Omega)} \leq C\|a\|_{H^1(\Omega)}\|b\|_{H^1(\Omega)}$$

Démonstration. Quitte à étendre a, b sur $\mathbb{R}^2$ (opération continue sur H^1), on peut supposer $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Alors $\{a, b\} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, le résultat suit de 4.2.2. □

Théorème 4.5.3 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de classe C^2, $a, b \in L^2(\Omega)$ avec $da \in L^{(2,\infty)}(\Omega)$, $db \in L^2(\Omega)$ et ϕ une solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\phi & = & \nabla^\perp a \cdot \nabla b & \text{dans } \Omega \\ \phi & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Alors $\phi \in H^1(\Omega)$ et

$$\|d\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|da\|_{L^{(2,\infty)}(\Omega)}\|db\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration. Soit $\Omega \subset U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert lisse. Alors toute fonction $f \in H^1(\Omega)$ peut s'étendre en $\hat{f} \in H^1_0(U)$. On démontre d'abord le cas $da \in L^2(\Omega)$. On note φ et ψ les solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\varphi & = & \nabla^\perp \hat{a} \cdot \nabla \hat{b} & \text{dans } U \\ \varphi & = & 0 & \text{sur } \partial U \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\psi & = & \nabla^\perp \hat{b} \cdot \nabla \varphi & \text{dans } U \\ \psi & = & 0 & \text{sur } \partial U \end{array} \right.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \|d\varphi\|^2_{L^2(U)} & = & \displaystyle\int_U \varphi \nabla^\perp \hat{a} \cdot \nabla \hat{b} \\ & = & \displaystyle -\int_U \hat{a} \nabla \hat{b} \cdot \nabla^\perp \varphi \\ & = & \displaystyle\int_U d\hat{a} d\psi \\ & \leq & C\|d\hat{a}\|_{L^{(2,\infty)}(U)}\|d\psi\|_{L^{(2,1)}(U)} \\ & \leq & C\|d\hat{a}\|_{L^{(2,\infty)}(U)}\|db\|_{L^2(U)}\|d\varphi\|_{L^2(U)} \end{array}$$

Les prolongements sont continus donc le résultat suit.
Maintenant, si $da \notin L^2(\Omega)$, il reste l'injection $W^{1,p} \hookrightarrow L^{(2,\infty)}$ pour tout $p < 2$. On peut donc approcher a par une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$\forall p < 2,\ a_k \xrightarrow[k\to\infty]{W^{1,p}} a, \qquad \|da_k\|_{L^{(2,\infty)}(\Omega)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \|da\|_{L^{(2,\infty)}(\Omega)}$$

Le résultat suit grâce aux bornes trouvées précédemment. □

4.6 Décomposition de Hodge

Afin d'utiliser l'inégalité de Wente, il faut une condition au bord nulle. Pour se débarrasser d'une trace au bord non triviale, on peut décomposer comme suit :

Un fait intéressant pour les applications harmoniques :

Lemme 4.6.1 :

> Soit $p \in [1,\infty)$, $f \in L^p(B_{\mathbb{R}^m}(0,1))$ harmonique.
> Alors $r \mapsto r^{-m}\int_{B(0,r)} |f|^p$ est croissante.

Démonstration. Soit $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Alors $\Delta(K(f)) = \mathrm{div}(K'(f)\nabla f) = K''(f)|\nabla f|^2 \geq 0$. Donc le théorème de Stokes donne

$$\frac{d}{dr}\int_{\partial B(0,1)} K(f)(r\theta)d\sigma(\theta) = r^{1-m}\int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial K(f)}{\partial \nu} d\sigma = r^{1-m}\int_{B(0,r)} \mathrm{div}(\nabla K(f)) \geq 0$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} K(f) &= \int_0^r \int_{\partial B(0,1)} K(f)(\rho\theta)\rho^{m-1} d\theta d\rho \\
&\leq \int_0^r \rho^{m-1}\rho \int_{\partial B(0,1)} K(f)(r\theta)d\theta \\
&\leq \frac{r}{m}\frac{d}{dr}\int_{B(0,r)} K(f)
\end{aligned}$$

Donc $r \mapsto r^{-m}\int_{B(0,r)} K(f)$ est croissante. En approchant $|.|^p$ par $K_\epsilon : y \mapsto (\epsilon^2 + y^2)^{p/2}$, on obtient le résultat. □

Lemme 4.6.2 :

> Soit $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$ et $\gamma \in (0, \frac{m}{p})$.
> Il existe $C = C(p,q,\gamma) > 0$ telle que pour tout $f \in L^1(B^m)$ vérifiant $df \in L^{(p,q)}(\mathbb{R}^m)$, la solution F de
>
> $$\begin{cases} -\Delta F &= 0 \quad \text{dans } B^m \\ F &= f \quad \text{sur } \partial B^m \end{cases}$$
>
> vérifie $\|dF\|_{L^{(p,q)}(B(0,r))} \leq Cr^\gamma \|df\|_{L^{(p,q)}(B(0,1))}$.

Démonstration. On ne traite que le cas $m = 2$. On remarque que $dF = H(df)$. Pour tout $r \in [0,1]$, on note R_r l'opérateur de restriction sur $B(0,r)$. Il suffit de montrer que

$$\|R_r \circ H\|_{L^{(p,q)}(B(0,1)) \to L^{(p,q)}(B(0,r))} \leq Cr^{\gamma}$$

Soit $p_1 < p < p_2$ où p_2 vérifie $\gamma = 2/p_2$. On applique le lemme précédent pour trouver

$$\|R_r \circ H\|_{L^{p_1}(B(0,1)) \to L^{p_1}(B(0,r))} \leq Cr^{\frac{2}{p_1}}, \quad \|R_r \circ H\|_{L^{p_2}(B(0,1)) \to L^{p_2}(B(0,r))} \leq Cr^{\frac{2}{p_2}}$$

Le théorème d'interpolation donne (cf annexe pour l'estimation de la norme) en utilisant le fait que $r \leq 1$:

$$\|R_r \circ H\|_{L^{(p,q)}(B(0,1)) \to L^{(p,q)}(B(0,r))} \leq C(r^{\gamma} + r^{\frac{2}{p_1}}) \leq Cr^{\gamma}$$

□

Cette introduction vient de [1], section 4.3. On pourra trouver une introduction plus complète dans [7], section 10.5.

Definition 4.6.3 :

Pour $0 \leq k \leq m$, on note $\Lambda^k \mathbb{R}^m$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires anti-symétriques sur $\mathbb{R}^m$.
L'opérateur de Hodge $\star$ est l'unique opérateur linéaire $\star : \Lambda^k \mathbb{R}^m \to \Lambda^{m-k} \mathbb{R}^m$ tel que

- $\star 1 := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$
- $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k \mathbb{R}^m,\ \alpha \wedge (\star \beta) = \beta \wedge (\star \alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$

L'adjoint δ de d pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^m; \Lambda^k \mathbb{R}^m)$ est donné par

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^m; \Lambda^k \mathbb{R}^m), \quad \delta \phi = (-1)^{mk+m+1} \star d \star \phi$$

Lemme 4.6.4 :

Soit $\phi \in L^2(\mathbb{R}^m; \Lambda^1 \mathbb{R}^m)$ une 1-forme différentielle à coefficients dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.
Alors il existe une unique fonction $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$ et une unique 2-forme différentielle $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^m; \Lambda^2 \mathbb{R}^m)$ (avec $2^* = \frac{2m}{m-2}$) telles que $\phi = dw + \delta v$ et $dv = 0$.
De plus, si $v = v_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$ alors $dw, dv_{\alpha\beta} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ avec

$$\|(w, v_{\alpha\beta})\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^m)} + \|d(w, v_{\alpha\beta})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C\|\phi\|^2_{L^2}$$

On rappelle que pour tout $b \in L^2(\mathbb{R}^m; \Lambda^k \mathbb{R}^m)$, si $b = b_{\alpha_1, \cdots, \alpha_k} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_k}$ alors

$$-(d\delta + \delta d)b = (\Delta b_{\alpha_1, \cdots, \alpha_k}) dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_k}$$

Démonstration. L'existence de w vient du problème variationnel

$$\inf_{f \in H^1(\mathbb{R}^m)} \int_{\mathbb{R}^m} |df - \phi|^2$$

En effet, il existe un unique minimiseur w qui vérifie alors $\Delta w = \sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha \phi_\alpha$ avec l'estimation $\|dw\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$. L'estimation $\|w\|_{L^{2^*}} \leq C\|\phi\|_{L^2}$ vient de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

L'existence de v vient de la résolution de $-\Delta v_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi_\beta - \partial_\beta \phi_\alpha$, l'unicité et les estimations sont obtenues comme pour w.
Pour vérifier que $\phi = dw + \delta v$, il suffit de remarquer que $\phi - dw - \delta v$ est harmonique :

$$(d\delta + \delta d)(\phi - dw - \delta v) = d(\delta\phi - \Delta w) + \delta(d\phi - \Delta v) = 0$$

et que ses coefficients sont dans $H^1(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Chapitre 5

Régularité des applications faiblement harmoniques à valeurs dans la sphère

5.1 Preuve de Hélein

Cette section vient de [1], section 3.5. Ce fut historiquement la première preuve d'une régularité partielle d'applications harmoniques. Elle se fait par l'absurde en utilisant le théorème de Noether.

Théorème 5.1.1 :

> Soit Ω un ouvert d'une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ de dimension m et $u \in H^1(\Omega; \mathbb{S}^n)$. On suppose $g \in C^{k,\alpha}$ avec $k \geq 0$ et $0 < \alpha < 1$.
> Si u est faiblement stationnaire, il existe $S \subset \Omega$ fermé de $(m-2)$-dimension de Hausdorff nulle telle que $u \in C^{k+1,\alpha}$ sur $\Omega \setminus S$.

On peut supposer que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$ muni de la métrique euclidienne. On note $\mathcal{H}^s$ la mesure s-dimensionnelle de Hausdorff.
Dans toute la suite, pour $u \in H^1(\Omega; \mathbb{S}^n)$, $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$, on note

$$E_{x,r}(u) := \frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |du|^2$$

Lemme 5.1.2 :

> Soit $u \in H^1(\Omega; \mathbb{S}^n)$. Pour $\epsilon > 0$, on note $S' := \left\{ x \in \Omega \mid \sup_{r>0, B(x,r) \subset \Omega} E_{x,r}(u) \geq \epsilon^2 \right\}$. Alors $\mathcal{H}^{m-2}(S') = 0$.

Démonstration. Soit $\delta > 0$. On considère un recouvrement de Vitali de S' : il existe k points $y_1, \cdots, y_k \in S'$ tels que $(B(y_i, \delta))_{i \in [\![1,k]\!]}$ soit un recouvrement de S' et les $B(y_i, \delta/2)$ soient disjointes. Par conséquent, les $B(y_i, \delta)$ s'intersectent au plus N fois, où $N \in \mathbb{N}$ ne dépend que de m. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{B(y_i,\delta)} |du|^2 \leq N \int_{\bigcup_{i=1}^{k} B(y_i,\delta)} |du|^2$$

Par définition des y_i,

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad \frac{1}{\delta^{m-2}} \int_{B(y_i,\delta)} |du|^2 > \epsilon^2$$

Donc pour tout $\delta > 0$, $k\epsilon^2\delta^{m-2} < N\int_\Omega |du|^2$ et donc $\mathcal{H}^{m-2}(S')$ est fini, et en particulier $\mathcal{H}^m(S') = 0$. En regardant plus précisément cette inégalité, on a même

$$\forall \delta > 0, \quad \mathcal{H}^m\left(\bigcup_{i=1}^k B(y_i,\delta)\right) \leq Ck\delta^m \leq \left(C\frac{N}{\epsilon^2}\int_\Omega |du|^2\right)\delta^2$$

Par convergence dominée, on obtient

$$k\epsilon^2\delta^{m-2} \leq N\int_{\bigcup_{i=1}^k B(y_i,\delta)} |du|^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

Et $\mathcal{H}^{m-2}(S') = 0$. □

Lemme 5.1.3 : Formule de monotonie

> Soit $u \in H^1(\Omega;\mathbb{S}^n)$ faiblement Noether harmonique.
> Alors pour tout $x \in \Omega$ et $0 < r \leq r_1$ tels que $B(x,r_1) \subset \Omega$, $E_{x,r}(u) \leq E_{x,r_1}(u)$.

Démonstration. On considère $\chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}_+;[0,1])$ décroissante telle que $\chi_\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{dans } [0,1-\epsilon] \\ 0 & \text{dans } [1+\epsilon,+\infty) \end{cases}$ et on note, avec $\rho = |x - x_0|$,

$$F_\epsilon(r) := \frac{1}{r^{m-2}}\int_\Omega \chi_\epsilon\left(\frac{\rho}{r}\right)|du|^2 dx$$

Notons $S_{\alpha\beta}$ le tenseur énergie-impulsion de u. Comme u est faiblement Noether harmonique, le théorème 2.1.7 donne que $S_{\alpha\beta}$ est de divergence nulle et donc :

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\chi_\epsilon\left(\frac{\rho}{r}\right)x^\beta S_{\alpha\beta}\right)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \chi'_\epsilon\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{\rho}{r}\left(|du|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\right)dx + \frac{m-2}{2}\int_\Omega \chi_\epsilon\left(\frac{\rho}{r}\right)|du|^2 dx$$

Donc

$$F'_\epsilon(r) = -\frac{2}{r^m}\int_\Omega \chi'_\epsilon\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)\rho\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx \leq 0$$

Donc F_ϵ est décroissante et le passage à la limite $\epsilon \to 0$ donne le résultat. □

Proposition 5.1.4 :

> Soit $u \in H^1(\Omega;\mathbb{S}^n)$ faiblement stationnaire. alors il existe $\epsilon > 0$ et $\tau \in (0,1)$ tels que pour tout $y \in \Omega$, $r > 0$ tels que $B(y,r) \subset \Omega$, si $E_{y,r}(u) \leq 2^{m-2}\epsilon^2$ alors $E_{y,\tau r}(u) \leq \frac{1}{2}E_{y,r}(u)$.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite de boules $(B(x_k,r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ incluses dans Ω telles que

$$\lambda_k^2 := E_{x_k,r_k}(u) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \qquad E_{x_k,\tau r_k}(u) > \frac{\lambda_k^2}{2}$$

où $\tau \in (0,1)$ sera choisi plus tard.
On effectue un changement d'échelle : pour $z \in B(0,1)$, on note $v_k(z) := \frac{1}{\lambda_k}(u(x_k + r_k z) - u_{x_k,r_k})$ et on obtient

$$E_{0,1}(v_k) = \int_{B(0,1)} |dv_k|^2 dz = 1, \quad E_{0,\tau}(v_k) = \frac{1}{\tau^{m-2}}\int_{B(0,\tau)} |dv_k|^2 dz > \frac{1}{2}$$

De plus, comme $(v_k)_{0,1} = 0$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(B(0,1))$ (Poincaré). Ainsi $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(B(0,1))$ et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers v dans $L^2(B(0,1);\mathbb{R}^{n+1})$ et faiblement dans $H^1(B(0,1);\mathbb{R}^{n+1})$.

Montrons que $\Delta v = 0$ dans $\mathcal{D}'(B(0,1);\mathbb{R}^{n+1})$.
Soit $\phi \in C_c^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^{n+1})$ et posons

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in B(x_k, r_k), \quad \phi_k(x) := \phi(\frac{x - x_k}{r_k})$$

L'hypothèse u faiblement harmonique donne

$$\int_{B(x_k,r_k)} \langle du, d\phi_k\rangle\, dx = \int_{B(x_k,r_k)} |du|^2 \langle u, \phi_k\rangle\, dx$$

Et le changement de variable $x = r_k z + x_k$ donne

$$\int_{B(0,1)} \langle dv_k, d\phi\rangle\, dz = \lambda_k \int_{B(0,1)} |dv_k|^2 \langle u(x_k + r_k z), \phi(z)\rangle\, dz$$

On peut passer à la limite $k \to \infty$ pour obtenir $\int_{B(0,1)} \langle dv, d\phi\rangle = 0$ pour tout ϕ, i.e. $\Delta v = 0$. La formule de monotonicité donne ($E_{0,1}(v) = 1$)

$$\frac{1}{\tau^{m-2}} \int_{B(0,\tau)} |dv|^2 \leq \tau^2$$

On fait le choix $\tau^2 < 1/4$ et on va obtenir une contradiction. Il suffit donc de montrer que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers v dans $H^1(B(0,\frac{1}{2}))$.
Prenons $\zeta \in C_c^\infty(B(0,1))$ telle que $\zeta = 1$ sur $B(0,\frac{1}{2})$ et $\zeta = 0$ sur $B(0,\frac{7}{8})^c$. Posons $\phi_k := \zeta^2(v_k - v) \in H_0^1(B(0,1))$.
L'hypothèse u faiblement harmonique donne en utilisant ϕ_k comme fonction test :

$$\int_{B(0,1)} \langle dv_k, d\phi\rangle\, dz = \lambda_k \int_{B(0,1)} |dv_k|^2 \langle u_{x_k,r_k} + \lambda_k v_k, \phi_k\rangle\, dz$$

Or $\int_{B(0,1)} \langle dv, \phi_k\rangle\, dz = 0$ donc

$$\int_{B(0,1)} \langle d(v_k - v), d\phi\rangle\, dz = \lambda_k \int_{B(0,1)} |dv_k|^2 \langle u_{x_k,r_k} + \lambda_k v_k, \phi_k\rangle\, dz$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\frac{1}{2})} |d(v_k - v)|^2 dz + o(1) &\leq \int_{B(0,1)} \zeta^2 |d(v_k - v)|^2 dz + 2\int_{B(0,1)} \zeta \langle d(v_k - v), (v_k - v) d\zeta\rangle\, dz \\
&\leq \lambda_k \int_{B(0,1)} |dv_k|^2 \langle u_{x_k,r_k} + \lambda_k v_k, \phi_k\rangle\, dz
\end{aligned}$$

Or $\langle u_{x_k,r_k} + \lambda_k v_k, dv_k\rangle = 0$ (car $\langle u, du\rangle = 0$) donc les matrices (avec pour tout $a, b \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a \times b = ab^T - ba^T$)

$$b_{k,\alpha} := (u_{x_k,r_k} + \lambda_k v_k) \times \frac{\partial v_k}{\partial z^\alpha} = u(x_k + r_k z) \times \frac{\partial v_k}{\partial z^\alpha}(z) \in L^2(B(0,1); \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}))$$

sont bornées dans L^2 et vérifient

$$|dv_k|^2 (u_{x_k,r_k} + \lambda_k v_k) = b_{k,\alpha} \frac{\partial v_k}{\partial z^\alpha}$$

Donc

$$\lambda_k \int_{B(0,1)} |dv_k|^2 \langle u_{x_k,r_k} + \lambda_k v_k, \phi_k\rangle\, dz = \lambda_k \left[\int_{B(0,1)} \left\langle b_{k,\alpha} \frac{\partial\, \zeta v_k}{\partial z^\alpha}, \zeta(v_k - v) \right\rangle dz + \int_{B(0,1)} \left\langle b_{k,\alpha} v_k \frac{\partial \zeta}{\partial z^\alpha}, \zeta(v_k - v) \right\rangle dz \right]$$

Il suffit de montrer que les deux intégrales sont bornées.
Pour que la seconde intégrale soit bornée, il suffit de montrer que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^4(B(0,\frac{7}{8}))$:
Prenons $z_0 \in B(0,\frac{7}{8})$ et $r \in (0,\frac{1}{8}]$. Posons $y_k = x_k + r_k z_0 \in B(x_k, \frac{7r_k}{8})$. La formule de monotonie donne

$$E_{y_k,rr_k}(u) \leq 8^{m-2} E_{y_k,\frac{r_k}{8}}(u) \leq 8^{m-2} E_{x_k,r_k}(u) = 8^{m-2}\lambda_k^2$$

Donc en revenant à v_k, $E_{z_0,r}(v_k) \leq 8^{m-2}$. L'inégalité de Sobolev-Poincaré donne alors

$$\forall k \geq 0, \quad \frac{1}{r^m}\int_{B(z_0,r)} |v_k - (v_k)_{z_0,r}|dz \leq C$$

Comme $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(B(0,1))$, l'inégalité de John-Nirenberg donne que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(B(0,\frac{7}{8}))$ pour tout $1 \leq p < \infty$:

$$\|v_k\|_{L^p(B(0,\frac{7}{8}))} \leq \|v - (v_k)_{0,\frac{7}{8}}\|_{L^p(B(0,\frac{7}{8}))} + |(v_k)_{0,\frac{7}{8}}| \leq C(p) + \|v_k\|_{L^2(B(0,\frac{7}{8}))}$$

On utilise le cas $p = 4$.
Pour la première intégrale, on note que

$$b_{k,\alpha}(z) = \frac{r_k}{\lambda_k} u \times \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}(r_k z + x_k)$$

et le théorème de Noether donne $\mathrm{div}(b_{k,.}) = 0$. Donc $\left(b_{k,\alpha}\frac{\partial\ \zeta v_k}{\partial z^\alpha}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et il reste à montrer que $(\zeta(v_k - v))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BMO(\mathbb{R}^m)$.
Prenons $z_0 \in B(0,\frac{7}{8})$ et $r \in (0,\frac{1}{8}]$. Le fait que ζ soit C^∞ donne

$$\sup_{y\in B(x_0,r)} |(\zeta v_k)_{z_0,r} - \zeta(y) v_{z_0,r}| \leq \frac{Cr}{r^m}\int_{B(z_0,r)} |v_k|dz$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(z_0,r)|}\int_{B(z_0,r)} |\zeta v_k - (\zeta v_k)_{x_0,r}|dz &\leq \frac{1}{r^m}\int_{B(z_0,r)} |v_k - (v_k)_{z_0,r}|dz + \frac{Cr}{r^m}\int_{B(z_0,r)} |v_k|dz \\
&\leq C + \frac{C}{r^{m-1}}\int_{B(z_0,r)} |v_k|dz \\
&\leq C + C\left(\int_{B(0,\frac{7}{8})} |v_k|^m dz\right)^{\frac{1}{m}} \leq C
\end{aligned}$$

De même lorsque $z_0 \notin B(0,\frac{7}{8})$ (ζ s'annule). On obtient la borne voulue, l'inégalité voulue, la convergence voulue et la contradiction voulue. □

Lemme 5.1.5 :

> Avec les notations précédentes, pour tout $y \in \Omega$, $r > 0$ tels que $B(y,r) \subset \Omega$, si $E_{y,r}(u) \leq 2^{m-2}\epsilon^2$, alors pour tout $\rho \in (0,r)$,
>
> $$E_{y,\rho}(u) \leq \frac{2}{\tau^{m-2}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{-\frac{\log 2}{\log \tau}} E_{y,r}(u)$$

Démonstration. On itère l'inégalité obtenue précédemment pour trouver

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad E_{y,\tau^p r}(u) \leq \frac{1}{2^p} E_{y,r}(u)$$

Si $0 < \rho < r$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $\tau^{p+1} r \leq \rho < \tau^p r$ et alors la formule de monotonie donne

$$E_{y,\rho}(u) \leq \frac{1}{\tau^{m-2}} E_{y,\tau^p r}(u) \leq \frac{1}{2^p \tau^{m-2}} E_{y,r}(u)$$

Pour ce choix de p, on a

$$\frac{1}{2^p \tau^{m-2}} \leq \frac{2}{\tau^{m-2}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{-\frac{\log 2}{\log \tau}}$$

□

En particulier sous les hypothèses du lemme précédent, pour $q \in [1, \frac{2m}{m-2}]$ et $\alpha := -\frac{\log 2}{\log \tau} > 0$,

$$\frac{1}{\rho^m} \int_{B(y,\rho)} |u - u_{y,\rho}|^q dx \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha q} E_{y,r}(u)$$

Fixons un point $y_0 \in \Omega$ et deux rayons $r_0 > r_1 > 0$ tel que $B(y_0, r_0) \subset \Omega$ et $E_{y_0,r_0}(u) \leq 2^{m-2}\epsilon^2$. Alors pour tout $z \in B(y_0, r_1)$ et $\rho > 0$ vérifiant $B(z,\rho) \subset B(y_0, r_1)$, il existe $r > \max(\frac{r_0 - r_1}{2}, \rho)$ tel que $B(z,r) \subset B(y_0, r_0)$, on a

$$\frac{1}{\rho^m} \int_{B(z,\rho)} |u - u_{z,\rho}|^q \leq C\rho^{\alpha q} \frac{E_{z,r}(u)}{r^{\alpha q}} \leq C\rho^{\alpha q} \sup \left\{ \frac{E_{\bar{z},\bar{r}}(u)}{\bar{r}^{\alpha q}} \mid \begin{array}{c} \bar{z} \in B(y_0, r_1), \bar{r} \geq \frac{r_0 - r_1}{2} \\ B(\bar{z}, \bar{r}) \subset B(y_0, r_0) \end{array} \right\}$$

Ceci étant vrai pour tout $B(z,\rho) \subset B(y_0, r_0)$, on obtient que u est α-hölderienne sur $B(y_0, r_0)$.

5.2 Preuve de Rivière

Cette section vient de [2], chapitre 7. Il s'agit d'une preuve directe qui se généralise bien pour montrer la conjecture de Hildebrandt.
On considère $u \in H^1(B^2; \mathbb{S}^n)$ faiblement harmonique : $-\Delta u = |du|^2 u$ dans $\mathcal{D}'(D^2)$ (D^2 : boule unité de $\mathbb{R}^2$). Le théorème de Noether donne $\operatorname{div}(u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i) = 0$ et le lemme de Poincaré dit qu'il existe $b^{ij} \in H^1(D^2; \mathbb{R}^{n+1})$ tel que $\nabla^\perp b^{ij} = u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i$. L'équation se réécrit

$$-\Delta u^i = u^i \sum_j \nabla u^j \cdot \nabla u^j = \sum_j \left(\nabla^\perp b^{ij} \cdot \nabla u^j + u^j \nabla u^i \cdot \nabla u^j\right) = \sum_j \nabla^\perp b^{ij} \cdot \nabla u^j + \nabla u^i \cdot \nabla \left(\frac{|u|^2}{2}\right)$$

Et on arrive au système

$$\begin{cases} -\Delta u^i = \sum_j \nabla^\perp b^{ij} \cdot \nabla u^j \\ \nabla^\perp b^{ij} = u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i \end{cases}$$

On remarque que le membre de droite dans l'équation ci-dessus est un jacobien, on va donc chercher à se ramener à une équation permettant d'utiliser l'inégalité de Wente : on effectue une décomposition de Hodge sur le bon domaine.
Fixons $\epsilon_0 > 0$ et prenons $\frac{1}{2} > \rho > 0$ tel que

$$\forall r \in (0, \rho), \ \forall p \in B(0, \frac{1}{2}), \quad \int_{B(p,r)} |du|^2 < \epsilon_0$$

Soit $r < \rho_0$ et décomposons $u = \phi + v$ dans $B(p,r)$ avec

$$\begin{cases} -\Delta \phi^i = \sum_j \nabla^\perp b^{ij} \cdot \nabla u^j & \text{dans } B(p,r) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B(p,r) \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{dans } B(p,r) \\ v = u & \text{sur } \partial B(p,r) \end{cases}$$

Par l'inégalité de Wente, ϕ est continue, et

$$\|d\phi\|_{L^{(2,1)}(B(p,r))} \leq C\|du\|_{L^2(B(p,r))} \|db\|_{L^2(B(p,r))} \leq C\|du\|^2_{L^2(B(p,r))} \leq C\epsilon_0 \|du\|_{L^2(B(p,r))}$$

Lemme 5.2.1 :

Comme v est harmonique, $\rho \mapsto \rho^{-2} \int_{B(p,\rho)} |dv|^2$ est croissante.

Démonstration. On dérive

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\int_{B(p,\rho)}|dv|^2\right) &= -\frac{2}{\rho^3}\int_{B(p,\rho)}|dv|^2 + \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\int_{\mathbb{S}^1}\int_0^\rho |dv(p+re^{i\theta})|^2 r dr d\theta\right) \\
&= -\frac{2}{\rho^3}\int_{B(p,\rho)}|dv|^2 + \frac{1}{\rho^2}\int_{\partial B(p,\rho)}|dv|^2
\end{aligned}$$

Or comme v est harmonique, on a, avec $v_{p,\rho}$ la moyenne de v sur $B(p,\rho)$:

$$0 = \int_{B(p,\rho)}(v - v_{p,\rho})\Delta v = -\int_{B(p,\rho)}|dv|^2 + \int_{\partial B(p,\rho)}(v - v_{p,\rho})\frac{\partial v}{\partial \nu}$$

Donc

$$\frac{1}{\rho}\int_{B(p,\rho)}|dv|^2 = \int_{\partial B(p,\rho)}\frac{v - v_{p,\rho}}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \nu} \leq \left\|\frac{v - v_{p,\rho}}{\rho}\right\|_{L^2(\partial B(p,\rho))}\left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\partial B(p,\rho))}$$

L'inégalité de Wirtinger donne $\left\|\frac{v-v_{p,\rho}}{\rho}\right\|_{L^2(\partial B(p,\rho))} \leq \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right\|_{L^2(\partial B(p,\rho))} \leq \|dv\|_{L^2(\partial B(p,\rho))}$ et de plus, si l'on note $p = (x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B(p,\rho)}[(x - x_p)(\partial_x v) + (y - y_p)(\partial_y v)] \cdot \Delta v \; dxdy \\
&= -\int_{B(p,\rho)}\nabla[(x - x_p)(\partial_x v) + (y - y_p)(\partial_y v)] \cdot \nabla v \; dxdy + \int_{\partial B(p,\rho)}\rho\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 \\
&= -\int_{B(p,\rho)}|dv|^2 + (z - p)\cdot\nabla\left(\frac{|dv|^2}{2}\right)\; dz + \int_{\partial B(p,\rho)}\rho\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 \\
&= -\int_{B(p,\rho)}|\nabla v|^2 - \operatorname{div}(z - p)\frac{|\nabla v|^2}{2}\; dz - \int_{\partial B(p,\rho)}\rho\frac{|\nabla v|^2}{2} + \int_{\partial B(p,\rho)}\rho\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2
\end{aligned}$$

On obtient l'identité de Pohozaev :

$$\int_{\partial B(p,\rho)}|\nabla v|^2 = 2\int_{\partial B(p,\rho)}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2$$

Si l'on injecte ceci dans l'estimation précédente, on trouve

$$\frac{1}{\rho}\int_{B(p,\rho)}|dv|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{\partial B(p,\rho)}|dv|^2$$

Et le résultat suit. □

Par conséquent

$$\int_{B(p,\frac{r}{2})}|dv|^2 \leq \frac{1}{4}\int_{B(p,r)}|dv|^2$$

Il suit

$$\int_{B(p,\frac{r}{2})}|\nabla u|^2 = \int_{B(p,\frac{r}{2})}\left(|\nabla v|^2 + \nabla v\cdot\nabla\phi + |\nabla\phi|^2\right) \leq \frac{3}{2}\int_{B(p,\frac{r}{2})}\left(|\nabla v|^2 + |\nabla\phi|^2\right) \leq \frac{3}{8}\int_{B(p,r)}|\nabla v|^2 + \frac{3}{2}\int_{B(p,r)}|\nabla\phi|^2$$

Or comme $\phi = 0$ sur $\partial B(p,r)$ et que $\Delta v = 0$ dans $B(p,r)$, on a

$$\int_{B(p,r)} \nabla v \cdot \nabla \phi = 0$$

Donc $\int_{B(p,r)} |\nabla u|^2 = \int_{B(p,r)} \left(|\nabla v|^2 + |\nabla \phi|^2\right)$ et

$$\int_{B(p,\frac{r}{2})} |\nabla u|^2 \leq \frac{3}{8} \int_{B(p,r)} |\nabla u|^2 + \frac{9}{8} \int_{B(p,r)} |\nabla \phi|^2 \leq \frac{3}{8} \|\nabla u\|^2_{L^2(B(p,r))} + \frac{9}{8} C\epsilon_0 \|\nabla u\|^2_{L^2(B(p,r))}$$

Si l'on choisit $\epsilon_0 > 0$ de sorte que $\frac{3}{8} + \frac{9C}{8}\epsilon_0 < \frac{3}{4}$, i.e. $\epsilon_0 < (3C)^{-1}$, on trouve

$$\|du\|^2_{L^2(B(p,\frac{r}{2}))} \leq \frac{3}{4} \|du\|^2_{L^2(B(p,r))}$$

et donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $0 < r < \rho$

$$\|du\|_{L^2(B(0,r))} \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha} \|du\|_{L^2(B(0,1))}$$

Donc

$$\sup_{r \in (0,\frac{1}{4}), p \in B(0,\frac{1}{2})} r^{-\alpha} \int_{B(p,r)} |du|^2 < +\infty$$

Et $u \in C^{0,\frac{\alpha}{2}}(B(0,\frac{1}{2}))$. En injectant ceci dans le système initial, on arrive à

$$\sup_{r \in (0,\frac{1}{4}), p \in B(0,\frac{1}{2})} r^{-\alpha} \int_{B(p,r)} |\Delta u| < +\infty$$

Maintenant si l'on considère $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2; [0,1])$ telle que $\chi = \begin{cases} 1 & \text{dans } B(0,3/8) \\ 0 & \text{dans } B(0,1/2)^c \end{cases}$, on pose $\psi := \chi u \in C_c^{0,\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$ ($\psi = u$ dans $B(0,\frac{1}{4})$). Par conséquent, si $x \in B(0,\frac{1}{4})$, on a

$$u(x) = \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y) \Delta \psi(y)\ dy$$

Et donc

$$|du(x)| = |\int_{\mathbb{R}^2} dK(x-y) \Delta \psi(y)\ dy| \leq C \frac{1}{|x|} * (\mathbf{1}_{B(0,\frac{1}{2})} |\Delta u|) + \int_{B(0,\frac{3}{8})^c} \frac{C}{|x-y|} |u \Delta \chi + 2 \nabla u \cdot \nabla \chi|(y)\ dy$$

Et on obtient

$$\forall p \in B(0,\frac{1}{4}), \quad |\nabla u(p)| \leq C \left[\frac{1}{|x|} * (\mathbf{1}_{B(0,\frac{1}{2})} |\Delta u|)(p) + \|u\|_{H^1(B(0,\frac{1}{4}))} \right]$$

Ceci montre qu'il existe $q > 1$ tel que $u \in W^{1,q}(B(0,\frac{1}{4}))$. Par conséquent $b \in W^{1,q}(B(0,\frac{1}{4}))$ et $-\Delta u \in L^q(B(0,\frac{1}{4}))$ donc $u \in W^{2,q}(B(0,\frac{1}{4}))$,... L'argument de boostrap donne $u \in C^\infty(B(0,\frac{1}{4}))$.

Chapitre 6

Applications harmoniques sans symétries

6.1 Retrouver des symétries : le tore

Cette section vient de [1], chapitre 4.
On se place maintenant dans le cas général où la variété d'arrivée $\mathcal{N}$ ne possède pas de symétrie, i.e. on ne peut pas appliquer le théorème de Noether. Le problème est qu'a priori, on ne peut plus récrire l'équation des applications harmoniques comme une loi de conservation (la divergence d'une quantité est nulle).
En fait, cela vient du choix de coordonnées. Exprimée dans des coordonnées arbitraires, on ne peut pas faire grand chose de l'équation des applications harmoniques. Mais si l'on choisit de bonnes coordonnées, on peut exprimer le système de manière plus agréable.
Pour cela, on utilise le fait que l'on possède un repère orthonormé global de $\mathcal{N}$, ce qui est faux de manière générale (ex : la sphère). L'idée est de plonger $\mathcal{N}$ dans une variété $\hat{\mathcal{N}}$ plus grosse qui possède une telle base. L'exemple facile de variété possédant un repère global est le tore. On va donc plonger $\mathcal{N}$ de manière isométrique dans un tore de grande dimension, par le biais du théorème de plongement de Nash.

Lemme 6.1.1 :

> Soit $\mathcal{N}$ une sous-variété compacte C^k $(k \geq 4)$ de dimension n sans bords plongée dans $\mathbb{R}^N$.
> Il existe $\hat{\mathcal{N}}$ une sous-variété de dimension N plongée de manère C^{k-1} dans $\mathbb{R}^{\hat{N}}$ par une application $J : \mathcal{N} \to \hat{\mathcal{N}}$ telle que
>
> - $J : (\mathcal{N}, \langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^n}) \to (\hat{\mathcal{N}}, \langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^{\hat{N}}})$ est un plongement isométrique
> - $\hat{\mathcal{N}}$ est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^N$
> - Pour toute variété $(\mathcal{M}, g)$ de dimension $m \geq 1$, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathcal{M}$ et toute application $u \in H^1(\Omega; \mathcal{N})$, si u est faiblement harmonique, alors $J \circ u : \Omega \to \hat{\mathcal{N}}$ également.

Démonstration. Comme $\mathcal{N}$ est compact, il existe un cube $C^N \subset \mathbb{R}^N$ contenant $\mathcal{N}$. En identifiant les faces opposées de C^N, on obtient un tore de dimension N : $\mathbb{T}^N$. Considérons la métrique euclidienne sur $\mathbb{T}^N$. Nous considérerons indifféremment $\mathcal{N}$ comme une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, C^N ou $\mathbb{T}^N$. Pour $\delta > 0$, on pose

$$V_{2\delta}\mathcal{N} := \{z \in C^N \mid d(z, \mathcal{N}) < 2\delta\}$$

Pour δ assez petit, il existe une projection $P : V_{2\delta}\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ de classe C^k. Pour $y \in \mathcal{N}$, on pose

$$D_y := \{z \in V_{2\delta}\mathcal{N} \mid P(z) = y\}$$

D_y est homéomorphe à un disque de dimension $N-n$ et coup $\mathcal{N}$ de manière transverse. On définit alors la projection

$$\forall z \in V_{2\delta}\mathcal{N}, \quad V_z : \left| \begin{array}{ccc} T_z(C^N) \simeq \mathbb{R}^N & \to & T_z(D_{P(z)}) \\ \xi & \mapsto & \text{partie verticale de } \xi \text{ dans la fibration } P \end{array} \right.$$

On note alors que V dépend de z de manière C^{k-1}. Définissons maintenant une métrique h_0 sur $V_{2\delta}\mathcal{N}$ de classe C^{k-1} par

$$\forall z \in V_{2\delta}\mathcal{N},\ \forall \xi, \eta \in T_z(C^N), \quad h_0(z)(\xi,\eta) := \langle V_z(\xi), V_z(\eta)\rangle_{\mathbb{R}^N} + \langle dP_z(\xi), dP_z(\eta)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Prenons $\chi \in C_c^\infty(V_{2\delta}\mathcal{N};[0,1])$ égale à 1 sur $V_\delta\mathcal{N}$, on pose alors $h := \chi h_0 + (1-\chi)\langle .,.\rangle_{\mathbb{R}^N}$ et h définit une métrique de classe C^{k-1} qui coïncide avec h_0 sur $V_\delta\mathcal{N}$ et avec la métrique euclidienne en dehors de $V_{2\delta}\mathcal{N}$.
Comme $k \geq 4$ et h est C^{k-1}, le théorème de Nash-Moser permet de plonger isométriquement $(\mathbb{T}^N, h)$ dans un certain $(\mathbb{R}^{\hat{N}}, \langle .,.\rangle_{\mathbb{R}^{\hat{N}}})$ par un plongement J de classe C^{k-1}.
Posons $\hat{\mathcal{N}} := J(\mathbb{T}^N)$ et notons

$$\hat{V}_{\hat{\delta}}\hat{\mathcal{N}} := \{z \in \mathbb{R}^{\hat{N}} \mid d(z,\hat{\mathcal{N}}) < \hat{\delta}\}$$

le voisinage tubulaire de $\hat{\mathcal{N}}$. On suppose $\hat{\delta} > 0$ suffisamment petit pour pouvoir définir une projection $\hat{P} : \hat{V}_{\hat{\delta}}\hat{\mathcal{N}} \to \hat{\mathcal{N}}$.
On pose

$$\hat{V}_{\hat{\delta}}\mathcal{N} := \{z \in \mathbb{R}^{\hat{N}} \mid d(z, J(\mathcal{N})) < \hat{\delta}\}$$

et on suppose $\hat{\delta} > 0$ assez petit pour que $\hat{V}_{\hat{\delta}}\mathcal{N} \cap \hat{\mathcal{N}} \subset J(V_\delta\mathcal{N})$. Comme J est un plongement, on peut définir son inverse $K : \hat{V}_{\hat{\delta}}\mathcal{N} \cap \hat{\mathcal{N}} \to V_\delta\mathcal{N}$ (de classe C^{k-1}).
Considérons $u \in H^1(\Omega;\mathcal{N})$ faiblement harmonique et posons $v = J \circ u \in H^1(\Omega;\hat{\mathcal{N}})$.
Soit $\phi \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^{\hat{N}}) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{\hat{N}})$. Pour t assez petit, on note $w_t := K \circ \hat{P}(v+t\phi)$. Le fait que K soit une isométrie donne

$$\frac{1}{2}\int_\Omega g^{\alpha\beta}\left\langle \partial_\alpha(\hat{P}(v+t\phi)), \partial_\beta(\hat{P}(v+t\phi))\right\rangle_{\mathbb{R}^{\hat{N}}} d\mathrm{vol}_g = \frac{1}{2}\int_\Omega g^{\alpha\beta} h_{w_t}(\partial_\alpha w_t, \partial_\beta w_t) d\mathrm{vol}_g$$

On pose $\psi_t := \int_0^1 \frac{\partial K\circ\hat{P}}{\partial y^j}(v+st\phi)\phi^j\ ds$ de sorte que $w_t = u + t\psi_t$. Comme $K \circ \hat{P}$ est de classe C^{k-1} et $k \geq 4$, ψ_t est bornée dans H^1. Notons $V_{w_t} = V_u + t\delta V_t$ où $\delta V_t := \int_0^1 \frac{\partial V_{u+st\psi_t}}{\partial z^i}\psi_t^i\ ds$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Comme $V_u(\partial_\alpha u) = 0$, on a

$$\begin{aligned} V_{w_t}(\partial_\alpha w_t) &= (V_u + t\delta V_t)(\partial_\alpha u + t\partial_\alpha\psi_t) \\ &= t\left[\delta V_t(\partial_\alpha u) + V_u(\partial_\alpha\psi_t) + t\delta V_t(\partial_\alpha\psi_t)\right] \end{aligned}$$

Donc

$$\int_\Omega g^{\alpha\beta}\langle V_{w_t}(\partial_\alpha u), V_{w_t}(\partial_\beta u)\rangle_{\mathbb{R}^N} d\mathrm{vol}_g = O(t^2)$$

Donc

$$\frac{1}{2}\int_\Omega g^{\alpha\beta}\left\langle \partial_\alpha(\hat{P}(v+t\phi)), \partial_\beta(\hat{P}(v+t\phi))\right\rangle_{\mathbb{R}^{\hat{N}}} d\mathrm{vol}_g = \frac{1}{2}\int_\Omega g^{\alpha\beta}\langle \partial_\alpha(P(u+t\psi_t)), \partial_\beta(P(u+t\psi_t))\rangle_{\mathbb{R}^N} d\mathrm{vol}_g + O(t^2)$$

Comme u est faiblement harmonique, la dérivée en $t=0$ du membre de droite vaut 0 et v est harmonique. □

Par conséquent, on peut supposer que la variété d'arrivée est un tore $\mathbb{T}^n$ munit d'une métrique h, a priori non euclidienne, que l'on plonge de manière isométrique dans $\mathbb{R}^N$. En particulier, $T\mathbb{T}^n$ possède un repère orthonormé lisse global $\epsilon = (\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. Si $u \in H^1(D^2;\mathbb{T}^n)$ est faiblement harmonique, on considère l'application $\tilde{e} := \epsilon \circ u \in H^1(D^2;(\mathbb{R}^N)^n)$. On définit pour $R \in H^1(D^2;SO_n(\mathbb{R}))$ l'application

$$\forall z \in D^2, \quad e(z) := \tilde{e}(z)R(z) = (\tilde{e}_j(z)R_i^j(z))_{1\leq i\leq n}$$

et on associe l'énergie

$$F(R) := \int_{D^2}\sum_{1\leq a,b\leq n}\left(\langle\partial_x e_a, e_b\rangle^2 + \langle\partial_y e_a, e_b\rangle^2\right)\ dx = \int_{D^2}|e^T de|^2\ dx$$

On note $\mathcal{F}$ le fibré des repères orthonormées sur $\mathbb{T}^n$. On note $u^*\mathcal{F}$ sont pull-back par u : le fibré sur Ω dont la fibre au-dessus d'un point $x \in \Omega$ est l'ensemble des bases orthonormées de $T_{u(x)}\mathbb{T}^n$.

Lemme 6.1.2 :

On suppose que $\mathcal{N}^n$ est plongé de manière C^2 dans $\mathbb{R}^N$ et possède un repère orthonormé global lisse de son espace tangent. Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne et $\Omega \subset \mathcal{M}$ un ouvert. Soit $u \in H^1(\Omega; \mathcal{N}^n)$ et $\bar{e}$ une section de $u^*\mathcal{F}$ d'énergie finie. Alors il existe un repère e minimisant F, appelée repère de Coulomb, sur Ω telle que, si l'on note n la normal à $\partial\Omega$,

$$\forall a, b \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} \partial_\alpha \left(g^{\alpha\beta} \sqrt{\det\ g} \left\langle \partial_\beta e_a, e_b \right\rangle \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ n^\alpha \left\langle \partial_\alpha e_a, e_b \right\rangle = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, il existe $C > 0$ qui dépend uniquement de $\mathcal{N}$ telle que

$$\|e^T de\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\bar{e}^T d\bar{e}\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad \|de\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|e^T de\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|du\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Dans le cas où $\bar{e}$ est de la forme $\tilde{e} \circ u$ où $\tilde{e}$ est une section C^1 de $\mathcal{F}$, ceci se réécrit $\|de\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\mathcal{N})\|du\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Démonstration. Soit $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $H^1(\Omega; SO_n(\mathbb{R}))$ minimisant F et on pose $e_k := eR_k$. Alors

$$|e_k^T de_k|^2 = |\bar{e} d\bar{e}|^2 + 2\left\langle \bar{e}^T d\bar{e}, dR_k R_k^T \right\rangle + |dR_k R_k^T|^2 \geq (|\bar{e}^T d\bar{e}| - |dR_k R_k^T|)^2$$

Donc $(dR_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ ($(R_k)_k$ minimise F donc $(e_k^T de_k)_k$ est bornée dans $L^2(\Omega)$). Par conséquent, quitte à extraire, $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans L^2, faiblement dans H^1 et presque partout vers un certain $R \in H^1(\Omega; SO_n(\mathbb{R}))$.
Par convergence dominée, $(\bar{e}^T d\bar{e} R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{e}^T d\bar{e} R$ dans L^2 et donc

$$\int_\Omega \left\langle \bar{e}^T d\bar{e}, dR_k R_k^T \right\rangle \mathrm{dvol}_g \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_\Omega \left\langle \bar{e}^T d\bar{e}, dRR^T \right\rangle \mathrm{dvol}_g$$

De plus,

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |dR_k R_k^T|^2 \mathrm{dvol}_g \geq \int_\Omega |dRR^T|^2 \mathrm{dvol}_g$$

Donc $\lim_{k\to\infty} F(R_k) \geq F(R)$ et R est un minimiseur de F.
Regardons l'équation d'Euler-Lagrange associée : soit $\phi \in C^\infty(\Omega; so_n)$ une fonction test et $\epsilon > 0$ proche de 0. Notons

$$R_\epsilon(x) := \exp_{R(x)}(\epsilon\phi(x)) = R(x)(I_n + \epsilon\phi(x) + o(\epsilon)) \quad \text{et} \quad e_\epsilon(x) := \bar{e}(x)R_\epsilon(x) = e(x)(I_n + \epsilon\phi(x) + o(\epsilon))$$

Alors

$$e_\epsilon^T de_\epsilon = e^T de + \epsilon(d\phi - \phi e^T de) + o(\epsilon)$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega \left\langle e^T de, d\phi - \phi e^T de \right\rangle \mathrm{dvol}_g = 0$$

Comme ϕ est anti-symétrique, $\left\langle e^T de, \phi e^T de \right\rangle = 0$ et en intégrant par parties :

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left\langle \phi, e^T \frac{\partial e}{\partial n} \right\rangle d\sigma - \int_\Omega \left\langle \phi, \mathrm{div}_g(e^T de) \right\rangle \mathrm{dvol}_g$$

En prenant ϕ à support compact, on trouve la première équation. En prenant ϕ à support de plus en plus proche de $\partial\Omega$, on trouve la seconde équation.
Passons aux estimations. La première est une conséquence directe de la minimisation de F. On en déduit la seconde : On note P la projection orthogonale sur $T\mathcal{N}$ et $P^\perp = id_{\mathbb{R}^N} - P$. Par hypothèse, P et $P^\perp$ sont de classe C^1 et

$$\|de\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{a=1}^n \left(\|P(u)(de_a)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|P^\perp(u)(de_a)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) = \|e^T de\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{a=1}^n \|P^\perp(u)(de_a)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Or $d(P^\perp(u)(e_a)) = 0$ donc

$$\|de\|_{L^2(\Omega)} = \|e^T de\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{a=1}^{n} \|d(P^\perp(u))(e_a)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|e^T de\|^2_{L^2(\Omega)} + \|P^\perp\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|du\|_{L^2(\Omega)}$$

□

Dans la suite de la section, pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert d'une variété $\mathcal{M}^m$ on considérera momentanément la norme (à ne pas confondre avec celle de la norme de Lorentz $L^{(2,m-2)}$) :

$$\|f\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)} = \sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |f|^2 \right)$$

Si une certaine énergie est petite, on peut contrôler un peu plus précisément l'énergie de la jauge de Coulomb :

Lemme 6.1.3 :

Soit $\mathcal{N}^n$ une variété compacte plongée de manière C^2 dans $\mathbb{R}^N$ et possède un repère orthonormé global ϵ. Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne et $\Omega \subset \mathcal{M}$ un ouvert. Soit $u \in H^1(\Omega; \mathcal{N})$. Il existe $\gamma_0 = \gamma_0(m, \mathcal{N}) > 0$ telle que si

$$\sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |du|^2 \right) \leq \gamma_0$$

alors on peut construire une section harmonique de $u^*\mathcal{F}$ d'énergie finie.

Démonstration. Dans le cas où $u \in C^2(\Omega; \mathcal{N}) \cap H^1(\Omega; \mathcal{N})$ on pose $\bar{e} := \epsilon \circ u$ et on peut appliquer le lemme précédent : il existe $R \in H^1(\Omega; SO_n(\mathbb{R}))$ minimisant F. Alors $e := \bar{e}R$ est une base de Coulomb vérifiant la loi de conservation du lemme précédent. En particulier, on peut appliquer le lemme de Poincaré et pour tout $a, b \in [\![1, n]\!]$, il existe $A^b_a \in H^1(\Omega; \Lambda^2\mathbb{R})$ tel que

$$\delta A^b_a = \langle de_a, e_b \rangle$$

Par suite,

$$-\Delta A^b_a = d\left(\langle de_a, e_b \rangle\right) = \sum_{k=1}^{N} de^k_a \wedge de^k_b$$

Ecrivons $A^b_a = \sum_{\alpha<\beta} (A^b_a)_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$. Soit $B(x,r) \subset \Omega$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} |dA^b_a|^2 &= \sum_{k=1}^{N} \int_{B(x,r)} \left\langle de^k_a \wedge de^k_b, A^b_a \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha<\beta} \sum_{k=1}^{N} \int_{B(x,r)} \{e^k_a, e^k_b\}_{\alpha\beta} (A^b_a)_{\alpha\beta} \\
&\leq C_1(m,N) \|de_a\|_{L^2(B(x,r))} \|de_b\|_{L^2(B(x,r))} \|A^b_a\|_{BMO(B(x,r))} \\
&\leq C_1 \|de\|^2_{L^2(B(x,r))} \|dA\|_{L^{2,m-2}(B(x,r))}
\end{aligned}$$

En multipliant par r^{2-m} puis en prenant le supremum sur les $B(x,r) \subset \Omega$, on obtient $\|dA\|_{L^{2,m-2}(\Omega)} \leq C_1 \|de\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)}$.

Comme $|de|^2 \leq |e^T de|^2 + C|du|^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |de|^2 &\leq \frac{1}{r^{m-2}} \left(\int_{B(x,r)} |dA|^2 + C_2 \int_{B(x,r)} |du|^2 \right) \\
&\leq \frac{C_1}{r^{m-2}} \|de\|^2_{L^2(B(x,r))} \|A\|_{BMO(B(x,r))} + \frac{C_2}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |du|^2 \\
&\leq \frac{C_1}{r^{m-2}} \|de\|^2_{L^2(B(x,r))} \|dA\|_{L^{2,m-2}(B(x,r))} + \frac{C_2}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |du|^2 \\
&\leq \frac{C^1}{r^{m-2}} \|de\|^2_{L^2(B(x,r))} \|de\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)} + C_2 \|du\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

En supposant que, pour un certain $\gamma > 0$,

$$\sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |du|^2 \right) \leq \gamma$$

Puis en posant $t = \|de\|^2_{L^{2,m-2}}$, on obtient l'inégalité

$$P(t) := C_1 t^2 - t + C_2 \gamma \geq 0$$

Le discriminant de P est $1 - 4C_1C_2\gamma$. Dans le cas où $\gamma < (4C_1C_2)^{-1}$, P prend des valeurs négatives entre deux racines $\alpha < \beta$ et $t \in [0, \alpha] \cup [\beta, \infty)$. De plus $P(1/(2C_1)) < 0$ donc $(2C_1)^{-1} \in (\alpha, \beta)$ et est indépendant de u. Montrons que $t \leq (2C_1)^{-1}$.

Pour cela, pour tout $r \in (0, 1]$, on considère e_r associé à la matrice $R_r \in H^1(B(0, r); SO_n(\mathbb{R}))$ minimisant la fonctionnelle $F_r(R) = r^{2-m} \int_{B(0,r)} |e^T de|^2 d\mathrm{vol}_g$ et on va montrer que $g : \left(r \mapsto r^{2-m} \|e_r^T de_r\|^2_{L^2(B(0,r))} = \inf F_r \right)$ est continue, valant 0 en 0.

Montrons que g est l'infimum de fonctions lipschitziennes. Pour $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
g(r) &= \inf_{R\in H^1(B_r;SO_N)} \frac{1}{r^{m-2}} \int_{B_r} |(\bar{e}R)^T d(\bar{e}R)|^2 \\
&= \inf_{R\in H^1(B_r;SO_N)} \frac{1}{r^{m-2}} \int_{B_1} |(\bar{e}R)^T d(\bar{e}R)|^2 (rz) r^m dz \\
&= \inf_{R\in H^1(B_r;SO_N)} \int_{B_1} \left| R(rz)^T \bar{e}(rz)^T \left[r d\bar{e}(rz) R(rz) + \bar{e}(rz) d(R(r\cdot))(z) \right] \right|^2 dz \\
&= \inf_{\tilde{R}\in H^1(B_1;SO_N)} \int_{B_1} \left| \tilde{R}(z)^T \bar{e}(rz)^T \left[r d\bar{e}(rz) \tilde{R}(z) + \bar{e}(rz) d\tilde{R}(z) \right] \right|^2 dz \\
&\quad \text{car l'application } R \mapsto R(r\cdot) \text{ est une bijection de } H^1(B_r) \to H^1(B_1)
\end{aligned}$$

Or comme u est C^2, $\bar{e}$ est C^2 donc pour tout $\bar{R} \in H^1(B_1; SO_N)$, l'application

$$r \mapsto \int_{B_1} \left| \tilde{R}(z)^T \bar{e}(rz)^T \left[r d\bar{e}(rz) \tilde{R}(z) + \bar{e}(rz) d\tilde{R}(z) \right] \right|^2 dz$$

est lipschitzienne. Donc g est continue et

$$0 \leq g(r) \leq F_r(I_N) = \frac{1}{r^{m-2}} \int_{B_r} |\bar{e}^T d\bar{e}|^2 \leq |B_1| r^2 \|de\|^2_{L^\infty} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Donc $g(0) = 0$ et par conséquent $g(1) \leq \alpha$. et

$$\sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |de|^2 \right) \leq \frac{1}{2C_1}$$

Maintenant, dans le cas où $u \in H^1(D^2;\mathcal{N})$, on approche u par une suite $(u_k)_k$ de fonctions régulières et la borne précédemment trouvée permet de montrer que la suite de repères de Coulomb donnée par les u_k est bornée dans H^1 et donc on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans H^1 et fortement convergente dans L^2 vers une section de $u^*\mathcal{F}$ qui est harmonique et d'énergie finie.

□

On obtient de meilleurs estimations :

Lemme 6.1.4 :

Soit $\mathcal{N}$ une variété riemannienne compacte sans bord plongée de manière C^2 dans $\mathbb{R}^N$. Soit Ω un ouvert d'une variété riemannienne $\mathcal{M}$, $u \in H^1(\Omega;\mathcal{N})$ et e un repère de Coulomb, i.e. une section de $u^*\mathcal{F}$ satisfaisant la loi de conservation du lemme 6.1.3. Alors

- Dans le cas $m = 2$ et $\Omega = D^2$: $e^T de \in L^{(2,1)}(D^2)$ et il existe $C > 0$ telle que

  $$\|e^T de\|_{L^{(2,1)}(D^2)} \leq C\|de\|^2_{L^2(D^2)}$$

  Dans le cas où e est obtenue par minimisation dans l'orbite de jauge d'une base $\bar{e} = \epsilon\circ u$, on a l'estimation

  $$\|e^T de\|_{L^{(2,1)}(D^2)} \leq C\|du\|^2_{L^2(D^2)}$$

- Dans le cas quelconque :

  $$\sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |e^T de|^2 \right) \leq C \sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |de|^2 \right)$$

  Dans le cas où e est obtenue par minimisation dans l'orbite de jauge d'une base $\bar{e} = \epsilon\circ u$, on a l'estimation

  $$\sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |e^T de|^2 \right) \leq C \sup_{B(x,r)\subset\Omega} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |du|^2 \right)$$

Démonstration. Premier cas : Inégalité de Wente appliqué à l'équation de A donnée dans la preuve précédente.
Deuxième cas : On reprend l'estimation de A dans le lemme précédent :

$$\|e^T de\|_{L^{2,m-2}(\Omega)} \leq \|dA\|_{L^{2,m-2}(\Omega)} \leq C_1\|de\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)}$$

Si e est obtenue par minimisation dans l'orbite de jauge d'une base $\bar{e} = \epsilon \circ u$:
Soit $B(x,r) \subset \Omega$. On note P la projection orthogonale sur $T\mathcal{N}$. Comme $|de|^2 \leq |e^T de|^2 + C|du|^2$:

$$\begin{aligned}
\|de\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)} &\leq \|e^T de\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)} + C\|du\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)} \\
&\leq \|\bar{e}^T d\bar{e}\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)} + C\|du\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)} \\
&\leq (\|\epsilon\|^2_{W^{1,\infty}} + C)\|du\|^2_{L^{2,m-2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

□

6.2 Preuve de Hélein

Cette section vient de [1], chapitre 4.

6.2.1 Cas où $\mathcal{M}$ est une surface

Théorème 6.2.1 :

> Soit $\mathcal{N}$ une variété riemannienne C^2 sans bord, $(\mathcal{M}, g)$ une surface riemannienne et $u \in H^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$.
> Si u est faiblement harmonique alors u est de classe $C^{1,\alpha}$.
> De plus, si $\mathcal{N}$ est plongé dans $\mathbb{R}^N$ de manière $C^{l,\alpha}$ pour un certain $l \geq 2$, alors u est aussi $C^{l,\alpha}$.

On applique le lemme 6.1.3 : on choisit une boule B^2 de sorte que $\|du\|^2_{L^2(B^2)} < \gamma_0$ et on obtient une base de Coulomb e pour u. Pour $a, b \in [\![1, n]\!]$, posons

$$\alpha^a = \langle \partial_x u, e_a \rangle - i \langle \partial_y u, e_b \rangle, \qquad \omega^a_b := \left\langle \frac{\partial e_b}{\partial \bar{z}}, e_a \right\rangle$$

En écrivant $du = \sum_{a=1}^n \langle du, e_a \rangle e_a$, les relations

$$\begin{cases} d^2 u = 0 \\ d(\star du) = d((\partial_x u)dy - (\partial_x u)dx) = (\Delta u) dx \wedge dy \perp T_u \mathcal{N} \end{cases}$$

se réécrivent $\bar{\partial} \alpha^a = \omega^a_b \alpha^b$. On remarque que $\alpha \in L^2(B^2; \mathbb{C}^n)$ et que $\omega \in L^{(2,1)}(B^2; so_n \otimes \mathbb{C})$ (lemme 6.1.4).
Pour tout $z_0 \in B^2$ on choisit une boule $B^2_{z_0}$ centrée en z_0 telle que $\|\omega_{|B^2_{z_0}}\|_{L^{(2,1)}} \leq \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$.
On pose $\eta := \omega \mathbf{1}_{B^2_{z_0}}$ (définit sur $\mathbb{C}$) et on définit l'opérateur

$$\forall \beta \in L^\infty(\mathbb{C}; \mathcal{M}_n(\mathbb{C})), \ \forall z \in \mathbb{C}, \quad T(\beta)(z) := \int_{\mathbb{C}} \frac{\eta(v)\beta(v)}{\pi(z-v)} dv = \int_{B^2_{z_0}} \frac{\omega(v)\beta(v)}{\pi(z-v)} dv$$

Alors T est la composition de la convolution avec $\frac{1}{\pi z}$ (noyau de $\bar{\partial}$) et de la multiplication par η. Donc

$$\|T\|_{L^\infty \to L^\infty} \leq \|\frac{1}{\pi z}\|_{L^{(2,\infty)}} \|\omega\|_{L^{(2,1)}} < \frac{1}{3}$$

En particulier, l'équation $\beta - T(\beta) = I_n$ possède une unique solution $\beta \in L^\infty(\mathbb{C}; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ et vérifie

$$\|\beta - I_n\|_{L^\infty(B^2_{z_0})} \leq \frac{2}{3}$$

Donc β est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ et vérifie $\bar{\partial}\beta = \omega\beta$ dans $B^2_{z_0}$. On obtient dans

$$\bar{\partial}(\beta^{-1}\alpha) = \beta^{-1}(\omega - \omega)\alpha = 0$$

Donc $\beta^{-1}\alpha$ est holomorphe sur $B^2_{z_0}$ et en particulier $\alpha \in L^\infty_{loc}$, i.e. u localement lipschitz.
L'équation

$$-\Delta u = A(u)(\nabla u, \nabla u)$$

donne alors que $\Delta u \in L^\infty_{loc}$ et donc $u \in C^{1,\alpha}$.

6.2.2 Cas quelconque

Théorème 6.2.2 :

> Soit Ω un ouvert d'une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ de dimension m et $\mathcal{N}$ une sous-variété riemannienne compacte plongée isométriquement de manière C^5 dans $(\mathbb{R}^N, \langle ., . \rangle_{\mathbb{R}^N})$. On suppose g de classe $C^{0,\alpha}$. Soit $u \in H^1(\Omega; \mathcal{N})$ faiblement stationnaire.
> Il existe $S \subset \Omega$ un fermé dont la $(m-2)^{eme}$ dimension de Hausdorff est nulle et tel que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega \setminus S; \mathcal{N})$.

Remarque : Dans le cas où il est possible de construire une base orthonormée lisse globale sur $\mathcal{N}$, on peut supposer $\mathcal{N}$ seulement de classe C^2 pour que le résultat soit valide.

On peut supposer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et on note

$$\forall B(x,r) \subset \Omega, \quad E_{x,r}(du) := \frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(x,r)} |du|^2 dx, \quad M_{x,r}(u) := \sup_{B(y,\rho) \subset B(x,r)} \frac{1}{\rho^{m-1}} \int_{B(y,\rho)} |du|$$

L'inégalité de Poincaré donne que $M_{x_0,r}(u)$ contrôle $\|u\|_{BMO(B(x_0,r))}$ et Cauchy-Schwarz donne que $M_{x_0,r}(u)$ et contrôlé par $E_{x_0,2r}(u)$:

$$M_{x_0,r}(u) \leq \sup_{0<\rho<r} C\sqrt{E_{x_0,\rho}(du)} \leq C\sqrt{E_{x,2r}(du)} < +\infty$$

Théorème 6.2.3 :

> Sous les hypothèses précédentes, il existe $\epsilon > 0$, $\theta \in (0,1)$ et $\tau < \frac{1}{2}$ tels que si $B(y,2r) \subset \Omega$ avec $r < 1$ et $E_{y,2r}(u) \leq 2^{2-m}\epsilon^2$ alors $M_{y,\tau r}(u) \leq \theta M_{y,r}(u)$.

Démonstration. Prenons $y \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(y,2r) \subset \Omega$ et $E_{y,2r}(u) \leq 2^{2-m}\epsilon^2$. La formule de monotonicité dit que

$$\forall B(z,\rho) \subset B(y,r), \quad E_{z,\rho}(u) \leq E_{y,r}(u) \leq 2^{m-2} E_{y,2r}(u) \leq \epsilon^2$$

Le but est d'estimer $M_{y,\tau r}(u)$ par $M_{y,r}(u)$ (pour τ bien choisi). En particulier, il suffit de le faire pour tout (z,ρ) tel que $B(z,\tau\rho) \subset B(y,\tau r)$ (car alors $B(z,\rho) \subset B(y,r)$ et $M_{z,\rho}(u) \leq M_{y,r}(u)$).

La partie sur le tore (lemme 6.1.4), on peut construire un repère de Coulomb e qui soit une section de $u^*\mathcal{F}$ sur $B(z,\rho)$ telle que $(\rho < r < 1)$

$$\int_{B(z,\rho)} |de|^2 \leq \sup_{B(x,r) \subset B(z,\rho)} E_{x,r}(de) \leq C \sup_{B(x,r) \subset B(z,\rho)} E_{x,r}(du)$$

On utilise la décomposition de Hodge de la 1-forme

$$\phi^a := \langle d[\zeta(u - u_{z,\rho})], e_a \rangle$$

où $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ dont le support est inclus dans $B(z, \frac{3\rho}{4})$, vaut 1 sur $B(z, \frac{5\rho}{8})$ et dont le gradient est contrôlé par ρ^{-1}. On obtient

$$\langle d[\zeta(u - u_{z,\rho})], e_a \rangle = dw^a + \delta v^a$$

et donc $-\Delta w^a = -\sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha \phi_\alpha^a$ sur $\mathbb{R}^m$ et en particulier, dans $B(z, \frac{\rho}{2})$,

$$-\Delta w^a = -\sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha \langle \partial_\alpha u, e_a \rangle = -\sum_{\alpha=1}^m \langle \partial_\alpha u, \partial_\alpha e_a \rangle = -\sum_{(\alpha,b) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]} \langle \partial_\alpha u, e_b \rangle \langle \partial_\alpha e_a, e_b \rangle$$

En particulier, le fait que e soit une base de Coulomb s'écrit $\delta \langle de_a, e_b\rangle = 0$ pour tout $a, b \in [\![1, n]\!]$. Donc il existe une 2-forme $A_a^b \in W^{1,2}(B(z,\rho); \Lambda^2\mathbb{R}^m)$ telle que $\langle de_a, e_b\rangle = -\delta A_a^b$ et de même que dans le lemme 6.1.4, il existe $C > 0$ dépendant uniquement de $\mathcal{N}$ telle que

$$\int_{B(z,\rho)} |dA|^2 \leq \sup_{B(x,r)\subset B(z,\rho)} E_{x,r}(dA) \quad \leq \quad C \sup_{B(y,s)\subset B(z,\rho)} E_{y,s}(du)$$

Notons $A_a^b = (A_a^b)_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$. Alors

$$\langle de_a, e_b\rangle = \frac{\partial (A_a^b)_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} dx^\beta$$

Et par suite, en notant $\{f, g\}^{\alpha\beta} = \{f, g\}_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha f)(\partial_\beta g) - (\partial_\alpha g)(\partial_\beta f)$,

$$-\Delta w^a = -\left\langle \frac{\partial (A_a^b)_{\beta\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, e_b \right\rangle = \left\langle \{u, (A_a^b)_{\alpha\beta}\}^{\alpha\beta}, e_b \right\rangle$$

De même, on obtient une équation elliptique pour v^a : on applique l'opérateur d à la décomposition de Hodge pour obtenir

$$-\Delta v_{\alpha\beta}^a dx^\alpha \wedge dx^\beta = -\Delta_2 v^a = d\langle e_a, d[\zeta(u - u_{z,\rho})]\rangle = \{e_a, \zeta(u - u_{z,\rho})\}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

On décompose w^a sur $B(z, \frac{\rho}{2})$ en $w^a = w_0^a + w_1^a$ où $\Delta w_0^a = 0$ sur $B(z, \frac{\rho}{2})$ et $w_1^a = 0$ sur $\partial B(z, \frac{\rho}{2})$. Il suit que

$$|du| \leq C \sum_{a=1}^n \left(|dw_0^a| + |dw_1^a| + \sum_{\alpha,\beta} |dv_{\alpha\beta}^a| \right) \qquad \text{sur } B(z, \frac{\rho}{2})$$

L'équation suivie par $v_{\alpha\beta}^a$ ci-dessus ainsi que le lemme 4.3.4 donnent

$$\int_{B(z,\rho)} |dv_{\alpha\beta}^a|^2 = \int_{B(z,\rho)} \{e_a, \zeta(u - u_{z,\rho})\}_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^a \leq C \|dv_{\alpha\beta}^a\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \|de_a\|_{L^2(B(z,\rho))} \|\zeta(u - u_{z,\rho})\|_{BMO(\mathbb{R}^m)}$$

Mais l'estimation de la décomposition de Hodge sur les 1-formes donne

$$\int_{\mathbb{R}^m} |dv_{\alpha\beta}^a|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^m} |d[\zeta(u - u_{z,\rho})]|^2 \leq C \|du\|_{L^2(B(z,\rho))}^2$$

Par le lemme 6.1.4, on contrôle également $\|de_a\|_{L^2(B(z,\rho))}$. Pour estimer $\|\zeta(u - u_{z,\rho})\|_{BMO(\mathbb{R}^m)}$, on utilise la même méthode que dans la proposition 5.1.4 pour obtenir

$$\|\zeta(u - u_{z,\rho})\|_{BMO(\mathbb{R}^m)} \leq C M_{z,\rho}(u)$$

Ainsi, comme $\|du\|_{L^2(B(z,\rho))}^2 = \rho^{m-2} E_{z,\rho}(u) \leq \rho^{m-2}\epsilon^2$ par choix de (z, ρ),

$$\int_{\mathbb{R}^m} |dv_{\alpha\beta}^a|^2 \leq C \rho^{m-2} \epsilon^2 M_{z,\rho}(u)$$

Et donc Cauchy-Schwarz donne

$$\frac{1}{\rho^{m-1}} \int_{B(z,\rho)} |dv_{\alpha\beta}^a| \leq C\epsilon M_{z,\rho}(u)$$

Passons à w_1^a. On sait que

$$\begin{cases} -\Delta w_1^a = \left\langle \{u, (A_a^b)_{\alpha\beta}\}^{\alpha\beta}, e_b \right\rangle & \text{dans } B(z, \frac{\rho}{2}) \\ w_1^a = 0 & \text{sur } \partial B(z, \frac{\rho}{2}) \end{cases}$$

En particulier, pour tout $\psi \in C_c^\infty(B(z, \frac{\rho}{2}))$,

$$\int_{B(z,\frac{\rho}{2})} \langle dw_1^a, d\psi\rangle = \int_{B(z,\frac{\rho}{2})} \left\langle \{u, (A_a^b)_{\alpha\beta}\}^{\alpha\beta}, \psi e_b \right\rangle$$

Problème : a priori $w_1^a e_b$ n'est pas dans H^1 (w_1^a n'est pas forcément L^∞). On considère donc ψ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w_1^a}{|\nabla w_1^a|}\right) & \text{dans } B(z,\frac{\rho}{2}) \\ \psi = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^m \setminus B(z,\frac{\rho}{2}) \end{cases}$$

Comme $\frac{\nabla w_1^a}{|\nabla w_1^a|}$ est uniformément borné dans L^∞, on trouve que $\psi \in \bigcap_{1<q<\infty} W^{1,q}(\mathbb{R}^m)$ et en particulier, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^m) \cap H^1(\mathbb{R}^m)$ avec les estimations

$$\|\psi\|_{L^\infty} \leq C\rho, \quad \|d\psi\|_{L^2} \leq C\rho^{\frac{m}{2}}$$

Par suite, ψe_b est dans $H^1(\mathbb{R}^m)$ (en étendant par 0 en dehors de $B(r,\frac{\rho}{2})$) et

$$\|d(\psi e_b)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \|\psi\|_{L^\infty}\|de_b\|_{L^2(B(z,\rho))} + \|d\psi\|_{L^2} \leq C\rho\epsilon\rho^{\frac{m-2}{2}} + C\rho^{\frac{m}{2}} \leq C\rho^{\frac{m}{2}}$$

Ainsi,

$$\int_{B(z,\frac{\rho}{2})} \langle dw_1^a, d\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \left\langle \{\zeta(u-u_{z,\rho}), \zeta(A_a^b)_{\alpha\beta}\}^{\alpha\beta}, \psi e_b \right\rangle \leq C\|\zeta(u-u_{z,\rho})\|_{BMO(\mathbb{R}^m)}\|d[\zeta(A_a^b)_{\alpha\beta}]\|_{L^2}\|d(\psi e_b)\|_{L^2}$$

Les estimations précédentes donnent

$$\int_{B(z,\frac{\rho}{2})} |\nabla w_1^a| = \int_{B(z,\frac{\rho}{2})} w_1^a \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w_1^a}{|\nabla w_1^a|}\right) = \int_{B(z,\frac{\rho}{2})} \langle dw_1^a, d\psi\rangle \leq C\epsilon\rho^{m-1}M_{z,\rho}(u)$$

Pour w_0^a, on a

$$|dw_0^a| \leq |dw_1^a| + |dw^a| \leq |dw_1^a| + C(|du| + |dv_{\alpha\beta}^a|)$$

Donc en intégrant,

$$\frac{1}{\rho^{m-1}}\int_{B(z,\frac{\rho}{2})} |dw_0^a| \leq CM_{z,\rho}(u)$$

Or w_0^a est harmonique donc pour tout $\tau \in (0,\frac{1}{2})$, on a

$$\frac{1}{(\tau\rho)^{m-1}}\int_{B(z,\tau\rho)} |dw_0^a| \leq C\tau M_{z,\rho}(u)$$

On a donc estimé tous les termes et on obtient

$$\frac{1}{(\tau\rho)^{m-1}}\int_{B(z,\tau\rho)} |du| \leq C(\epsilon+\tau)M_{z,\rho}(u)$$

Pour ϵ et τ assez petit,

$$\forall B(z,\tau\rho) \subset B(y,r), \quad \frac{1}{(\tau\rho)^{m-1}}\int_{B(z,\tau\rho)} |du| \leq \theta M_{y,r}(u)$$

i.e. $M_{y,\tau r}(u) \leq \theta M_{y,r}(u)$. □

Théorème 6.2.4 :

> Avec les hypothèses précédentes, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$ et $R > 0$, si $E_{x,4R}(du) \leq \epsilon^2$ alors u est hölderienne au voisinage de x.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $B(x, 4R) \subset \Omega$ et $E_{x,4R}(u) \leq \epsilon^2$. Alors pour tout $y \in B(x, 2R)$, $B(y, 2R) \subset \Omega$ et

$$E_{y,2R}(du) \leq 2^{m-2} E_{x,4R}(du) \leq 2^{m-2}\epsilon^2$$

Donc pour $r \in (0, R)$, $E_{y,2r}(du) \leq E_{y,2R}(du) \leq 2^{m-2}\epsilon^2$. Par conséquent, il existe $\theta \in (0, 1)$ et $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ tels que

$$\forall r \in (0, R), \quad M_{y,\tau r}(u) \leq \theta M_{y,r}(u)$$

Par suite,

$$\forall r \in (0, R), \quad M_{y,r}(u) \leq \frac{1}{\theta} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\log \theta}{\log \tau}} M_{y,R}(u)$$

En particulier,

$$\frac{1}{r^{m-1}} \int_{B(y,r)} |du| \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\log \theta}{\log \tau}} M_{y,R}(u)$$

Et l'inégalité de Poincaré donne

$$\forall y \in B(x, 2R),\ \forall r \in (0, R),\ \forall q \in \left[1, \frac{m}{m-1}\right], \quad \left(\frac{1}{r^m} \int_{B(y,r)} |u - u_{y,r}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C r^{\frac{\log \theta}{\log \tau}}$$

i.e. u est de classe $C^{0, \frac{\log \theta}{\log \tau}}$ dans $B(x, 2R)$. □

6.3 Preuve de Rivière

Cette section vient de [2].

6.3.1 Applications harmoniques

Comme vu précédemment, on peut se limiter au cas où u est à valeurs dans un tore. Par soucis de simplicité en utilisant la section 6.1, on considérera que $\mathcal{N}$ est difféomorphe à un tore $\mathbb{T}^2$ (de dimension 2), que l'on plonge de manière isométrique dans un $\mathbb{R}^N$. Soit $u \in H^1(D^2; \mathbb{T}^2)$ vérifiant faiblement $\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0$.
On considère $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ une base régulière globale orthonormée de $\mathbb{T}^2$ et on pose $\tilde{e} = \epsilon \circ u$. On considère l'énergie

$$\inf_{\psi \in H^1(D^2;\mathbb{R})} \int_{D^2} |\langle \nabla e_2, e_1 \rangle|^2 \, dxdy$$

où $e_1(x, y) + ie_2(x, y) = e^{i\psi(x,y)}(\tilde{e}_1(x, y) + \tilde{e}_2(x, y))$. Ce problème variationnel est bien posé car

$$|\langle \nabla e_2, e_1 \rangle|^2 = |\nabla \psi + \langle \tilde{e}_1, \nabla \tilde{e}_2 \rangle|^2$$

et donc il existe un unique (la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser est strictement convexe et coercive) minimiseur ψ vérifiant

$$0 = \operatorname{div}(\nabla \psi + \langle \tilde{e}_1, \nabla \tilde{e}_2 \rangle) = \operatorname{div}(\langle e_1, \nabla e_2 \rangle)$$

Par conséquent, il existe $\phi \in H^1(D^2; \mathbb{R})$ tel que $\langle e_1, \nabla e_2 \rangle = \nabla^\perp \phi$ et ϕ vérifie

$$-\Delta \phi = \left\langle \nabla e_1, \nabla^\perp e_2 \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} [(\partial_y e_1^j)(\partial_x e_2^j) - (\partial_y e_2^j)(\partial_x e_1^j)]$$

On note que l'hypothèse u harmonique s'écrit $\langle \Delta u, e_1 \rangle = \langle \Delta u, e_2 \rangle = 0$ et ceci se réécrit

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\langle e_1, \nabla u \rangle) = -\langle \nabla e_2, e_1 \rangle \cdot \langle e_2, \nabla u \rangle \\ \operatorname{div}(\langle e_2, \nabla u \rangle) = \langle \nabla e_2, e_1 \rangle \cdot \langle e_1, \nabla u \rangle \\ \operatorname{rot}(\langle e_1, \nabla u \rangle) = -\left\langle \nabla^\perp e_2, e_1 \right\rangle \cdot \langle e_2, \nabla u \rangle \\ \operatorname{rot}(\langle e_2, \nabla u \rangle) = \left\langle \nabla^\perp e_2, e_1 \right\rangle \cdot \langle e_1, \nabla u \rangle \end{cases}$$

On effectue alors la décomposition de Hodge de $\langle e_i, \nabla u\rangle$:

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad \langle e_i, \nabla u\rangle = \nabla C_i + \nabla^\perp D_i$$

On note $W = (C_1, C_2, D_1, D_2) \in H^1(D^2;\mathbb{R}^4)$ et on obtient le système

$$-\Delta W = \Omega \cdot \nabla W$$

(se lie $-\Delta W^i = \Omega^i_j \cdot \nabla W^j$) où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla^\perp\phi & 0 & -\nabla\phi \\ \nabla^\perp\phi & 0 & \nabla\phi & 0 \\ 0 & \nabla\phi & 0 & -\nabla^\perp\phi \\ -\nabla\phi & 0 & \nabla^\perp\phi & 0 \end{pmatrix} \in L^{(2,1)}(D^2;\mathcal{M}_4(\mathbb{R})\otimes\Lambda^1\mathbb{R}^2)$$

Théorème 6.3.1 :

Soit $\Omega \in L^{(2,1)}(D^2;\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\otimes\Lambda^1\mathbb{R}^2)$ et $W \in W^{1,2}(D^2;\mathbb{R}^n)$ une solution de

$$-\Delta W = \Omega \cdot \nabla W$$

Alors il existe $p > 2$ tel que $W \in W^{1,p}(B(0,\frac{1}{2}))$, en particulier, W est hölderienne.

Démonstration. Fixons $\epsilon_0 > 0$ et prenons $\rho_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in (0,\rho_0),\ \forall p \in B(0,\frac{1}{2}), \quad \|\Omega\|_{L^{(2,1)}(B(p,r))} \leq \epsilon_0$$

Soit $r < \rho_0$ et $p \in B(0,\frac{1}{2})$. On introduit la décomposition $W = \Phi + V$ avec

$$\begin{cases} \Delta\Phi = \Omega\cdot\nabla W & \text{dans } B(p,r) \\ \Phi = 0 & \text{sur } \partial B(p,r) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta V = 0 & \text{dans } B(p,r) \\ V = W & \text{sur } \partial B(p,r) \end{cases}$$

En notant K la fonction de Green du Laplacien, l'inégalité de Young donne

$$\|\nabla\Phi\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} \leq \|\nabla K\|_{L^{(2,\infty)}}\|\Omega\cdot\nabla W\|_{L^1} \leq C_0\int_{B(p,r)}|\Omega\cdot\nabla W| \leq C_0\epsilon_0\|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))}$$

Comme V est harmonique, pour tout $\delta \in (0,1)$, le lemme 4.1.5 donne

$$\|\nabla V\|^2_{L^{(2,\infty)}(B(p,r\delta))} \leq C_1\delta^2\|\nabla V\|^2_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))}$$

Il suit

$$\begin{aligned} \|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r\delta))} &\leq C_0\epsilon_0\|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} + C_1\delta^2\|\nabla V\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} \\ &\leq C_0\epsilon_0\|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} + C_1\delta^2\left(\|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} + \|\nabla\Phi\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))}\right) \\ &\leq \left(C_0\epsilon_0 + C_1\delta^2\left(1+C_0\epsilon_0\right)\right)\|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} \leq \frac{1}{2}\|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} \end{aligned}$$

pour $\epsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ assez petits. Ainsi il existe $2 > \alpha > 0$ tel que

$$\sup_{p\in B(0,\frac{1}{2}), 0<r<\frac{1}{4}} r^{-\alpha}\|\nabla W\|_{L^{(2,\infty)}(B(p,r))} < +\infty$$

Et donc

$$\sup_{p\in B(0,\frac{1}{2}),0<r<\frac{1}{4}} r^{-\alpha}\|\Omega\cdot\nabla W\|_{L^1(B(p,r))} < +\infty$$

Comme en fin de section 5.2, on conclut que pour

$$\forall p\in B\left(0,\frac{1}{4}\right),\quad |\nabla W(p)|\leq C\left[\frac{1}{|x|}*(\mathbf{1}_{B(0,\frac{1}{2})}|\Delta W|)(p)+1\right]$$

Donc le lemme 4.3.3 permet d'en déduire $\Delta W\in L^p$ pour un certain $p>1$, et on conclut par un argument de bootstrap. □

6.3.2 Conjecture de Heinz-Hildebrandt

On cherche à généraliser la preuve précédente afin de démontrer la conjecture de Heinz-Hildebrandt sur une variété de départ de dimension 2. On peut donc se restreindre au cas où $\mathcal{M}=D^2$. L'équation générale est de la forme (voire section 3.2)

$$\Delta u+A(u)(\nabla u,\nabla u)=H(u)(\nabla^\perp u,\nabla u)$$

La preuve précédente repose sur deux ingrédients : l'existence d'une jauge de Coulomb ($\mathrm{div}(\langle e_j,\nabla e_i\rangle)=0$) qui permet d'obtenir une structure jacobienne ainsi que l'inégalité de Wente qui permet d'assurer une régularité $L^{(2,1)}$ au lieu de L^2.
La question est : qu'est-ce qui différencie des nonlinéarités de la forme $|\nabla u|^2$ de $A(u)(\nabla u,\nabla u)-H(u)(\nabla^\perp u,\nabla u)$?
Dans le cas où $\mathcal{N}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ est une hypersurface, l'équation des applications harmoniques s'écrit, en notant ν le vecteur normal unitaire à $\mathcal{N}$,

$$\forall i\in[\![1,n+1]\!],\quad -\Delta u^i=\sum_j\left\langle\nabla(\nu(u)^j),\nabla u^j\right\rangle\nu(u)^i$$

De plus, pour tout α, $\partial_\alpha u\perp\nu(u)$ donc $\sum_j\nu(u)^j\nabla u^j=0$ et on peut récrire l'équation sous la forme

$$\forall i\in[\![1,n+1]\!],\quad -\Delta u^i=\sum_j\left[\nu(u)^i\nabla(\nu(u)_j)-\nu(u)_j\nabla(\nu(u)^i)\right]\cdot\nabla u^i$$

Et on remarque alors que la matrice $\left(\nu(u)^i\nabla(\nu(u)_j)-\nu(u)_j\nabla(\nu(u)^i)\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$ est anti-symétrique. C'est en fait, tout ce dont on a besoin pour montrer la continuité hölderienne. On montrera à la fin de la section que l'équation $\Delta u+A(u)(\nabla u,\nabla u)=H(u)(\nabla^\perp u,\nabla u)$ se récrit $\Delta u^i=\Omega^i_j\cdot\nabla u^j$ avec $\Omega^i_j=-\Omega^j_i\in\mathbb{R}^N$.

En partant d'une équation de la forme $\Delta u=\Omega\cdot\nabla u$ avec $\Omega\in L^2(D^2;so_N\otimes\mathbb{R}^2)$, on cherche à retrouver des lois de conservation. Dans le cas où Ω est de la forme $\nabla^\perp\xi$, on a $\mathrm{div}(\nabla u-\xi\nabla^\perp u)=0$ et on cherche donc une relation de la forme de la forme $\mathrm{div}(A\nabla u-B\nabla^\perp u)=0$ avec $\nabla A-A\Omega=-\nabla^\perp B$ (cf plus bas 3.2.8).
Une première idée serait d'effectuer une décomposition de Hodge : $\Omega=\nabla^\perp\xi-\nabla P$ et l'équation sur A devient

$$\Delta A=\nabla A\cdot\nabla^\perp\xi-\mathrm{div}(A\nabla P)$$

Le premier terme est jacobien, ce qui est une bonne chose mais bien que le second soit sous forme de divergence $A\nabla P$ est juste dans L^1, on ne peut pas en déduire d'amélioration de la régularité de A.

La décomposition de Hodge habituelle ne convient pas, on cherche donc une sorte de décomposition non linéaire. On commence avec un peu plus de régularité. On commence par montrer le résultat au voisinage des Ω de la forme $\nabla^\perp\xi$ (lemme 6.3.3). Puis ce gain de régularité permet de translater ce type de voisinages vers des voisinages de Ω n'étant pas de la forme $\nabla^\perp\xi$, tant que Ω est assez petit (lemme 6.3.4). Enfin, on montre le cas général par densité de $W^{1,2}$ dans L^2 (lemme 6.3.6).
La preuve qui suit est une adaptation de [8].

Lemme 6.3.2 :

Il existe $\epsilon = \epsilon(m) > 0$ et $C = C(m) > 0$ tels que pour tout $\Omega \in W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\|\Omega\|^2_{L^2(D^2)} \leq \epsilon$, il existe $\xi \in W^{2,2}(D^2; so_m)$ et $P \in W^{2,2}(D^2; SO_m)$ tels que

i) $\Omega = P\nabla^\perp \xi P^{-1} - \nabla P P^{-1}$

ii) $\xi = 0$ sur ∂D^2

iii) $\|\xi\|_{W^{1,2}(D^2)} + \|P\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C\|\Omega\|_{L^2(D^2)}$

iv) $\|\xi\|_{W^{2,2}(D^2)} + \|P\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C\|\Omega\|_{W^{1,2}(D^2)}$

Démonstration. On introduit l'ensemble

$$U_{\epsilon,C} := \left\{ \Omega \in W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2) \mid \int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \epsilon,\ \exists (\xi, P) \in W^{2,2}(D^2; so_m) \times W^{2,2}(D^2; SO_m) \text{ vérifiant i)-iv)} \right\}$$

Montrons que $U_{\epsilon,C}$ est ouvert, fermé non vide pour $\epsilon > 0$ assez petit. Comme $B_{W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)}(0, \sqrt{\epsilon})$ est connexe par arcs, on aura alors le résultat pour tout Ω dans cette boule.

$B_{W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)}(0, \sqrt{\epsilon})$ est connexe par arcs : Posons $\phi_t : x \mapsto tx$ pour $t \in [0,1]$. On considère le chemin $t \mapsto \phi_t^*\Omega$ (tiré en arrière de Ω par ϕ_t). Comme $\int_{D^2} |\phi_t^*\Omega|^2 = \int_{B(0,t)} |\Omega|^2$ est une fonction croissante de t, on a un chemin $t \mapsto \Omega_t$ dans $W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\int_{D^2} |\Omega_t|^2 \leq \epsilon$ connectant 0 à Ω.

$U_{\epsilon,C} \neq \emptyset$: le choix $\xi = 0$ et $P = I_N$ donne $0 \in U_{\epsilon,C}$ pour tout ϵ et tout C)

$U_{\epsilon,C}$ est fermé : Soit $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (U_{\epsilon,C})^{\mathbb{N}}$ convergeant dans $W^{1,2}$ vers un certain $\Omega \in W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$. On considère $(\xi_k)_k$ et $(P_k)_k$ les décompositions associées.
Par iv), quitte à extraire, on peut supposer que $(P_k)_k$ et (ξ_k) convergent faiblement dans $W^{2,2}$, fortement dans $W^{1,2}$ (par Rellich-Kondrakov) et presque partout vers des certains $P \in W^{2,2}(D^2; \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ et $\xi \in W^{2,2}(D^2; \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$.
La convergence presque partout donne $P \in W^{2,2}(D^2; SO_m)$ et $\xi \in W^{2,2}(D^2; so_m)$.
Comme $(P_k)_k$ est bornée dans L^∞ (chaque P_k est à valeurs dans SO_m), on peut passer à la limite dans l'égalité $\Omega_k = P_k\nabla^\perp\xi_k P_k^T - \nabla P_k P_k^T$ pour avoir $\Omega = P\nabla^\perp\xi P^T - \nabla P P^T$.
De plus, par convergence forte : $\|\Omega\|_{L^2(D^2)} = \lim_{k\to\infty} \|\Omega_k\|_{L^2(D^2)} \leq \sqrt{\epsilon}$ et

$$\|\xi\|_{W^{1,2}(D^2)} + \|P\|_{W^{1,2}(D^2)} = \lim_{k\to\infty} \|\xi_k\|_{W^{1,2}(D^2)} + \|P_k\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C \lim_{k\to\infty} \|\Omega_k\|_{L^2(D^2)} = C\|\Omega\|_{L^2(D^2)}$$

Par convergence faible :

$$\|\xi\|_{W^{2,2}(D^2)} + \|P\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|\xi_k\|_{W^{2,2}(D^2)} + \|P_k\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C \liminf_{k\to\infty} \|\Omega_k\|_{W^{1,2}(D^2)} = C\|\Omega\|_{W^{1,2}(D^2)}$$

Et donc $\Omega \in U_{\epsilon,C}$ et $U_{\epsilon,C}$ est fermé.

$U_{\epsilon,C}$ est ouvert : Fixons $C > 0$ et montrons qu'il existe $\epsilon = \epsilon(C) > 0$ tel que $U_{\epsilon,C}$ soit ouvert. Soit $\Omega \in U_{\epsilon,C}$ et (ξ, P) la décomposition associée.

Plan de la preuve :
On commence par montrer qu'autour de $\nabla^\perp\xi$, on peut toujours effectuer une telle décomposition en utilisant le théorème des fonctions implicites (lemme 6.3.3). Ensuite, le fait que P soit de classe $W^{2,2}$ permet de faire une "translation" continue de ce résultat lorsque Ω n'est pas de la forme $\nabla^\perp\xi$ (lemme 6.3.4), ce qui revient plus ou moins à appliquer le théorème des fonctions implicites directement en Ω. Le problème est qu'a priori, on perd les estimations d'énergie. Mais l'injection de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ permet de les retrouver (lemme 6.3.5).

Lemme 6.3.3 :

Il existe $\epsilon > 0$ tel que si $\|\nabla^\perp \xi\|_{L^2} \leq \epsilon$ alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\lambda \in W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R})$ vérifiant $\|\lambda\|_{W^{1,2}} \leq \delta$, il existe $\xi_\lambda \in W^{2,2}(D^2; so_m)$ et $Q_\lambda \in W^{2,2}(D^2; SO_m)$ vérifiant

$$\begin{cases} \nabla^\perp \xi_\lambda = Q_\lambda^{-1} \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^{-1}(\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda & \text{dans } D^2 \\ \xi_\lambda = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \|Q_\lambda - I_m\|_{W^{2,2}} + \|\xi_\lambda - \xi\|_{W^{2,2}} \leq \alpha$$

Démonstration. On considère les espaces

$$E_k := \left\{ U \in W^{k,2}(D^2; so_m) \mid \int_{D^2} U = 0,\ \partial_\nu U_{|\partial D^2} = 0 \right\}, \quad F := \left\{ V \in L^2(D^2; SO_m) \mid \int_{D^2} V = 0 \right\}$$

ainsi que l'opérateur

$$L : \left| \begin{array}{ccc} E_2 \times E_1 & \to & F \\ (U, \lambda) & \mapsto & \operatorname{div}\left(e^{-U} \nabla(e^U) + e^{-U}(\nabla^\perp \xi + \lambda) e^U\right) \end{array} \right.$$

L est une application lisse dont la différentielle partielle en U, au point $(0,0)$ est

$$\partial_U L(0,0) : \psi \in E_2 \mapsto \operatorname{div}\left(\nabla \psi + [\nabla^\perp \xi, \psi]\right) = \Delta \psi + [\nabla^\perp \xi, \nabla \psi] \in F$$

Montrons que cet opérateur est inversible pour $\|\nabla^\perp \xi\|_{L^2}$ assez petit.
$\partial_U L(0,0)$ est injectif : si $\psi \in E_2$, alors pour tout $1 < p < 2$ $\psi \in W^{2,p}(D^2; so_m)$ et $\partial_U L(0,0)\psi \in L^p(D^2; SO_m)$ par conséquent :

$$\|\partial_U L(0,0)\psi\|_{L^p} \geq \|\Delta \psi\|_{L^p} - \|\nabla^\perp \xi\|_{L^2}^p \|\nabla \psi\|_{L^{p^*}}^p \geq \|\nabla \psi\|_{W^{1,p}} (c_1 - c_2 \|\nabla^\perp \xi\|_{L^2})$$

$\partial_U L(0,0)$ est surjectif : on cherche à résoudre, pour $f \in F$,

$$\begin{cases} \Delta \psi + [\nabla^\perp \xi, \nabla \psi] = f & \text{dans } D^2 \\ \int_{D^2} \psi = 0,\ \partial_\nu \psi_{|\partial D^2} = 0 \end{cases}$$

Pour cela, on considère a la solution de

$$\begin{cases} \Delta a = f & \text{dans } D^2 \\ \int_{D^2} a = 0,\ \partial_\nu a_{|\partial D^2} = 0 \end{cases}$$

Puis, pour $c \in E_2$, on considère $b_c \in E_2$ la solution de

$$\begin{cases} \Delta b_c = -[\nabla^\perp \xi, \nabla(c + a)] & \text{dans } D^2 \\ \int_{D^2} b_c = 0,\ (\partial_\nu b_c)_{|\partial D^2} = 0 \end{cases}$$

Le lemme de Wente donne que pour $c, c' \in E_2$,

$$\|b_c - b_{c'}\|_{W^{1,2}} \leq C \|\nabla^\perp \xi\|_{L^2} \|\nabla(c - c')\|_{L^2}$$

En particulier, pour $\|\nabla^\perp \xi\|_{L^2}$ assez petit, $c \mapsto b_c$ est contractante et donc il existe une solution $b \in E_2$ au système

$$\begin{cases} \Delta b = -[\nabla^\perp \xi, \nabla(b + a)] & \text{dans } D^2 \\ \int_{D^2} b = 0,\ (\partial_\nu b)_{|\partial D^2} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\psi := a + b \in E_2$ vérifie l'équation voulue et donc l'opérateur $\partial_U L(0,0)$ est inversible.
On peut appliquer le théorème des fonctions implicites (cf Schwartz, Analyse 2) : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\lambda \in W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R})$ vérifiant $\|\lambda\|_{W^{1,2}} \leq \delta$, il existe un unique $Q_\lambda \in W^{2,2}(D^2; SO_m)$ vérifiant

$$\operatorname{div}\left(Q_\lambda \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^{-1}(\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda\right) = 0$$

Et donc il existe $\xi_\lambda \in W^{2,2}(D^2; so_m)$ vérifiant

$$\nabla^\perp \xi_\lambda = Q_\lambda \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^{-1}(\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda$$

De plus, les applications $\lambda \mapsto Q_\lambda$ et $\lambda \mapsto \xi_\lambda$ sont continues donc on obtient les estimations voulues. □

Maintenant on cherche à transposer le résultat dans le cas où Ω n'est pas exactement de la forme $\nabla^\perp \xi$. Si l'on introduit P dans l'équation vérifiée par ξ_λ, on trouve :

$$\nabla^\perp \xi_\lambda = (PQ_\lambda)^{-1}\nabla(PQ_\lambda) + (PQ_\lambda)^{-1}(\Omega + P\lambda P^{-1})PQ_\lambda$$

Comme $P \in W^{2,2}$, les applications $\lambda \mapsto P\lambda P^{-1}$ et son inverse $\zeta \mapsto P^{-1}\zeta P$ sont continues de $W^{1,2} \to W^{1,2}$. En posant $\zeta = P\lambda P^{-1}$, $R = PQ_\lambda$ et $\nu = \xi_\lambda$ on obtient :

Lemme 6.3.4 :

Pour tout $\beta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\zeta \in W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R})$ vérifiant $\|\zeta\|_{W^{1,2}} \leq \eta$, il existe $R \in W^{2,2}(D^2; SO_m)$ et $\nu \in W^{2,2}(D^2; \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ tels que

$$\begin{cases} \nabla^\perp \nu = R^{-1}\nabla R + R^{-1}(\Omega + \zeta)R & \text{dans } D^2 \\ \nu = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \|R - P\|_{W^{2,2}} + \|\nu - \xi\|_{W^{2,2}} < \beta$$

Prenons $\beta < \epsilon^{1/2}$. Comme $\|P\|_{W^{1,2}} + \|\xi\|_{W^{1,2}} \leq C\epsilon^{1/2}$ ($\Omega \in U_{\epsilon,C}$), on obtient

$$\|R\|_{W^{1,2}} + \|\nu\|_{W^{1,2}} \leq (C+1)\epsilon^{\frac{1}{2}}$$

Jusqu'ici on a montré que l'ensemble des Ω vérifiant i)-ii) du lemme 6.3.2 était un ouvert-fermé.
Pour montrer que $U_{\epsilon,C}$ est ouvert-fermé, il reste à montrer les estimations :

Lemme 6.3.5 :

Il existe $C = C(m) > 0$, $\epsilon, \delta > 0$ tels que pour tout $P \in W^{2,2}(D^2; SO_m)$ et $\xi \in W^{2,2}(D^2; so_m)$ vérifiant

$$\begin{cases} \nabla^\perp \xi = P^{-1}\nabla P + P^{-1}\Omega P & \text{dans } D^2 \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

pour un certain $\Omega \in W^{1,2}(D^2; so_m)$ vérifiant $\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \epsilon$, si

$$\|P\|_{W^{1,2}} + \|\xi\|_{W^{1,2}} \leq \delta$$

alors

$$\begin{cases} \|\xi\|_{W^{1,2}(D^2)} + \|P\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C\|\Omega\|_{L^2(D^2)} \\ \|\xi\|_{W^{2,2}(D^2)} + \|P\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C\|\Omega\|_{W^{1,2}(D^2)} \end{cases}$$

Preuve du lemme. Sous ces hypothèses, ξ vérifie le système elliptique

$$\begin{cases} -\Delta\xi = -\nabla P^T \cdot \nabla^\perp P + \operatorname{div}(P^T\Omega P) & \text{dans } D^2 \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

En particulier, l'inégalité de Wente donne

$$\|\nabla\xi\|_{L^2} \leq C(\|\nabla P^T\|_{L^2}\|\nabla P\|_{L^2} + \|\Omega\|_{L^2}) \leq C\delta\|\nabla P\|_{L^2} + C\|\Omega\|_{L^2}$$

Or $\nabla^\perp \xi = P^{-1}\nabla P + P^{-1}\Omega P$ donne

$$\|\nabla P\|_{L^2} = \|P^{-1}\nabla P\|_{L^2} \leq \|\nabla\xi\|_{L^2} + \|\Omega\|_{L^2}$$

D'où

$$\|\nabla\xi\|_{L^2} \leq C\delta\|\nabla\xi\|_{L^2} + C(\delta+1)\|\Omega\|_{L^2}$$

Comme $\xi \in W_0^{2,2}$, si $\delta < C/4$, on trouve la première estimation.
Pour la seconde estimation, on considère l'injection $W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ pour avoir

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_{W^{2,2}} &\leq C(\|\nabla\xi\|_{L^2} + \|\nabla^2\xi\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla P^T \cdot \nabla^\perp P + P^T\nabla\Omega P + \nabla P^T\Omega P + P^T\Omega\nabla P\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\Omega\|_{W^{1,2}} + \|\nabla P^T\Omega\|_{L^2} + \|\Omega\nabla P\|_{L^2} + \|\nabla P^T \cdot \nabla^\perp P\|_{W^{1,1}})
\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwartz : $\|\nabla P^T \cdot \nabla^\perp P\|_{W^{1,1}} \leq C\|P\|_{W^{2,2}}\|P\|_{W^{2,2}}$.
En utilisant $W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ puis Cauchy-Schwarz :

$$\|\nabla P^T\Omega\|_{L^2} + \|\Omega\nabla P\|_{L^2} \leq C(\|\nabla P^T\Omega\|_{W^{1,1}} + \|\Omega\nabla P\|_{W^{1,1}}) \leq C(\|P\|_{W^{2,2}}\|\Omega\|_{W^{1,2}} + \|\Omega\|_{W^{1,2}}\|P\|_{W^{1,2}})$$

Ainsi,

$$\|\xi\|_{W^{2,2}} \leq C(\delta + \epsilon^{1/2})\|P\|_{W^{2,2}} + C\|\Omega\|_{W^{1,2}}$$

De plus $\nabla P = P\nabla^\perp\xi - \Omega P$ donne, toujours en utilisant $W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
\|\nabla P\|_{W^{1,2}} &\leq C(\|\xi\|_{W^{2,2}} + \||\nabla^\perp\xi||\nabla^2 P|\|_{L^1} + \||\nabla^2\xi||\nabla P|\|_{L^1} + \|\Omega\|_{W^{1,2}} + \|\nabla P\Omega\|_{W^{1,1}}) \\
&\leq C(1+\delta)\|\xi\|_{W^{2,2}} + C(1+\delta)\|\Omega\|_{W^{1,2}} + C(\delta+\epsilon^{1/2})\|P\|_{W^{2,2}}
\end{aligned}$$

Donc pour ϵ, δ assez petits (dépendant de C), on trouve la seconde estimation. □

Donc $U_{\epsilon,C}$ contient un voisinage de Ω dans $W^{1,2}$.
Comme $0 \in U_{\epsilon,C}$, que $U_{\epsilon,C}$ est fermé et ouvert, on obtient que $\Omega \in U_{\epsilon,C}$. □

Théorème 6.3.6 : Décomposition de Hodge non-linéaire

Il existe $\epsilon = \epsilon(m) > 0$ et $C = C(m) > 0$ tels que pour tout $\Omega \in L^2(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\|\Omega\|^2_{L^2(D^2)} \leq \epsilon$, il existe $\xi \in W^{1,2}(D^2; so_m)$ et $P \in W^{1,2}(D^2; SO_m)$ tels que

- $\Omega = P\nabla^\perp\xi P^{-1} - \nabla P P^{-1}$
- $\xi = 0$ sur ∂D^2
- $\|\xi\|_{L^2(D^2)} + \|\nabla P\|_{L^2(D^2)} \leq C\|\nabla\Omega\|_{L^2(D^2)}$

Démonstration. Prenons $\Omega \in L^2(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \epsilon$. Par densité, il existe une suite $(\Omega_k)_k$ dans $W^{1,2}(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ convergeant dans L^2 vers Ω.
On considère (ξ_k, P_k) donnés par le lemme précédent pour Ω_k.
Les estimations associées disent que quitte à extraire, on peut supposer que $(\xi_k, P_k)_k$ converge faiblement dans $W^{1,2}$ vers un certain (ξ, P). En particulier, on a (quitte à réextraire) convergence presque partout.
Ainsi, les égalités $P_k^T P_k = I_m$ donnent $P^T P = I_m$ et $P \in W^{1,2}(D^2; SO_m)$.
De plus, le théorème de Rellich-Kondrakov dit que (quitte à extraire encore) $(P_k)_k$ converge fortement dans L^q (pour tout $q < \infty$). Par conséquent, $(P_k^T\Omega_k P_k)_k$ (resp. $P_k^T\nabla P_k$) converge dans $\mathcal{D}'(D^2)$ vers $P^T\Omega P$ (resp. $P^T\nabla P$).
Donc $\nabla^\perp\xi = P^{-1}\nabla P + P^{-1}\Omega P$ est vérifiée dans $\mathcal{D}'(D^2)$.
Par continuité de la trace, $\xi = 0$ sur ∂D^2.
Par semi-continuité de la norme $W^{1,2}$ par rapport à la faible convergence $W^{1,2}$, on conserve l'estimation d'énergie. □

Maintenant que notre décomposition de Ω est faite, on peut construire les A et B décrivant la loi de conservation.

Théorème 6.3.7 :

Il existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(N) > 0$ tel que pour tout $\Omega \in L^2(D^2; so_N \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\|\Omega\|^2_{L^2(D^2)} \leq \epsilon_0$, il existe $A \in L^\infty \cap W^{1,2}(D^2; GL_N(\mathbb{R}))$ et $B \in W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ tels que

- $\nabla A - A\Omega = -\nabla^\perp B$
- $\int_{D^2} |\nabla A|^2 + \|\mathrm{dist}(A, SO_N \cap GL_N(\mathbb{R}))\|_{L^\infty(D^2)} \leq C(N) \int_{D^2} |\Omega|^2$

Démonstration. Prenons P et ξ comme précédemment. A chaque $A \in L^\infty \cap W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$, on associe $\tilde{A} := AP$. Supposons que $\nabla A - A\Omega = -\nabla^\perp B$. Alors

$$\Delta(AP) = \nabla \cdot (\nabla AP + A\nabla P) = \nabla \cdot (A(P\nabla^\perp \xi - \nabla P) - \nabla^\perp BP + A\nabla P) = \nabla(AP) \cdot \nabla^\perp \xi - \nabla^\perp B \cdot \nabla P$$

Et comme $\nabla(PP^{-1}) = 0$,

$$-\Delta B = \nabla^\perp \cdot (\nabla A - AP\nabla^\perp \xi P^{-1} - A\nabla PP^{-1}) = \nabla^\perp \cdot (AP\nabla^\perp \xi P^{-1}) + \nabla^\perp(AP) \cdot \nabla P^{-1}$$

Ainsi $\tilde{A}$ et B vérifient le système

$$\begin{cases} \Delta \tilde{A} = \nabla \tilde{A} \cdot \nabla^\perp \xi - \nabla^\perp B \cdot \nabla P \\ \Delta B = \mathrm{div}(\tilde{A}\nabla \xi P^{-1}) - \nabla^\perp \tilde{A} \cdot \nabla P^{-1} \end{cases}$$

Pour montrer l'existence d'une solution à ce système, on va procéder par un argument de point fixe. Pour $\hat{A} \in L^\infty \cap W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ et $\hat{B} \in W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$, on considère le système

$$\begin{cases} \Delta \tilde{A} = \nabla \hat{A} \cdot \nabla^\perp \xi - \nabla^\perp \hat{B} \cdot \nabla P \\ \Delta B = \mathrm{div}(\hat{A}\nabla \xi P^{-1}) - \nabla^\perp \hat{A} \cdot \nabla P^{-1} \\ \partial_\nu \tilde{A} = 0, \ \int_{D^2} \tilde{A} = \pi I_N \\ B = 0, \quad \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

La même preuve que l'inégalité de Wente (on remplace juste la condition de Dirichlet par une condition de Neuman) donne

$$\|\nabla \tilde{A}\|_{L^2} + \|\tilde{A} - I_N\|_{L^\infty} \leq C(\|\nabla \hat{A}\|_{L^2} \|\nabla \xi\|_{L^2} + \|\nabla \hat{B}\|_{L^2} \|\nabla P\|_{L^2})$$

et en notant B_0 la solution de

$$\begin{cases} \Delta B_0 = \mathrm{div}(\nabla \xi P^{-1}) \quad \text{dans } D^2 \\ B_0 = 0 \quad \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

alors

$$\|\nabla(\tilde{B} - B_0)\|_{L^2} \leq C(\|\hat{A} - I_N\|_{L^\infty} \|\nabla \xi\|_{L^2} + \|\nabla \hat{A}\|_{L^2} \|\nabla P\|_{L^2})$$

Par conséquent, si $\|\xi\|_{L^2(D^2)} + \|\nabla P\|_{L^2(D^2)}$ est assez petit, on peu appliquer un théorème de point fixe dans $(L^\infty \cap W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))) \times W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ pour trouver l'existence de $(\tilde{A}, B)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta \tilde{A} = \nabla \tilde{A} \cdot \nabla^\perp \xi - \nabla^\perp B \cdot \nabla P \\ \Delta B = \mathrm{div}(\tilde{A}\nabla \xi P^{-1}) - \nabla^\perp \tilde{A} \cdot \nabla P^{-1} \\ \partial_\nu \tilde{A} = 0, \ B = 0, \quad \text{sur } \partial D^2 \\ \int_{D^2} \tilde{A} = \pi I_N \end{cases}$$

Par construction, $A := \tilde{A}P^{-1}$ satisfait $\int_{D^2} |\nabla A|^2 + \|\mathrm{dist}(A, SO_N \cap GL_N(\mathbb{R}))\|_{L^\infty(D^2)} \leq C(N) \int_{D^2} |\Omega|^2$.
Il reste à montrer que (A, B) vérifie l'identité voulue.
On introduit donc la décomposition de Hodge $\nabla \tilde{A} - \tilde{A}\nabla^\perp \xi + \nabla^\perp BP = \nabla C + \nabla^\perp D$ où

$$\begin{cases} \Delta C = \mathrm{div}(\nabla \tilde{A} - \tilde{A}\nabla^\perp \xi + \nabla^\perp BP) = 0 \quad \text{dans } D^2 \\ C = 0 \quad \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

Par conséquent, $C = 0$ sur D^2. D'autre part, en reprenant le système vérifié par $\tilde{A}$ et B (si une fonction f définit sur D^2 vérifie $f = 0$ sur ∂D^2 alors $(\nu \cdot \nabla^\perp) f = 0$ sur ∂D^2), on remarque que D vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla D P^{-1}) = 0 \quad \text{dans } D^2 \\ (\nu \cdot \nabla^\perp) D = 0 \quad \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

Il existe donc $E \in W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ tel que $\nabla^\perp E = \nabla D P^{-1}$ et E vérifie

$$\begin{cases} -\Delta E = \nabla^\perp D \cdot \nabla P^{-1} \quad \text{dans } \partial D^2 \\ \partial_\nu E = 0 \quad \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

L'inégalité de Wente (en changeant les conditions au bord) donne

$$\int_{D^2} |\nabla E|^2 \leq C_0 \int_{D^2} |\nabla D|^2 \int_{D^2} |\nabla P^{-1}|^2$$

Or $\nabla D = \nabla^\perp E P$ et donc $|\nabla D| \leq |\nabla E|$. Par suite, si $\|\nabla P^{-1}\|_{L^2} = \|\nabla P\|_{L^2}$ et assez petite, $D = 0$. Donc

$$\nabla \tilde{A} - \tilde{A} \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B P = 0$$

Par conséquent, en posant $A = \tilde{A} P^{-1}$, on obtient, toujours avec $\nabla(P^{-1}P) = 0$,

$$-\nabla^\perp B = \nabla \tilde{A} P^{-1} - \tilde{A} \nabla^\perp \xi P^{-1} = \nabla \tilde{A} P^{-1} - \tilde{A}(P^{-1}\Omega + P^{-1} \nabla P P^{-1}) = \nabla(\tilde{A} P^{-1}) - \tilde{A} P^{-1} \Omega$$

□

Théorème 6.3.8 :

Soit $\Omega \in L^2(D^2; so_N \otimes \mathbb{R}^2)$ et $A, B \in W^{1,2}(D^2; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ telles que

$$\nabla A - A\Omega = -\nabla^\perp B$$

Si A est inversible presque partout avec $\|A\|_{L^\infty(D^2)} + \|A^{-1}\|_{L^\infty(D^2)} < +\infty$, alors u est une solution au système de Schrödinger $-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$ si et seulement si $\operatorname{div}(A \nabla u - B \nabla^\perp u) = 0$.
Dans ce cas, $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(D^2)$ un certain $\alpha > 0$.

Démonstration. La première partie du théorème vient du calcul

$$\operatorname{div}(A \nabla u - B \nabla^\perp u) = A \Delta u + \nabla A \cdot \nabla u - \nabla B \cdot \nabla^\perp u = A \Delta u + (\nabla A + \nabla^\perp B) \cdot \nabla u = A(\Delta u + \Omega \cdot \nabla u)$$

Pour la régularité, on fait comme précédemment : on cherche l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{p \in B(0, \frac{1}{2}), 0 < \rho < \frac{1}{4}} \rho^{-\alpha} \int_{B(p,\rho)} |\Delta u| < +\infty$$

Fixons $\epsilon_0 > 0$ et prenons $\rho_0 > 0$ tel que

$$\forall p \in B(0, \frac{1}{2}),\ \forall r \in (0, \rho_0), \quad \int_{B(p,r)} |\nabla A|^2 + |\nabla B|^2 < \epsilon_0$$

Prenons $r < \rho_0$ et $p \in B(0, \frac{1}{2})$. Alors $A \nabla u$ vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A \nabla u) = \nabla B \cdot \nabla^\perp u = (\partial_y B)(\partial_x u) - (\partial_x B)(\partial_y u) \\ \operatorname{rot}(A \nabla u) = -\nabla A \cdot \nabla^\perp u = (\partial_x A)(\partial_y u) - (\partial_y A)(\partial_x u) \end{cases}$$

Introduisons alors la décomposition de Hodge $A\nabla u = \nabla C + \nabla^\perp D$ où $C \in W_0^{1,2}(B(p,r);\mathbb{R})$ et $D \in W^{1,2}(B(p,r))$. Il suffit de considérer C comme solution de

$$\begin{cases} \Delta C = \operatorname{div}(A\nabla u) = \nabla B \cdot \nabla^\perp u & \text{dans } B(p,r) \\ C = 0 & \text{sur } \partial B(p,r) \end{cases}$$

L'inégalité de Wente garanti que $C \in W_0^{1,2}(B(p,r))$ et que

$$\|\nabla C\|_{L^2(B(p,r))} \leq C_0 \|\nabla B\|_{L^2(B(p,r))} \|\nabla u\|_{L^2(B(p,r))} \leq C_0 \epsilon_0 \|\nabla u\|_{L^2(B(p,r))}$$

L'existence de D est donnée par le lemme de Poincaré : comme $\operatorname{div}(A\nabla u - \nabla C) = 0$, il existe $D \in W^{1,2}(B(p,r))$ tel que $\nabla^\perp D = A\nabla u - \nabla C$ et

$$\|\nabla D\|_{L^2(B(p,r))} \leq \|A\nabla u\|_{L^2(B(p,r))} + \|\nabla C\|_{L^2(B(p,r))} \leq C\left(\|A\|_{L^\infty} + \|\nabla B\|_{L^2}\right)\|\nabla u\|_{L^2}$$

Et D vérifie $\Delta D = -\nabla A \cdot \nabla^\perp u$. On introduit la décomposition de Hodge $D = \phi + v$ avec

$$\begin{cases} \Delta \phi = -\nabla A \cdot \nabla^\perp u & \text{dans } B(p,r) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B(p,r) \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } B(p,r) \\ v = D & \text{sur } \partial B(p,r) \end{cases}$$

L'inégalité de Wente donne $\|\nabla \phi\|_{L^2(B(p,r))} \leq C\|\nabla A\|_{L^2(B(p,r))}\|\nabla u\|_{L^2(B(p,r))}$. On peut procéder de la même manière que pour les applications harmoniques : pour un certain $\delta \in (0,1)$ qui sera fixé plus tard,

$$\int_{B(p,\delta r)} |\nabla D|^2 \leq 2\int_{B(p,\delta r)} (|\nabla v|^2 + |\nabla \phi|^2) \leq 2\delta^2 \int_{B(p,r)} |\nabla v|^2 + 2\int_{B(p,r)} |\nabla \phi|^2 \leq 2\delta^2 \int_{B(p,r)} |\nabla D|^2 + 3\int_{B(p,r)} |\nabla \phi|^2$$

Finalement,

$$\int_{B(p,\delta r)} |A\nabla u|^2 \leq 2\int_{B(p,r)} |\nabla C|^2 + 2\int_{B(p,\delta r)} |\nabla D|^2 \leq C\epsilon_0 \int_{B(p,r)} |\nabla u|^2 + C\delta^2 \int_{B(p,r)} |\nabla u|^2$$

Comme A est inversible (et que la norme de son inverse est finie),

$$\int_{B(p,\delta r)} |\nabla u|^2 \leq C(\delta^2 + \epsilon_0^2) \int_{B(p,r)} |\nabla u|^2$$

Donc pour δ et ϵ_0 assez petits,

$$\int_{B(p,\delta r)} |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{B(p,r)} |\nabla u|^2$$

et on obtient, de la même manière que pour les applications harmoniques,

$$\sup_{p \in B(0,\frac{1}{2}), 0<\rho<\frac{1}{4}} \rho^{-\alpha} \int_{B(p,\rho)} |\nabla u|^2 < +\infty$$

Et l'équation $-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$ permet d'avoir l'estimtion voulue. De plus,

$$\forall p \in B(0, \frac{1}{4}), \quad |\nabla u(p)| \leq C\left[\frac{1}{|x|} * (\mathbf{1}_{B(0,\frac{1}{2})}|\Delta u|)(p) + 1\right]$$

Donc

$$\sup_{p \in B(0,\frac{1}{4}), 0<\rho<\frac{1}{4}} \rho^{-\alpha} \int_{B(p,\rho)} |\nabla u| < +\infty$$

Et u est hölderdienne. □

Théorème 6.3.9 :

Soit $\Omega \in L^2(D^2; so_N \otimes \mathbb{R}^2)$ et $u \in W^{1,2}(D^2; \mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$-\Delta u^i = \Omega^i_j \cdot \nabla u^j \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D^2)$$

Alors il existe $p > 2$ tel que $u \in W^{1,p}_{loc}(D^2; \mathbb{R}^N)$. En particulier, u est hölderien.

On remarque que si $u \in W^{1,p}$ est solution de $\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$ alors $u \in W^{1,q}$ pour tout $q < \infty$.
Dans le cas où $\Omega \in L^2$ est indépendant de u, la régularité $W^{1,p}_{loc}$ pour tout $p > 2$ est en fait la meilleure que l'on puisse espérer par un argument de bootstrap. Pour voir cela, supposons que $u \in W^{2,p}$ pour un certain $p > 2$. Alors $\Omega \cdot \nabla u \in L^2$, ce qui donne $\nabla u \in L^\infty$. Or on a seulement $\nabla u \in L^q$ pour tout $q < \infty$.

Cependant dans le cas de la conjecture de Heinz-Hildebrandt (voir section 3.2), l'équation des points critiques est non linéaire et conduit à une dépendance de Ω en u. C'est exactement cette dépendance qui permet de passer de $C^{0,\alpha}$ à C^∞ (voir section 2.3).

Théorème 6.3.10 :

Soit $\mathcal{N}^n$ une sous-variété compacte, sans bord, orienté de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 (avec $1 \leq n < N$) et ω une 2-forme de classe C^1 sur $\mathcal{N}$. Supposons que u est un point critique dans $W^{1,2}(D^2; \mathcal{N})$ de l'énergie

$$E^\omega(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2 + \omega_{ij}(u)(\nabla u^i) \cdot (\nabla^\perp u^j)\ dxdy = \frac{1}{2}\int_{D^2} |\nabla u|^2 + \omega(u)(\nabla u, \nabla u)\ dxdy$$

Alors u est Hölder continue.

Démonstration. Soit $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq N}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$. On considère H la 2-forme à valeurs dans so_N donnée par

$$\forall z \in \mathcal{N}, \quad H^i_{jk}(z) = d\omega_z(\epsilon_i, \epsilon_j, \epsilon_k)$$

Alors l'équation d'Euler-Lagrange associée à E^ω est, en notant A^i_{jk} les coefficients de la seconde forme fondamentale A,

$$-\Delta u^i = H^i_{jk}(u)\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^j + A^i_{jk}(u)\nabla u^k \cdot \nabla u^j$$

En utilisant le fait que $H^i_{jk} = -H^j_{ik}$, on trouve

$$-\Delta u^i = \frac{1}{2}(H^i_{jk}(u) - H^j_{ik}(u))\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^j + A^i_{jk}(u)\nabla u^k \cdot \nabla u^j$$

Or $A(u)$ est à valeurs dans $(T_u\mathcal{N})^\perp$ donc $A^j_{ik}(u)\nabla u_j = 0$ et

$$-\Delta u^i = \frac{1}{2}(H^i_{jk}(u) - H^j_{ik}(u))\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^j + (A^i_{jk}(u) - A^j_{ik}(u))\nabla u^k \cdot \nabla u^j$$

La matrice $N \times N$ définit par

$$\Omega^i_j := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N (H^i_{jk}(u) - H^j_{ik}(u))\nabla^\perp u^k + \sum_{k=1}^N (A^i_{jk}(u) - A^j_{ik}(u))\nabla u^k$$

est anti-symétrique, à valeurs dans L^2 et $\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$. □

6.3.3 Passage à la limite

Une lecture attentive de la preuve précédente montre qu'en fait les applications A et B définis par $\nabla A - A\Omega = -\nabla^\perp B$ ne sont pas très important dans la preuve, on donnera d'ailleurs une amélioration de celle-ci n'utilisant que ξ et P dans la section suivante. L'intérêt de cette décomposition est de donner une loi de conservation et donc, comme dans le cas de la sphère, cela permet certains passages à la limite.

Théorème 6.3.11 :

Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers un certain $\Omega \in L^2(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{-1,2}(D^2;\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ convergeant dans $W^{-1,2}$ vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{1,2}(D^2;\mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$-\Delta u_n = \Omega_n \cdot \nabla u_n + f_n \quad \text{dans } D^2$$

Alors il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain $u \in W^{1,2}(D^2;\mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$$

Démonstration. Comme $(u_n)_n$ est bornée, quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge faiblement vers un certain $u \in W^{1,2}(D^2;\mathbb{R}^m)$.
Prenons $\lambda < 1$ et $\epsilon > 0$ comme dans le théorème 6.3.6.
Pour chaque $x \in B(0,\lambda)$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_{x,n} \in [0, 1-|x|]$ tel que $\int_{B(x,r_{x,n})} |\Omega_n|^2 = \epsilon$ si $\int_{B(x,1-|x|)} |\Omega_n|^2 \geq \epsilon$, sinon on pose $r_{x,n} = 1-|x|$.
Alors $(B(x, r_{x,n}))_{x\in B(0,\lambda)}$ est un recouvrement de $B(0,\lambda)$. Par le lemme de Vitali, on peut en extraire un sous-recouvrement $(B(x_{i,n}, r_{x_i,n}))_{1\leq i\leq N(n)}$ de sorte que les $B(x_{i,n}, r_{x_i,n})$ s'intersectent au plus un nombre fini k (indépendant de n) de fois. Alors

$$\epsilon|\{i \in [\![1, N(n)]\!] \mid \int_{B(x_{i,n},r_{x_i,n})} |\Omega_n|^2 = \epsilon\}| \leq \int_{\bigcup_{i=1}^{N(n)} B(x_{i,n},r_{x_i,n})} |\Omega_n|^2 \leq \int_{D^2} |\Omega_n|^2$$

Et le nombre de boules vérifiant $\int_{B(x_{i,n},r_{x_i,n})} |\Omega_n|^2 < \epsilon$ est borné car ces boules vérifient $r_{x_{i,n},n} = 1 - |x_{i,n}| \geq 1-\lambda$ et par définition, chaque point est dans au plus k de ces boules.
Comme $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on conclut que $(N(n))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi et quitte à extraire, on peut supposer $N(n)$ indépendant de n.
Quitte à extraire, on peut supposer que chaque $(x_{i,n})_n$ converge vers un certain $x_i \in \bar{B}(0,\lambda)$ et que chaque $(r_{x_{i,n},n})_n$ converge vers un certain r_i (qui peut valoir 0). On va montrer que $-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$ sur chaque $B(x_i, r_i)$.
Soit $A_{i,n}$ et $B_{i,n}$ donnés par le théorème 6.3.7 sur $B(x_{i,n}, r_{x_{i,n},n})$ pour Ω_n. Alors

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A_{i,n}\nabla u_n + B_{i,n}\nabla^\perp u_n) = -A_{i,n} f_n & \text{dans } B(x_{i,n}, r_{x_{i,n},n}) \\ \nabla A_{i,n} - A_{i,n}\Omega_n = \nabla^\perp B_{i,n} & \text{dans } B(x_{i,n}, r_{x_{i,n},n}) \end{cases}$$

Quitte à extraire, $(A_{i,n})_n$ et $(B_{i,n})_n$ convergent faiblement dans $W^{1,2}$, fortement dans L^2 et presque partout vers des certaines limites A_i et B_i sur chaque $B(x_i, r_i)$. Donc

$$\begin{aligned} &A_{i,n}\nabla u_n + B_{i,n}\nabla^\perp u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} A_i \nabla u + B_i \nabla^\perp u \\ &\nabla A_{i,n} - A_{i,n}\Omega_n - \nabla^\perp B_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} \nabla A_i - A_i\Omega - \nabla^\perp B_i \\ &A_{i,n} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}'} 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A_i \nabla u + B_i \nabla^\perp u) = 0 & \text{dans } B(x_i, r_i) \\ \nabla A_i - A_i \Omega = \nabla^\perp B_i & \text{dans } B(x_i, r_i) \end{cases}$$

Et on retrouve $A_i(\Delta u + \Omega \cdot \nabla u) = 0$. Par convergence presque partout A_i est inversible et $\Delta u + \Omega \cdot \nabla u = 0$ sur chaque $B(x_i, r_i)$.
De plus, $B(0,\lambda) \subset \overline{\bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)}$. Or $B(0,\lambda) \cap \left(\overline{\bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)} \setminus \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)\right)$ est constitué d'un nombre fini de points (ces points sont des intersections d'un nombre fini de cercles).
Donc la distribution $\Delta u + \Omega \cdot \nabla u$ est supporté en un nombre fini de points, c'est donc une somme de dérivées de diracs mais c'est un élément de L^1, donc $\Delta u + \Omega \cdot \nabla u = 0$ sur $B(0,\lambda)$, pour tout $\lambda < 1$. □

6.4 Amélioration par Schikorra

On donne une autre preuve de la décomposition de Hodge non-linéaire, basée sur un problème de minimisation, venant de [9] puis on en déduit la régularité des solutions de $\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$ sans la construction de A et B de la preuve de Rivière. La jauge de Coulomb chez Rivière correspond à la construction du P dans la décomposition de Hodge non-linéaire, mais le point de vue adopté par Rivière passe par des lois de conservation. Ici, le point de vue est plus proche de celui de Hélein où l'objectif est de minimiser la même fonctionnelle et d'utiliser l'équation d'Euler-Lagrange associée pour avoir une équation plus agréable.

Lemme 6.4.1 :

Soit $\Omega \in L^2(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$, il existe $P \in W^{1,2}(D^2; SO_m)$ minimisant

$$\forall Q \in W^{1,2}(D^2; SO_m), \quad E(Q) := \int_{D^2} |Q^T dQ - Q^T \Omega Q|^2$$

Et P vérifie $\|dP\|_{L^2(D^2)} + \|P^T dP - P^T \Omega P\|_{L^2(D^2)} \leq 2\|\Omega\|_{L^2(D^2)}$.

Démonstration. En prenant $Q = I_m$, on voit que $\inf E \leq \|\Omega\|_{L^2}^2$.
Considérons $(Q_k)_k \in W^{1,2}(D; SO_m)^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante vérifiant $E(Q_k) \leq E(I_2)$. Alors

$$\|dQ_k\|_{L^2}^2 = \|Q_k^T dQ_k\|_{L^2}^2 \leq 2(E(Q_k) + \|\Omega\|_{L^2}^2) \leq 4\|\Omega\|_{L^2}^2$$

Par conséquent $(Q_k)_k$ est bornée dans $W^{1,2}$ et quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge faiblement dans $W^{1,2}$, fortement dans L^2 et presque partout vers un certain $P \in W^{1,2}(D; \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$.
La convergence presque partout implique que $P^T P = I_m$ et donc $P \in W^{1,2}(D^2; SO_m)$.
De plus,

$$\begin{aligned}
E(Q_k) &= \int_D |Q_k^T dQ_k - Q_k^T \Omega Q_k|^2 \\
&= \int_D |Q_k^T P d(P^T Q_k) - Q_k P dP^T Q_k - Q_k^T P P^T \Omega Q_k|^2 \\
&= \int_D |d(P^T Q_k) - (dP^T + P^T \Omega) Q_k|^2 \\
&= \int_D |d(P^T Q_k) + \Omega^P P^T Q_k|^2 \quad \text{où } \Omega^P := P^T dP - P^T \Omega P \\
&= \int_D \left(|d(P^T Q_k)|^2 + 2\left\langle d(P^T Q_k), \Omega^P P^T Q_k \right\rangle + |\Omega^P|^2\right)
\end{aligned}$$

Or, par convergence dans $W^{1,2}$, $\int_D \left\langle d(P^T Q_k), \Omega^P P^T Q_k \right\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et par conséquent,

$$\inf E = \liminf_{k\to\infty} E(Q_k) \geq \int_D |\Omega^P|^2 = E(P)$$

et donc $(d(P^T Q_k))_k$ converge vers 0 dans L^2 : $(P^T Q_k)_k$ converge vers I_m dans $W^{1,2}$ et $(Q_k)_k$ converge fortement vers P dans $W^{1,2}$. L'estimation vient de $E(P) \leq E(I_m)$. □

Lemme 6.4.2 :

Soit $\Omega \in L^2(D^2; so_m \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$. Les points critiques $P \in W^{1,2}(D; SO_m)$ de

$$\forall Q \in W^{1,2}(D; SO_m), \quad E(Q) := \int_D |Q^T dQ - Q^T \Omega Q|^2$$

vérifient l'équation d'Euler-Lagrange

$$\operatorname{div}(P^T dP - P^T \Omega P) = 0$$

Démonstration. Considérons $\phi \in C_c^\infty(D; so_m)$. Alors pour $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} E(P \exp_P(\epsilon\phi)) &= \int_D |d(P \exp_P(\epsilon\phi)) - \Omega P \exp_P(\epsilon\phi)|^2 \\ &= \int_D |dP + \epsilon d(P\phi) + o(\epsilon) - \Omega(P + \epsilon P\phi + o(\epsilon))|^2 \\ &= \int_D \left(|dP - \Omega P|^2 + 2\epsilon \langle dP - \Omega P, d(P\phi) - \Omega P\phi\rangle + o(\epsilon)\right) \end{aligned}$$

Comme P est un point critique, en notant $\Omega^P = P^T dP - P^T \Omega P$,

$$0 = \int_D \langle dP - \Omega P, d(P\phi) - \Omega P\phi\rangle = \int_D \left\langle \Omega^P, \Omega^P \phi + d\phi \right\rangle$$

Comme ϕ est anti-symétrique, $\left\langle \Omega^P, \Omega^P \phi \right\rangle = 0$ et il suit que

$$\forall \phi \in C_c^\infty(D; so_m), \quad \int_D \left\langle \Omega^P, d\phi \right\rangle = 0$$

□

Une autre preuve du caractère hölderien de la solution en passant par des estimations L^p avec $1 < p < 2$.

Théorème 6.4.3 :

Soit $\Omega \in L^2(D^2; so_N \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ et $u \in W^{1,2}(D^2; \mathbb{R}^N)$ solution de $\Delta u = \Omega \cdot du$.
Il existe $\epsilon \in (0,1)$ tel que si $\|\Omega\|_{L^2(D^2)} \leq \epsilon$ alors il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que $u \in C^{0,\alpha}(D^2; \mathbb{R}^N)$.

Démonstration. On applique les lemmes précédents : Prenons $R \in (0, \frac{1}{2})$, alors il existe $P \in W^{1,2}(B(z,R); SO_N)$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\Omega^P) = \operatorname{div}(P^T dP - P^T \Omega P) = 0 \quad \text{dans } B(z,R) \\ \|dP\|_{L^2(B(z,R))} + \|\Omega^P\|_{L^2(B(z,R))} \leq 3\|\Omega\|_{L^2(B(z,R))} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{div}(P^T du) = \Omega^P \cdot P^T du \quad \text{dans } B(z,R)$$

On effectue la décomposition de Hodge de $P^T du$: il existe $f \in W_0^{1,2}(B(z,R); \mathbb{R}^N)$, $g \in W_0^{1,2}(B(z,R); \Lambda^2\mathbb{R}^N)$ et $h \in C^\infty(B(z,R); \mathbb{R}^N \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$ tels que $P^T du = df + d^*g + h$ ($P^T \nabla u = \nabla f + \nabla^\perp g + h$) et

$$\begin{cases} \Delta f = \Omega^P \cdot P^T du & \text{dans } B(z,R) \\ f = 0 & \text{sur } \partial B(z,R) \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta g = d(P^T du) = \nabla^\perp(P^T \nabla u) & \text{dans } B(z,R) \\ g = 0 & \text{sur } \partial B(z,R) \end{cases} \quad \begin{cases} d^*h = \operatorname{div}(h) = 0 & \text{dans } B(z,R) \\ dh = \nabla^\perp h = 0 & \text{dans } B(z,R) \end{cases}$$

Pour $p \in (1,2)$, comme h est harmonique, pour $r \in (0,R)$,

$$\int_{B(z,r)} |du|^p \leq c(p) \int_{B(z,r)} (|h|^p + |df|^p + |dg|^p) \leq c(p) \int_{B(z,R)} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 |h|^p + |df|^p + |dg|^p \right]$$

On estime $\int |df|^p$ par dualité :

$$\|df\|_{L^p(B(z,R))} \leq c(p) \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p'}} \leq 1} \int_{B(z,R)} df \cdot d\phi$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(B(z,R))$ avec $\|\phi\|_{W^{1,p'}} \leq 1$. On a alors

$$\|\phi\|_{L^\infty(B(z,R))} \leq c(p) R^{\frac{2}{p}-1}, \qquad \|d\phi\|_{L^2(B(z,R))} \leq c(p) R^{\frac{2}{p}-1}$$

On pose

$$\forall B(x,\rho) \subset D^2, \quad M_p(x,\rho) := \sup_{B(x',\rho') \subset B(x,\rho)} \frac{1}{(\rho')^{2-p}} \int_{B(x',\rho')} |du|^p$$

Par définition de f, et en utilisant le lemme A.4.19 :

$$\begin{aligned}
\|df\|_{L^p(B(z,R))} &\leq c(p) \sup_\phi \int_{B(z,R)} \phi \Omega^P \cdot P^T du \\
&\leq c(p) \sup_\phi \|\Omega^P\|_{L^2(B(z,R))} \left(\|dP\|_{L^2(B(z,R))} \|\phi\|_{L^\infty} + \|d\phi\|_{L^2} \right) M_p(z,2R)^{1/p} \\
&\leq c(p) \sup_\phi \|\Omega^P\|_{L^2(B(z,R))} \left(\|\Omega\|_{L^2(B(z,R))} \|\phi\|_{L^\infty} + \|d\phi\|_{L^2} \right) M_p(z,2R)^{1/p} \\
&\leq c(p) \epsilon R^{\frac{2}{p}-1} M_p(z,2R)^{1/p}
\end{aligned}$$

On a la même estimation pour dg et on obtient

$$\int_{B(z,r)} |du|^p \leq c(p) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \int_{B(z,R)} |du|^p + c(p) \epsilon^p R^{2-p} M_p(z,2R)$$

D'où, en revenant à l'estimation initiale,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^{2-p}} \int_{B(z,r)} |du|^p &\leq c(p) \left(\frac{r}{R}\right)^p \frac{1}{R^{m-p}} \int_{B(z,R)} |du|^p + c(p) \epsilon^p \left(\frac{R}{r}\right)^{2-p} M_p(z,2R) \\
&\leq c(p) \left[\left(\frac{r}{R}\right)^p + \epsilon^p \left(\frac{R}{r}\right)^{2-p} \right] M_p(z,2R)
\end{aligned}$$

Prenons $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ tel que $c(p)\gamma^p \leq \frac{1}{4}$ et posons $\epsilon = \gamma^{2/p}$. Alors, avec $r = \gamma R$, on réécrit l'estimation ci-dessus en

$$\frac{1}{(\gamma R)^{2-p}} \int_{B(z,\gamma R)} |du|^p \leq \frac{1}{2} M_p(z,2R)$$

Ceci est donc valide pour tout $R > 0$ et $z \in D^2$ tels que $B(z,2R) \subset D^2$ et donc

$$\forall B(z,2R) \subset B(y,\rho) \subset D^2, \quad \frac{1}{(\gamma R)^{2-p}} \int_{B(z,\gamma R)} |du|^p \leq \frac{1}{2} M_p(y,\rho)$$

i.e. $M_p(y, \frac{\gamma}{2}\rho) \leq \frac{1}{2} M_p(y,\rho)$, ce qui donne la continuité hölderienne. $\square$

Chapitre 7

Surfaces minimales

On explique ici où apparaissent les applications harmoniques dans le contexte des surfaces minimales. Leur régularité permet de parler de leur image comme des sous-variétés, en particulier on peut parler de leur courbure.

7.1 Problème de Plateau

On se place dans une variété riemannienne complète de dimension 3 $(\mathcal{N}, g)$ et on prend une courbe de Jordan (i.e. fermée simple) $\Gamma \subset \mathcal{N}$.
On pourra trouver une étude approfondie dans le cas $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$ dans [10].

Si $u : D^2 \to \mathcal{N}$ est une immersion, l'aire de $\Sigma := u(D^2)$ est donnée par

$$\mathcal{A}(u) = \int_{D^2} \sqrt{\det(u^* g)}$$

Proposition 7.1.1 :

Soit $u^t : D^2 \to \mathcal{N}$ une famille d'immersions lisses, avec $t \in (-1, 1)$, telle que $X := \partial_t u^t_{|t=0}$ soit à support compact. En posant $h = (u^0)^* g$, H la courbure moyenne de $\Sigma := u^0(D^2)$ et n le vecteur normale à Σ,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(u^t)_{|t=0} = -\int_{D^2} g(Hn, X) d\mathrm{vol}_h$$

Démonstration. Comme $\mathcal{A}(u^t) = \int_{D^2} \sqrt{\det(h^t)}$ donc, en omettant l'exposant t,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(u^t) = \frac{1}{2}\int_{D^2} \mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\sqrt{\det(h)}$$

En notant A la seconde forme fondamentale de Σ, à valeurs dans $T\Sigma^\perp$,

$$\frac{dh_{ij}}{dt}_{|t=0} = g(\partial^2_{ti} u^0, \partial_j u^0) + g(\partial_i u^0, \partial^2_{tj} u^0) = -2g(A_{ij}, \partial_t u^0)$$

Donc

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}\right) = -h^{ij} g(A_{ij}, \partial_t u^0) = -g(Hn, X)$$

□

Par conséquent, si Σ est localement minimisante, alors $H = 0$. On appelle surface minimale toute surface vérifiant cette équation. Si l'on prend une carte locale $u : D^2 \to \Sigma$, alors cette équation s'écrit $\langle \Delta u, n \rangle = 0$ où n est la normale à Σ et dépend de u. Mais si l'on prend un difféomorphisme $\phi : D^2 \to D^2$, alors $u \circ \phi$ est aussi une carte locale de Σ et satisfait donc la même équation. En d'autre termes l'équation $H = 0$ possède un grand degré de liberté, de la même manière que l'équation des applications harmoniques. Cependant cette équation se simplifie grandement avec un bon choix de coordonnées.
On pourra trouver une preuve de ce résultat dans [11] (chapitre 9, annexe 1) :

Théorème 7.1.2 :

> Soit $u : D^2 \to \mathcal{N}$ une immersion de classe C^2. Alors il existe un C^2-difféomorphisme $\phi : D^2 \to D^2$ tel que $u \circ \phi$ est conforme.

L'équation $H = 0$ s'écrit $0 = h^{ij} \langle \nabla_{\partial_i u} \partial_j u, n \rangle$.
Dans les coordonnées du théorème précédent (sur D^2) et en coordonnées normales autour d'un point $u(z_0)$ (sur $\mathcal{N}$), $g_{ij}(u(z_0)) = \delta_{ij}$ et $\Gamma^k_{ij}(u(z_0)) = 0$, donc $h_{ij}(z_0)$ est de la forme $\lambda \delta_{ij}(z_0)$, $\lambda > 0$ et on obtient en z_0 :

$$h^{ij} \langle \nabla_{\partial_i u} \partial_j u, \partial_x u \rangle = \frac{1}{\lambda} \left[\left\langle \partial^2_{xx} u, \partial_x u \right\rangle + \left\langle \partial^2_{yy} u, \partial_x u \right\rangle \right] = \frac{1}{\lambda} \left[\partial_x \left(\frac{|\partial_x u|^2}{2} \right) - \partial_x \left(\frac{|\partial_y u|^2}{2} \right) \right] = 0$$

De même, $\left\langle h^{ij} \nabla_{\partial_i u} \partial_j u, \partial_y u \right\rangle = 0$. En écrivant $h^{ij} \nabla_{\partial_i u} \partial_j u$ en coordonnées on trouve

$$H = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_h u^k + h^{\alpha\beta} \Gamma^k_{ij}(u) \partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j = 0 \\ u \text{ conforme} \end{cases}$$

Pour prouver l'existence d'une telle application, on cherche à minimiser la fonctionnelle $\mathcal{A}(u)$ sous la contrainte $u(\mathbb{S}^1) = \Gamma$.

Le problème est que si on prend une suite minimisante quelconque, elle n'a aucune chance de converger. En effet la fonctionnelle $\mathcal{A}$ n'est défini qu'en termes géométriques et est donc invariante par reparamétrisation : si $\phi : D^2 \to D^2$ est un difféomorphisme préservant $\mathbb{S}^1$, alors $\mathcal{A}(u \circ \phi) = \mathcal{A}(u)$.

L'idée est alors de modifier la fonctionnelle à minimiser de sorte à réduire le groupe d'invariance. Comme l'équation des surfaces minimales se réduit à $\Delta u = 0$, on peut chercher à minimiser la fonctionnelle de Dirichlet $\mathcal{D}(u) = \frac{1}{2} \int_{D^2} |\nabla u|^2$, avec la contrainte que $u_{|\mathbb{S}^1}$ est une paramétrisation monotone de Γ. On note que $\mathcal{A}(u) \leq \mathcal{D}(u)$ avec égalité lorsque u est conforme.

Théorème 7.1.3 :

> Si u est un point critique de $\mathcal{D}$, alors u est conforme.

Démonstration. Considérons $\tau \in C^\infty(B(0,2); \mathbb{R}^2)$ telle que $\forall x \in \mathbb{S}^1,\ \langle \tau(x), x \rangle = 0$ et $\phi_\epsilon := id_{D^2} + \epsilon\tau$. Pour ϵ assez petit, ϕ_ϵ reste un difféomorphisme de $D^2 \to D^2$. On note $u_\epsilon := u \circ \phi_\epsilon$ et on remarque que u_ϵ satisfait également la condition au bord. De plus,

$$\mathcal{D}(u_\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{D^2} |du_{\phi_\epsilon} \circ d\phi_\epsilon|^2 = \frac{1}{2} \int_{D^2} |du_z \circ d(\phi_\epsilon)_{\phi_\epsilon^{-1}(z)}|^2 |\det(d\phi_\epsilon^{-1}(z))| dz$$

Avec $d(\phi_\epsilon)_{\phi_\epsilon^{-1}(z)} =_{\epsilon\to 0} id + \epsilon d\tau_z + o(\epsilon)$ et $\det(d\phi_\epsilon^{-1}(z)) = 1 - \epsilon \mathrm{div}(\tau)(z) + o(\epsilon)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(u_\epsilon) &\underset{\epsilon\to 0}{=} \frac{1}{2}\int_{D^2} \left[|du_z|^2 + 2\epsilon \langle du_z, du_z \circ d\tau_z\rangle\right](1-\epsilon \mathrm{div}(\tau))dz + o(\epsilon) \\
&\underset{\epsilon\to 0}{=} \mathcal{D}(u) + \epsilon \int_{D^2} \langle \partial_i u, \partial_j u\rangle \, \partial_i \tau^j - \frac{|\nabla u|^2}{2}\mathrm{div}(\tau)\ dz + o(\epsilon) \\
&\underset{\epsilon\to 0}{=} \mathcal{D}(u) + \epsilon \int_{D^2} \frac{1}{2}\left(|\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2\right)\left(\partial_x \tau^1 - \partial_y \tau^2\right) + \langle \partial_x u, \partial_y u\rangle \left(\partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^1\right)\ dz + o(\epsilon)
\end{aligned}$$

Notons $v = |\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2 - 2i\langle \partial_x u, \partial_y u\rangle$ la différentielle de Hopf de u. On récrit

$$\mathcal{D}(u_\epsilon) \underset{\epsilon\to 0}{=} \mathcal{D}(u) + \epsilon \int_{D^2} \mathrm{Re}\left(v\partial_{\bar z}\tau\right) dz + o(\epsilon)$$

Comme u est un point critique de $\mathcal{D}$, u est harmonique et donc v est holomorphe. De plus,

$$0 = \int_{D^2} \mathrm{Re}\left(v\partial_{\bar z}\tau\right) dz = \int_{\partial D^2} \mathrm{Re}(v\tau z) dz$$

En prenant $\tau = \alpha i z$ pour $\alpha \in C^\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$, on obtient $(z^2 v)_{|\mathbb{S}^1} \in \mathbb{R}$. Comme $z^2 v$ est holomorphe, $z^2 v$ est constante. Mais $(z^2 v)(0) = 0$ donc $v = 0$ et u est conforme. □

Corollary 7.1.4 :

> Tout point critique de $\mathcal{D}$ est un point critique de $\mathcal{A}$.

Démonstration. Si u est un point critique de $\mathcal{D}$, alors u est harmonique conforme, donc la courbure moyenne de $u(D^2)$ est nulle et u est un point critique de $\mathcal{A}$. □

Pour les preuves de ce qui suit, on pourra se référer à [10] dans le cas $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$.
Le résultat important (théorème 2.1 dans [10]) est que si $u \in C^2(D^2;\mathcal{N})$ et $\epsilon > 0$, alors il existe un difféomorphisme $\phi : D^2 \to D^2$ tel que $\mathcal{D}(u\circ\phi) \leq (1+\epsilon)\mathcal{A}(u\circ\phi)$, i.e. quitte à reparamétrer les fonctionnelles de Dirichlet et de l'aire sont semblables. En particulier, $\inf \mathcal{A} = \inf \mathcal{D}$.

La question maintenant est de trouver un minimiseur de $\mathcal{D}$.
On considère $C(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions $H^1(D^2;\mathcal{N})$ telles que leur trace au bord est une paramétrisation continue de Γ. L'invariance de $\mathcal{D}$ par rapport aux difféomorphismes conformes reste un problème. En effet, on peut montrer (lemme 4.1 de [10]) que si $u \in C(\Gamma)$ alors l'adhérence de l'orbite conforme de u (l'ensemble des $u\circ g$ pour $g : D^2 \to D^2$ un difféomorphisme conforme) contient une application constante. En particulier, cela signifie que $C(\Gamma)$ n'est pas fermé dans $H^1(D^2;\mathcal{N})$.
Une solution est alors de fixer trois points distincts x_1, x_2, x_3 de $\mathbb{S}^1$ et de fixer trois images distinctes p_1, p_2, p_3 dans Γ. On considère alors $C^*(\Gamma)$ l'ensemble des $u \in C(\Gamma)$ vérifiant $\forall i,\ u(x_i) = p_i$. Le lemme de Courant-Hilbert (lemme 4.4 dans [10]) donne que $C^*(\Gamma)$ est fermé dans $H^1(D^2;\mathcal{N})$. L'invariance conforme de $\mathcal{D}$ donne $\inf_{C(\Gamma)} \mathcal{D} = \inf_{C^*(\Gamma)} \mathcal{D}$ et on peut minimiser $\mathcal{D}$ dans $C^*(\Gamma)$. L'existence d'un minimiseur repose donc uniquement sur la condition $C(\Gamma) \neq 0$, qui peut intervenir par exemple sur le tore $\mathbb{T}^3$.

7.2 Surfaces minimales stables

Proposition 7.2.1 :

> Soit $u^t : D^2 \to \mathcal{N}$ une famille d'immersions lisses avec $t \in (-1,1)$, telle que $\partial_t u^t_{|t=0}$ soit orthogonales à $T\Sigma$ (où $\Sigma := u^0(D^2)$) à supports compact. On note $h^t := (u^t)^* g$ et on suppose que la courbure moyenne de Σ

vérifie $H^0 = 0$. On note $v := \partial_t u^t_{|t=0} = \phi n$ avec $n = n^0$ et $\phi \in C_c^\infty(D^2)$. Alors

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}(u^t)_{|t=0} = \int_{D^2} |\nabla\phi|^2 - (|II|^2 + Ric(n,n))\phi^2 d\mathrm{vol}_{h^0}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{A}(u^t) = \int_{D^2}\sqrt{\det(h^t)}$ donc, en omettant l'exposant t,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(u^t) = \frac{1}{2}\int_{D^2} \mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\sqrt{\det(h)}$$

Puis

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2}\left[-\mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{dh}{dt}h^{-1}\frac{dh}{dt}\right) + \mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{d^2h}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{dh}{dt}\right)^2\right]\sqrt{\det(h)}$$

Mais, en notant A la seconde forme fondamentale de Σ, à valeurs dans $T\Sigma^\perp$,

$$\frac{dh_{ij}}{dt}_{|t=0} = g(\nabla_{\partial_t u}\partial_i u^0, \partial_j u^0) + g(\partial_i u^0, \nabla_{\partial_t u}\partial_j u^0) = -2g(A_{ij}, \partial_t u^0)$$

Donc

$$\mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{dh}{dt}h^{-1}\frac{dh}{dt}\right) = h^{ij}\frac{dh_{jk}}{dt}h^{kl}\frac{dh_{li}}{dt} = 4h^{ij}h^{kl}g(A_{il}, \phi n)g(A_{jk}, \phi n) = 4\phi^2|A|^2$$

De plus, $H^0 = 0$ (Σ est minimale) donc $h^{ij}\frac{dh_{ij}}{dt}_{|t=0} = 0$. Il ne reste que le second terme à calculer. Comme $\nabla_{\partial_t u}\partial_i u = \nabla_{\partial_i u}\partial_t u$ (ce sont des coordonnées), la définition du tenseur de Riemann Rm sur $\mathcal{N}$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(h^{-1}\frac{d^2h}{dt^2}\right) &= h^{ij}\partial^2_{tt}g(\partial_i u, \partial_j u) \\
&= h^{ij}(g(\nabla_{\partial_t u}\nabla_{\partial_t u}\partial_i u, \partial_j u) + g(\nabla_{\partial_t u}\partial_i u, \nabla_{\partial_t u}\partial_i u)) \\
&= h^{ij}[g(Rm(\partial_t u, \partial_i u)\partial_t u, \partial_j u) + g(\nabla_{\partial_i u}\nabla_{\partial_t u}\partial_t u, \partial_j u) + g(\nabla_{\partial_t u}\partial_i u, \nabla_{\partial_t u}\partial_i u)] \\
&= h^{ij}[g(Rm(\partial_t u, \partial_i u)\partial_t u, \partial_j u) + g(\nabla_{\partial_t u}\partial_i u, \nabla_{\partial_t u}\partial_i u)] + \mathrm{div}_\Sigma(\nabla_{\partial_t u}\partial_t u)
\end{aligned}$$

En intégrant, comme $\nabla_{\partial_t u}\partial_t u$ est à support compact, le terme en divergence va s'annuler. Le terme de courbure donne, comme $Ric_{ij} = Rm^\alpha_{\alpha ij} = -Rm^\alpha_{i\alpha j}$, $-\phi^2 Ric(n,n)$. Il reste donc le second terme.
Pour $X \in T\mathcal{N}$, on note $X = X^T + X^\perp$ la décomposition $T\mathcal{N} = T\Sigma + (T\Sigma)^\perp$. On calcule

$$\begin{aligned}
h^{ij}g(\partial^2_{ti}u, \partial^2_{tj}u) &= h^{ij}[g(\partial^2_{ti}u^T, \partial^2_{tj}u^T) + g(\partial^2_{ti}u^\perp, \partial^2_{tj}u^\perp)] \\
&= h^{ij}[h^{kl}g(A_{ik}, \partial_t u)g(A_{kl}, \partial_t u) + \partial_i\phi\partial_j\phi] \\
&= \phi^2|II|^2 + |\nabla\phi|^2
\end{aligned}$$

□

Definition 7.2.2 :

Une surface minimale Σ donnée par une immersion $u : D^2 \to \mathcal{N}$ est dite stable si

$$\forall\phi \in C_c^\infty(\Sigma), \qquad \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 d\mathrm{vol}_g \geq \int_\Sigma (|II|^2 + Ric(n,n))\phi^2 d\mathrm{vol}_g$$

On peut chercher à récrire cette condition en faisant intervenir la courbure de Gauss de Σ. Pour une surface $\Sigma \subset \mathcal{N}$, l'équation de Gauss relie la courbure de Gauss K de Σ au tenseur de Riemann Rm de $\mathcal{N}$ par la formule $K = Rm_{1212} + II_{11}II_{22} - II_{12}^2$ (dans un repère orthonormale donné sur Σ). L'hypothèse Σ minimale donne $II_{11} + II_{22} = 0$ et donc $K = Rm_{1212} - \frac{1}{2}|II|^2$. Et la courbure scalaire s'écrit

$$R = Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} = 2Rm_{1212} + Rm_{1313} + Rm_{2323} + Ric_{33} = 2Rm_{1212} + 2Ric_{33}$$

Donc $2Ric_{33} = R - 2K - |II|^2$ et la condition de stabilité se récrit

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Sigma), \quad \int_\Sigma |\nabla \phi|^2 d\mathrm{vol}_g \geq \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}|II|^2 - K + \frac{1}{2}R \right) \phi^2 d\mathrm{vol}_g$$

Dans ce cas, c'est le signe de la courbure scalaire qui compte. En intégrant par partie le membre de gauche et en étudiant l'opérateur $\Delta - \left(\frac{1}{2}|II|^2 - K + \frac{1}{2}R\right)$, on obtient le résultat suivant (théorème 3 de [12]) :

Théorème 7.2.3 :

Soit $\mathcal{N}$ une variété riemannienne complète de dimension 3 de courbure scalaire $R \geq 0$ et Σ une surface minimale stable de $\mathcal{N}$ alors

1. Si Σ est compacte, alors Σ est conformément équivalente à $\mathbb{S}^2$ ou bien est un tore $\mathbb{T}^2$
2. Si Σ est non compacte, alors Σ est conformément équivalente au plan ou à un cylindre

Dans le cas $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$, la seule surface minimale stable non compacte est le plan.

Chapitre 8

Conclusion

La régularité des applications harmoniques s'obtient par l'étude des équations de la forme $\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$, qui est une équation critique en dimension 2. Le point clé pour obtenir cette régularité est l'anti-symétrie de Ω. Celle-ci permet de récrire le système sous la forme $\Delta v = \nabla^{\perp}\xi \cdot \nabla u$ et alors l'inégalité de Wente entre en jeu pour conclure. On remarque que l'hypothèse $\mathcal{N}$ (la variété d'arrivée) compacte n'est utilisée que pour dire que les coefficients de la seconde forme fondamentale sont bornées. Le résultat reste donc vrai lorsque la variété d'arrivée est à géométrie bornée, en particulier lorsque $\mathcal{N} = \mathbb{R}^N$.

Cette régularité est intéressante en particulier pour l'étude du problème de Plateau puisqu'on peut alors utiliser les outils de géométrie différentielle pour étudier ces applications comme des surfaces. On peut se demander ce qu'il se passe en dimension supérieure. Les applications harmoniques ne sont, en général, plus lisses et ne représente plus de notion géométrique (se remarque en particulier car l'énergie de Dirichlet n'est plus invariante conforme). Par exemple, l'application $x \in D^3 \mapsto x/|x| \in \mathbb{S}^2$ est faiblement harmonique mais non continue. Pire encore, dans [13], Rivière donne un exemple d'application harmonique $D^3 \to \mathbb{S}^2$ discontinue presque partout.

Si l'on veut retrouver une notion géométrique, on considère plutôt des applications p-harmoniques qui sont les points critiques de l'énergie $\int |\nabla u|^p$. L'équation devient alors $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |\nabla u|^{p-2}A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0$ et est critique dans le cas où p est la dimension de l'espace de départ. La régularité dans le cas des applications à valeurs dans la sphère est obtenue dans [14] mais dans le cas général, le problème reste ouvert. Dans le cas d'applications conformes, [15] relie le fait d'être p-harmonique à des notions de sous-variété minimales.

Annexe A

Outils d'analyse

A.1 Espaces de Lorentz

Cette section vient de [16], section 1.4.

A.1.1 Réarrangement décroissant

Definition A.1.1 : Réarrangement

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable. On note $d_f(\lambda) = |\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \lambda\}|$. Le réarrangement décroissant de $|f|$ est

$$f^* : \left| \begin{array}{ccc} [0, |\Omega|) & \to & \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \\ s & \mapsto & \inf\{t \geq 0 \mid d_f(t) \leq s\} \end{array} \right.$$

de sorte que f^* est décroissante et vérifie

$$\forall s \geq 0, \quad d_f(s) = d_{f^*}(s)$$

Proposition A.1.2 :

Pour tout f, g, f_n mesurables, $k \in \mathbb{C}$, $t, s, t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, on a

i) $\forall \alpha > 0,\ f^*(d_f(\alpha)) \leq \alpha$ et $d_f(f^*(t)) \leq t$

ii) $f^*(t) > s \Leftrightarrow t < d_f(s)$, i.e. $\{t \geq 0 \mid f^*(t) > s\} = [0, d_f(s))$.

iii) $|f|^* = f^*$, $(kf)^* = |k| f^*$

iv) $|g| \leq |f| \Rightarrow g^* \leq f^*$, $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, $(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) g^*(t_2)$

v) $(|f_n| \uparrow |f|\ p.p.) \Rightarrow (f_n^* \uparrow f^*)$

vi) $(|f| \leq \liminf_n |f_n|\ p.p.) \Rightarrow (f^* \leq \liminf_n f_n^*)$

vii) f^* est continue à droite sur $[0, \infty)$

viii) $(\exists c > 0,\ |\{|f| \geq f^*(t) - c\}|) \Rightarrow |\{|f| \geq f^*(t)\}| \geq t$

ix) $\forall p \in (0, \infty),\ (|f|^p)^* = (f^*)^p$

x) $\forall p \in (0,\infty),\ \int_\Omega |f|^p = \int_0^{|\Omega|} (f^*)^p$

xi) $\|f\|_{L^\infty} = f^*(0)$

xii) $\forall q \in (0,\infty),\ \sup_{t>0} t^q f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^q$

Definition A.1.3 : Espace de Lorentz

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $p, q \in (0, +\infty]$. L'espace de Lorentz $L^{(p,q)}(\Omega;\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que

$$|f|_{(p,q)} := \left[\int_0^{+\infty} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} =_{\text{si } p<\infty} p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left[d_f(s)^{\frac{1}{p}} s\right]^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad \text{si } q < +\infty$$

$$|f|_{(p,\infty)} := \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad \text{si } q = +\infty$$

On pose

$$f^{**}(t) := \sup_{|E|\geq t} \frac{1}{|E|} \int_E |f| = \sup_{|E|\geq t} \frac{1}{|E|} \int_0^{|E|} d_{f\mathbf{1}_E}(s) ds$$

Alors

$$\|f\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} := \begin{cases} \left[\int_0^{+\infty} (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} & \text{si } q < +\infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) & \text{si } q = +\infty \end{cases}$$

définit une norme sur $L^{(p,q)}(\Omega)$ et il existe $C > 0$ telle que $C^{-1}|\cdot|_{(p,q)} \leq \|\cdot\|_{L^{(p,q)}} \leq C|\cdot|_{(p,q)}$.

Remarque : La proposition précédente donne $L^{(p,p)} = L^p$, $||g|^r|_{L^{(p,q)}} = |g|^r_{L^{(pr,qr)}}$, $|f(\alpha\cdot)|_{L^{(p,q)}} = \alpha^{-m/p}|f|_{L^{(p,q)}}$.

Démonstration. On montre les égalités dans l'expression de $|.|_{L^{(p,q)}}$. Le cas $q = \infty$ vient de la proposition précédente.
Si $q < \infty$, on passe par des fonctions étagées : $f = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{E_j}$ avec $a_1 > \cdots > a_N$, alors en notant $B_j = \sum_{i=1}^j |E_i|$ et $a_{N+1} = 0$, on trouve $d_f(\alpha) = \sum_{j=1}^N B_j \mathbf{1}_{[a_{j+1},a_j)}(\alpha)$ et $f^*(t) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{1}_{[B_{j-1},B_j)}(t)$.
Pour le cas général, on prend une suite croissantes de fonctions étagées convergeant vers $|f|$.

On montre $C^{-1}|\cdot|_{(p,q)} \leq \|\cdot\|_{L^{(p,q)}} \leq C|\cdot|_{(p,q)}$.
On fixe $t > 0$. Pour $\alpha > 0$ tel que $f^*(t) > \alpha$, on a

$$f^{**}(t) \geq \frac{1}{d_f(\alpha)} \int_0^\infty d_{f\mathbf{1}_{\{|f|\geq\alpha\}}}(s) ds = \frac{1}{d_f(\alpha)} \int_0^\infty d_f(\max(s,\alpha))\, ds \geq \alpha$$

En prenant le sup sur α, on trouve $f^{**}(t) \geq f^*(t)$.
Maintenant, remarquons que

$$f^{**}(t) \leq \sup_{|E|\geq t} \frac{1}{|E|} \int_0^{|E|} f^*(s) ds = \sup_{|E|\geq t} \frac{1}{|E|} \left(\int_0^t f^*(s) ds + \int_t^{|E|} f^*(s) ds\right)$$

Il suit, $f^{**}(t) \leq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s) ds$. Il suffit de montrer que

$$\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s) ds\right]^q \frac{dt}{t} \leq C \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-1} f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}$$

On examine donc l'opérateur $T : \phi \mapsto (t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \phi)$. On va montrer que $T : L^q(\mathbb{R}_+, t^{\frac{q}{p}-1}dt) \to L^q(\mathbb{R}_+, t^{\frac{q}{p}-1}dt)$ est continu. Par densité, on peut plus simplement considérer $\phi \in C_c(\mathbb{R}_+^*, t^{\frac{q}{p}-1}dt)$ et par linéarité, on peut supposer $\phi \geq 0$.
Alors $T\phi$ est C^1 et $T\phi(t) = \phi(t) - t(T\phi)'(t)$. Par conséquent, si $\epsilon, R > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt &= \int_\epsilon^R T\phi(t)^{q-1}(\phi(t) - tT\phi(t))t^{\frac{q}{p}-1}dt \\ &= \int_\epsilon^R T\phi(t)^{q-1}\phi(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt - \left[\frac{t^{\frac{p}{q}}}{q}T\phi(t)^q\right]_{t=\epsilon}^{t=R} + \frac{1}{p}\int_\epsilon^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt\end{aligned}$$

Or ϕ est à support compact donc $T\phi = 0$ au voisinage de 0. On peut donc passer à la limite $\epsilon \to 0$:

$$\int_0^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt = \int_0^R T\phi(t)^{q-1}\phi(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt - \frac{R^{\frac{p}{q}}}{q}T\phi(R)^q + \frac{1}{p}\int_0^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt$$

Maintenant, comme $\phi \geq 0$, $T\phi \geq 0$ et donc

$$\int_0^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \int_0^R T\phi(t)^{q-1}\phi(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt + \frac{1}{p}\int_0^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt$$

Il suit que

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\int_0^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \int_0^R T\phi(t)^{q-1}\phi(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \left(\int_0^R T\phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^R \phi(t)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

D'où la continuité, avec $\|T\|_{L^q} \leq \frac{p}{p-1}$. □

Proposition A.1.4 :

> Soit $p \in (0, \infty]$ et $0 < q < q' \leq \infty$, il existe $c = c(p, q, r) > 0$ telle que $|.|_{L^{p,q'}} \leq c|.|_{L^{(p,q)}}$.
> Autrement dit, $L^{(p,q)} \subset L^{(p,q')}$.

Démonstration. Si $p < \infty$: A t fixé, si $q' = \infty$,

$$t^{1/p}f^*(t) = \left(\frac{q}{p}\int_0^t \left[s^{1/p}f^*(t)\right]^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{q}{p}\int_0^t \left[s^{1/p}f^*(s)\right]^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}|f|_{L^{(p,q)}}$$

Donc $|f|_{L^{(p,\infty)}} \leq c|f|_{L^{(p,q)}}$. Si $q' < \infty$,

$$|f|_{L^{(p,q')}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^{q'-q+q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq |f|_{L^{(p,\infty)}}^{\frac{q'-q}{q'}}|f|_{L^{(p,q)}}^{\frac{q}{q'}}$$

Si $p = \infty$: idem on commence par $q' = \infty$ et on revient à $q' < \infty$. □

Les espaces de Lorentz sont des espaces de Banach.

A.1.2 Dualité

Théorème A.1.5 : Dualité

Sur tout espace (X, μ) avec μ σ-fini sans atome :

i) Si $0 < p < 1$ et $0 < q \leq \infty$, $(L^{(p,q)})' = \{0\}$

ii) Si $0 < q \leq 1$, $(L^{(1,q)})' = L^\infty$

iii) Si $1 < q < \infty$, $(L^{(1,q)})' = \{0\}$

iv) $L^{(\infty,1)} \subsetneq (L^{(1,\infty)})'$

v) Si $1 < p < \infty$ et $0 < q \leq 1$, $(L^{(p,q)})' = L^{(p',\infty)}$

vi) Si $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$, $(L^{(p,q)})' = L^{(p',q')}$

vii) Si $1 < p < \infty$, $L^{(p',1)} \subsetneq (L^{(p,\infty)})'$: il existe des formes linéaires s'annulant sur les fonctions simples

viii) $(L^{(\infty,\infty)})' = (L^\infty)' = bo$ est l'ensemble des fonctions à variations bornées définies sur les boréliens.

Démonstration. On décompose $X = \bigcup_{N=1}^\infty K_N$ où $(K_N)_N$ est une suite croissante d'ensembles mesurables de mesure finie.
Soit $T \in (L^{(p,q)})'$. On considère la mesure $\sigma : E \mapsto T(\mathbf{1}_E)$, qui vérifie $|\sigma(E)| \leq (p/q)^{1/q}\|T\|\mu(E)^{1/p}$. Donc $\sigma << \mu$ et il existe $g :\to \mathbb{C}$ mesurable vérifiant

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_{K_N} |g| d\mu < \infty, \quad \forall E \text{ mesurable}, \ \mathbb{T}(\mathbf{1}_E) = \int_X g\mathbf{1}_E d\mu$$

Par linéarité et densité des fonctions étagées dans $L^{(p,q)}$ (pour $q < \infty$), on obtient

$$\forall f \in L^{(p,q)}, \quad T(f) = \int_X gf d\mu$$

i) :Supposons $0 < p < 1$. Prenons $f = \sum_n a_n \mathbf{1}_{E_n}$ une fonction étagée sur X. Comme μ ne possède pas d'atome, on peut séparer chaque E_n en une union de $E_{j,n}$ de mesure inférieure à $N^{-1}\mu(E_n)$. Notons $f_j := \sum_n a_n \mathbf{1}_{E_{j,n}}$. Ainsi, $\|f_j\|_{L^{(p,q)}} = N^{-1/p}\|f\|_{L^{(p,q)}}$. Par conséquent,

$$|T(f)| \leq \sum_{j=1}^N |T(f_j)| \leq \|T\| N^{1-1/p} \|f\|_{L^{(p,q)}}$$

Comme $0 < p < 1$, la limite $N \to \infty$ donne $T(f) = 0$.
ii) Passons au cas $p = 1$, $0 < q \leq 1$. Chaque $g \in L^\infty$ définit une forme linéaire continue sur $L^{(1,q)}$:

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \leq C(q)\|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^{(1,q)}}$$

Réciproquement, la fonction g définit précédemment vérifie pour tout $E \subset K_N$ et tout $N \geq 1$, $|\int_E g d\mu| \leq \|T\|\mu(E)$. Donc $|g| \leq \|T\|$ presque partout et $g \in L^\infty$.

iii) Dans le cas $p = 1$, $1 < q < \infty$: supposons par l'absurde que $|g| \geq \delta$ sur un ensemble E_0 avec $\mu(E_0) > 0$. Prenons $h \in L^{(1,q)}$ positive et posons $f := \frac{\bar{g}}{|g|^2} h \mathbf{1}_{E_0}$. Alors

$$\|h\|_{L^1(E_0)} = T(f) \leq \|T\| \|f\|_{L^{(1,q)}} \leq \|T\| \frac{\|h\|_{L^{(1,q)}(E_0)}}{\delta} \leq \frac{C(q, E_0)}{\delta} \|T\| \|h\|_{L^1(E_0)}$$

Ceci étant vrai pour tout h, on obtient $T = 0$.

iv) Dans le cas $p = 1$, $q = \infty$: Cwikel et Sagher, $L(p, \infty)^*$
Pour $f \in L^{(1,\infty)}$, on pose $N_0(f) := \limsup_{t\to 0} t^2 f^{**}(t)$ où On considère des ensembles disjoints $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\mu(E_n) = 2^{-n}$ et on pose $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n \mathbf{1}_{E_n}$.
De sorte que $f^{**} \geq \left(\frac{1}{2x}\right)^{**}$ et $N_0(f) \geq N_0(\frac{1}{2x}) = \frac{1}{2}$.
N_0 définit donc une semi-norme non triviale.

v) Dans le cas $1 < p < \infty$, $0 < q \leq 1$: pour $g \in L^{(p',\infty)}$,

$$\left|\int_X fgd\mu\right| \leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^*(t) t^{\frac{1}{p'}} g^*(t) \frac{dt}{t} \leq \|f\|_{L^{(p,1)}} \|g\|_{L^{(p',\infty)}} \leq C(p,q)\|f\|_{L^{(p,q)}} \|g\|_{L^{(p',\infty)}}$$

Réciproquement, considérant $f := \frac{\bar{g}}{|g|^2}\mathbf{1}_{\{|g|>\alpha\}}$, on trouve

$$\alpha\mu(\{|g| > \alpha\}) = \left|\int_X fgd\mu\right| \leq \|T\|\|f\|_{L^{(p,q)}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|T\|\mu(\{|g| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}$$

Par conséquent, $\|g\|_{L^{(p',\infty)}} \approx \|T\|$.

vi) Cas $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$: on a

$$\left|\int_X fgd\mu\right| \leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^*(t) t^{\frac{1}{p'}} g^*(t) \frac{dt}{t} \leq \|f\|_{L^{(p,q)}} \|g\|_{L^{(p',q')}}$$

Réciproquement, pour tout $f \in L^{(p,q)}$, le fait que μ est sans atomes donne

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \sup_{h, d_h = d_f} \left|\int_X hgd\mu\right| \leq \|T\|\|f\|_{L^{(p,q)}}$$

Considérons f telle que $f^*(t) = \int_{t/2}^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1} \frac{ds}{s}$. Alors

$$\|f\|_{L^{(p,q)}} = \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \left[\int_{t/2}^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1} \frac{ds}{s}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C(p,q) \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\right]^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = C(p,q)\|g\|_{L^{(p',q')}}^{\frac{q'}{q}} < \infty$$

Ainsi,

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt \leq C(p,q)\|T\|\|g\|_{L^{(p',q')}}^{\frac{q'}{q}}$$

D'un autre côté,

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^\infty \int_{t/2}^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1} \frac{ds}{s} g^*(t)dt \geq \int_0^\infty g^*(t)^{q'} \int_{t/2}^t s^{\frac{q'}{p'}-1} \frac{ds}{s} dt = C(p,q)\|g\|_{L^{(p',q')}}^{q'}$$

Par conséquent, $\|g\|_{L^{(p',q')}} \leq C(p,q)\|T\|$ sous la condition $\|g\|_{L^{(p',q')}} < \infty$. Mais il suffit de remplacer g par $g\mathbf{1}_{K_N}$, on trouve $\|g\|_{L^{(p',q')}(K_N)} \leq C(p,q)\|T\|$ et on passe à la limite $N \to \infty$.

vii) : M. Cwikel, The dual of weak L p
Montrons d'abord

Lemme A.1.6 :

Si $g : X \to \mathbb{R}$ et $K \geq 0$ est mesurable vérifiant pour tout fonction simple f, $|\int_X fgd\mu| \leq K\|f\|_{L^{(p,\infty)}}$, alors $g \in L^{(p',1)}$.

Démonstration. Si E est un ensemble de mesure supérieure à t,

$$\int_E |g|d\mu = \int_X \mathbf{1}_E \mathrm{sgn}(g) g d\mu \leq K\|\mathrm{sgn}(g)\mathbf{1}_E\|_{L^{(p,\infty)}} = K\mu(E)^{1/p}$$

Et il suit que $t^{1/p'} g^{**}(t) \leq K$ donc $g \in L^{(p',\infty)}$.
On appelle famille monotone continue (CMF) sur X une famille $(A_t)_{0\leq t\leq \mu(X)}$ d'ensembles mesurables vérifiant $A_0 = \emptyset$, $A_{\mu(X)} = X$, si $t < s$ alors $A_t \subset A_s$ et $\forall t,\ \mu(A_t) = t$.
On dit qu'une CMF $(A_t)_t$ support une fonction mesurable positive h si

$$\forall t \in (0, \mu(X)), \quad \|h\|_{L^\infty(X\setminus A_t)} \leq \operatorname*{ess\,inf}_{A_t} h$$

En particulier, comme X est non atomique, pour tout $\lambda \geq 0$, il existe une CMF sur $E_\lambda := \{|g| = \lambda\}$, que l'on note $(B_\theta^\lambda)_{0\leq\theta\leq\mu(E_\lambda)}$. Alors les ensembles

$$A_t := \{|g| > g^*(t)\} \cup B^{g^*(t)}_{t-d_g(g^*(t))}$$

forment une CMF supportant $|g|$.
Posons $s := \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k/p}\mathbf{1}_{A_{2^{k+1}}\setminus A_{2^k}}$. Alors $s^* = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k/p}\mathbf{1}_{[2^k,2^{k+1})}$ et on obtient que $\forall t,\ t^{-1/p} \leq s^*(t) \leq 2^{1/p}t^{-1/p}$.
De plus, $(A_t)_t$ supporte à la fois s et $s|g|$. Ainsi,

$$\|g\|_{L^{(p',1)}} \leq C\int_0^\infty t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\frac{dt}{t} = C\int_0^\infty t^{-\frac{1}{p}} g^*(t)dt \leq C\int_0^\infty s^*(t)g^*(t)dt \leq C\int_0^\infty \operatorname*{ess\,inf}_{A_t}(s|g|)dt$$

Montrons que $\operatorname{ess\,inf}_{A_t}(s|g|) = (s|g|)^*(t)$ presque partout. Posons $h = s|g|$.
Comme $(A_t)_t$ est croissante, $t \mapsto \operatorname{ess\,inf}_{A_t} h$ est continue à gauche. De plus,

$$\forall t \in [0, \mu(X)], \quad \operatorname*{ess\,inf}_{A_t} h = \sup_{\mu(E)\geq t} \operatorname*{ess\,inf}_E h$$

En effet, si $\mu(E) \geq t$, alors $\operatorname{ess\,inf}_E h = \min\left(\operatorname{ess\,inf}_{A_t\cap E} h, \operatorname{ess\,inf}_{E\setminus A_t} h\right)$. Or si $\mu(A_t \setminus E) > 0$ et $\mu(E \setminus A_t) > 0$:

$$\operatorname*{ess\,inf}_{E\setminus A_t} h \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X\setminus A_t} h \leq \operatorname*{ess\,inf}_{A_t} h \leq \operatorname*{ess\,inf}_{A_t\setminus E} h$$

Donc $\operatorname{ess\,inf}_E h \leq \operatorname{ess\,inf}_{A_t} h$.
Si $\mu(A_t \setminus E) = 0$ alors $A_t \subset E$ pp car $\mu(A_t) = t \leq \mu(E)$. Idem si $\mu(E \setminus A_t) = 0$. Dans tous les cas, on conserve $\operatorname{ess\,inf}_E h \leq \operatorname{ess\,inf}_{A_t} h$ et on obtient l'identité voulue.
De sorte que

$$|\{t \mid \operatorname*{ess\,inf}_{A_t} h > \alpha\}| = \sup\{t \mid \operatorname*{ess\,inf}_{A_t} h > \alpha\} = \sup\{\mu(E) \mid \operatorname*{ess\,inf}_E h > \alpha\} = \mu(\{h > \alpha\})$$

Donc $t \mapsto \operatorname{ess\,inf}_{A_t} h$ et h^* sont décroissante, de même fonction de répartition. Donc elles sont égales presque partout.
Par conséquent,

$$\|g\|_{L^{(p',1)}} \leq C|sg|_{L^{(1,1)}} \leq C'\int_X |sg| \leq C'K \limsup_{N\to\infty} \left\|\mathrm{sgn}(g)\sum_{k=-N}^{N} 2^{-k/p}\mathbf{1}_{A_{2^{k+1}}\setminus A_{2^k}}\right\|_{L^{(p,\infty)}} < \infty$$

□

On considère N_0 et N_∞ les semi-normes sur $L^{(p,\infty)}$ données par

$$N_0(f) := \limsup_{t\to 0} t^{1/p} f^{**}(t) \quad \text{et} \quad N_\infty(f) := \limsup_{t\to\infty} t^{1/p} f^{**}(t)$$

On note $S_0 \subset (L^{(p,\infty)})'$ l'ensemble des formes linéaires continues pour N_0 et $S_\infty \subset (L^{(p,\infty)})'$ l'ensemble des formes linéaires continues pour N_∞. Montrons que $(L^{(p,\infty)})' = L^{(p',1)} \oplus S_0 \oplus S_\infty$.
Soit $l \in (L^{(p,\infty)})'$ et pour tout ensemble mesurable F, $\nu(F) := l(\mathbf{1}_F)$. Alors ν est σ-additive et absolument continue par rapport à μ. Donc ν possède une dérivée de Radon-Nikodym g et donc pour tout fonction simple f, $l(f) = \int_X fg d\mu$.
Par ce qui précède, $g \in L^{(p',1)}$ et l'inégalité de Hölder donne que $f \mapsto \int_X fg d\mu$ est continue sur $L^{(p,\infty)}$. Ceci montre que $(L^{(p,\infty)})' = L^{(p',1)} \oplus S$ où S est l'ensemble des formes linéaires continues qui s'annulent sur la fermeture de l'ensemble des fonctions simples.
On veut montrer que $S = S_0 \oplus S_\infty$. Pour $l \in S$, prenons $\alpha > 0$ et posons

$$\forall f \in L^{(p,\infty)}, \quad l_0(f) := l(f\mathbf{1}_{\{|f|>\alpha\}}) \quad \text{et} \quad l_\infty(f) := l(f\mathbf{1}_{\{|f|\le\alpha\}})$$

De sorte que $l = l_0 + l_\infty$. De plus, on remarque que es définitions sont indépendantes de α car $l \in S$ donc pour tout $\alpha, \beta > 0$ et $f, g \in L^{(p,\infty)}$, les fonctions

$$f\mathbf{1}_{\{|f|>\alpha\}} - f\mathbf{1}_{\{|f|>\beta\}}$$
$$f\mathbf{1}_{\{|f|\le\alpha\}} - f\mathbf{1}_{\{|f|\le\beta\}}$$

sont annulées par l. Ainsi $l_0(f) = \lim_{\alpha\to\infty} l(f\mathbf{1}_{\{|f|>\alpha\}})$ et $l_\infty(f) = \lim_{\alpha\to 0} l(f\mathbf{1}_{\{|f|\le\alpha\}})$.
Sous cette forme, on voit que pour tout $\epsilon > 0$, $l_0(f) \le \|l\|_{(L^{(p,\infty)})'} \sup_{0<t<\epsilon} t^{1/p} f^{**}(t)$ et donc $l_0 \in S_0$.
Pour voir que $l_\infty \in S_\infty$, on remarque que pour tout $f \in L^{(p,\infty)}$, en posant $f_\alpha = f\mathbf{1}_{\{|f|\le\alpha\}} + \alpha\mathbf{1}_{\{|f|>\alpha\}}$, on a $l_\infty(f) = l_\infty(f_\alpha)$ avec $\sup_{t>0} t^{1/p} f_\alpha^{**}(t) \le \sup_{t\ge f_\alpha(\alpha)} t^{1/p} f^{**}(t)$.

viii) : Akilov/Kantorovich : Functional analysis, chapitre 6, section 2, théorème 2
Soit $\phi \in bo(X,\mu)$. On cherche à définir l'intégrale par rapport à ϕ de la manière suivante : si $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction simple de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$ avec les A_i mesurables, on pose $\int_X f(x)d\phi(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(A_i)$. Alors $|\int f\phi| \le \|f\|_{L^\infty}\|\phi\|_{TV}$ de sorte que l'on puisse étendre l'intégrale par rapport à ϕ sur tout L^∞ et on obtient une forme linéaire continue L sur L^∞ vérifiant $\|L\|_{(L^\infty)'} \le \|\phi\|_{TV}$. Montrons l'inégalité inverse.
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe des ensembles mesurables $(A_i)_{1\le i\le n}$ deux à deux disjoints tels que $\bigcup_i A_i = X$ et

$$\|\phi\|_{TV} \le \sum_{i=1}^n |\phi(A_i)| + \epsilon$$

Considérons $f := \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(\phi(A_i))\mathbf{1}_{A_i}$. Alors $\|f\|_{L^\infty} \le 1$ et $\int_X f d\phi = \sum_{i=1}^n |\phi(A_i)|$ de sorte que

$$\|\phi\|_{TV} \le \int_X f d\phi + \epsilon \le \|L\|_{(L^\infty)'} + \epsilon$$

Ainsi, $\|L\|_{(L^\infty)'} = \|\phi\|_{TV}$.
Réciproquement, considérons $L \in (L^\infty)'$. En posant $\phi(A) := L(\mathbf{1}_A)$ pour tout ensemble mesurable A, on obtient une fonction ϕ vérifiant $\forall A,\ \mu(A) = 0 \Rightarrow \phi(A) = 0$ et $\|\phi\|_{TV} \le \|L\|_{(L^\infty)'}$. Par construction de l'intégrale par rapport à ϕ, on a $\forall f \in L^\infty,\ L(f) = \int_X f d\phi$ et le résultat suit. □

A.1.3 Interpolation

Lemme A.1.7 :

> Soit $p \in (0,\infty)$ et $q \in (0,\infty]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, $T : L^{(p,1)}(\Omega) \to L^{(q,\infty)}(U)$ un opérateur quasilinéaire continu :
>
> $$|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|, \quad |T(f+g)| \le K(|T(g)| + |T(g)|), \quad \forall A \subset \Omega, \quad \|T(\mathbf{1}_A)\|_{L^{(q,\infty)}} \le L|A|^{\frac{1}{p}}$$

Fixons $\alpha_0 \in \left(0, \min(\frac{\log(2)}{\log(2K)}, q)\right)$. Alors pour tout $\alpha \in (0, \alpha_0]$, il existe $C = C(p, q, K, \alpha) > 0$ telle que

$$\forall f \in L^{(p,\alpha)}(\Omega), \quad \|T(f)\|_{L^{(q,\infty)}} \leq CL\|f\|_{L^{(p,\alpha)}}$$

Démonstration. Par quasilinéarité, il suffit de montrer le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Posons $\alpha_1 = \frac{\log 2}{\log(2K)}$ de sorte que $(2K)^{\alpha_1} = 2$ et $\alpha \leq \alpha_1$, donc

$$\forall f_1, \cdots, f_m, \quad |T(f_1 + \cdots + f_m)| \leq 4 \left(\sum_{j=1}^{m} |T(f_j)|^{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leq 4 \left(\sum_{j=1}^{m} |T(f_j)|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Montrons que pour tout $f \geq 0$,

$$\|T(f\mathbf{1}_A)\|_{L^{(q,\infty)}} \leq C(q, \alpha)L|A|^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^\infty}$$

Quitte à multiplier par une constante, on peut supposer $f \leq 1$. On note alors $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j(x)2^{-j}$ la décomposition de $f(x)$ en binaire, avec $d_j(x) \in \{0, 1\}$. On pose $B_J := \{x \in A \mid d_j(x) = 1\}$ et on obtient $f\mathbf{1}_A = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\mathbf{1}_{B_j}$. Il suit

$$\begin{aligned}
\|T(f\mathbf{1}_A)\|_{L^{(q,\infty)}} &\leq 4 \left\| \left(\sum_{j=1}^{m} 2^{-j\alpha}|T(\mathbf{1}_{B_j})|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\|_{L^{(q,\infty)}} \\
&\leq 4 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha}|T(\mathbf{1}_{B_j})|^{\alpha} \right\|_{L^{(\frac{q}{\alpha},\infty)}}^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq 4 \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha}\|T(\mathbf{1}_{B_j})\|_{L^{(q,\infty)}}^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq 4L \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha}|B_j|^{\alpha/p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq 2L\frac{|A|^{1/p}}{(1 - 2^{\alpha})^{1/\alpha}}
\end{aligned}$$

Et on obtient le résultat avec $C(q, \alpha) = \frac{2}{(1-2^{\alpha})^{1/\alpha}}$. Maintenant, on considère une fonction $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\mathbf{1}_{A_n}$ où $A_n := \{f^*(2^{n+1}) < |f| \leq f^*(2^n)\}$. Observons que

$$|A_n| = |\{f^*(2^{n+1}) < f^* \leq f^*(2^n)\}| = |[2^n, 2^{n+1}]| = 2^n$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^{(q,\infty)}} &\leq 4\left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|T(f\mathbf{1}_{A_n})|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\|_{L^{(q,\infty)}} \\
&\leq 4\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|T(f\mathbf{1}_{A_n})\|^\alpha_{L^{(q,\infty)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq \frac{8L}{(1-2^\alpha)^{1/\alpha}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}f^*(2^n)^\alpha 2^{n\alpha/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq \frac{8L}{(1-2^\alpha)^{1/\alpha}}(\log 2)^{1/\alpha}\|f\|_{L^{(p,\alpha)}}
\end{aligned}$$

Lorsque f n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on sépare en $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ avec $f_j \geq 0$ pour tout j. On obtient le lemme avec

$$C(p,q,K,\alpha) = C(p)K^2\left(\frac{\log(2)}{1-2^\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

□

Théorème A.1.8 :

Soit $r \in (0,\infty]$, $p_0 \neq p_1 \in (0,\infty]$ et $q_0 \neq q_1 \in (0,\infty]$. Soit T un opérateur quasilinéaire défini sur $L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega)$ à valeurs dans les fonctions définies sur U. On suppose qu'il existe $M_0, M_1 > 0$ telles que

$$\forall A \text{ mesurable}, \quad \|T(\mathbf{1}_A)\|_{L^{(q_0,\infty)}(U)} \leq M_0|A|^{1/p_0}, \quad \|T(\mathbf{1}_A)\|_{L^{(q_1,\infty)}(U)} \leq M_1|A|^{1/p_1}$$

Soit $\theta \in (0,1)$ et posons

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Alors il existe $M = M(K, p_0, p_1, q_0, q_1, M_0, M_1, r, \theta) > 0$ telle que

$$\forall f \in L^{(p,r)}(\Omega), \quad \|T(f)\|_{L^{(q,r)}(U)} \leq M\|f\|_{L^{(p,r)}(\Omega)}$$

Démonstration. On peut supposer $p_0 < p_1$.
Considérons d'abord $p_1 < \infty$. Le lemme précédent donne l'existence de $A_1, A_2 > 0$ tels que si $m = \frac{1}{2}\min(q_0, q_1, \frac{\log 2}{\log(2K)})$,

$$\|T(f)\|_{L^{(q_0,\infty)}} \leq A_0\|f\|_{L^{(p_0,m)}}, \quad \|T(f)\|_{L^{(q_1,\infty)}} \leq A_0\|f\|_{L^{(p_1,m)}}$$

Notons

$$\gamma = \frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}$$

Pour $t > 0$ et $f \in L^{(p,r)}(\Omega)$, on note

$$f^t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > f^*(t^\gamma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq f^*(t^\gamma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on obtient la séparation $f = f^t + f_t$. Observons alors que

$$(f^t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s) & \text{si } 0 < s < t^\gamma \\ 0 & \text{si } s \geq t^\gamma \end{cases} \quad , \quad (f_t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(t^\gamma) & \text{si } 0 < s < t^\gamma \\ f^*(s) & \text{si } s \geq t^\gamma \end{cases}$$

Par conséquent, $f^t \in L^{(p_0,m)}(\Omega)$ et $f_t \in L^{(p_1,m)}(\Omega)$ pour tout $t > 0$. Ainsi pour $r < \infty$,

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^{(q,r)}} &= \|t^{\frac{1}{q}} T(f)^*(t)\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \\
&\leq K\|t^{\frac{1}{q}} \left(|T(f_t)| + |T(f^t)|\right)^*(t)\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \\
&\leq K\|t^{\frac{1}{q}} T(f_t)^*(\frac{t}{2}) + t^{\frac{1}{q}} T(f^t)^*(\frac{t}{2})\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \\
&\leq K \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \left(\|t^{\frac{1}{q}} T(f_t)^*(\frac{t}{2})\|_{L^r(\frac{dt}{t})} + \|t^{\frac{1}{q}} T(f^t)^*(\frac{t}{2})\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \right) \\
&\leq K \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \left(2^{\frac{1}{q_0}} A_0 \left\| t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}} \|f^t\|_{L^{(p_0,m)}} \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} + 2^{\frac{1}{q_1}} A_1 \left\| t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \|f^t\|_{L^{(p_1,m)}} \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \right) \\
&\leq K \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \left(2^{\frac{1}{q_0}} A_0 \left\| t^{\gamma(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})} \|f^t\|_{L^{(p_0,m)}} \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} + 2^{\frac{1}{q_1}} A_1 \left\| t^{\gamma(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})} \|f^t\|_{L^{(p_1,m)}} \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \right) \\
&\leq K \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \left(\frac{2^{\frac{1}{q_0}} A_0}{|\gamma|^{1/r}} \left\| u^{-(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})} \left(\int_0^u f^*(s)^m s^{\frac{m}{p_0}-1} ds \right)^{\frac{1}{m}} \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2^{\frac{1}{q_1}} A_1}{|\gamma|^{1/r}} \left\| u^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})} \left(\int_0^u f^*(u)^m s^{\frac{m}{p_1}-1} ds + \int_u^\infty f^*(s)^m s^{\frac{m}{p_1}-1} ds \right)^{\frac{1}{m}} \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \right) \\
&\leq K \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \left(\frac{2^{\frac{1}{q_0}} A_0}{m|\gamma|^{1/r}} \frac{r}{r(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})} \left(\int_0^\infty \left[s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \right]^r s^{-r(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
&\quad \left. + \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \frac{2^{\frac{1}{q_1}+\frac{1-m}{m}} A_1}{m|\gamma|^{1/r}} \left[\frac{p_1}{m} \|f\|_{L^{(p,r)}} + \frac{r}{r(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})} \left\| u^{r(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})} f^*(u)^r u^{\frac{r}{p_1}} \right\|_{L^r(\frac{du}{u})} \right] \right) \\
&\leq K \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \left(\frac{2^{\frac{1}{q_0}} A_0}{m|\gamma|^{1/r}} \frac{1}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{(p,r)}} + \max(2^{\frac{1-r}{r}}, 1) \frac{2^{\frac{1}{q_1}+\frac{1-m}{m}} A_1}{m|\gamma|^{1/r}} \left[\frac{1}{p_1} + \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \right] \|f\|_{L^{(p,r)}} \right)
\end{aligned}$$

Pour $r = \infty$, il suffit de passer à la limite.
Pour le cas $p_1 = \infty$, les hypothèses donnent que pour tout A mesurable et tout $\theta \in (0,1)$,

$$\|T(\mathbf{1}_A)\|_{L^{(q,\infty)}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta |A|^{1/p}$$

Fixons $\lambda \in (0,1)$ et posons

$$\frac{1}{p_\lambda} := \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\lambda} := \frac{1-\lambda}{q_0} + \frac{\lambda}{q_1}$$

On applique alors l'interpolation entre (p_0, q_0) et (p_λ, q_λ) et le résultat suit. □

Théorème A.1.9 : Interpolation

Sot $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts. Soit $1 \leq r_0 < r_1 \leq \infty$ et $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$ et T un opérateur linéaire continu dont le domaine contient $\bigcup_{r_0 \leq r \leq r_1} L^r(\Omega)$ et tel que $T : L^{r_0}(\Omega) \to L^{p_0}(U)$ et $T : L^{r_1}(\Omega) \to L^{p_1}(U)$ soient continues.
Alors pour tout $\theta \in [0,1]$ si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$$

Alors pour tout $q \in [1,\infty]$, $T : L^{(r,q)}(\Omega) \to L^{(p,q)}(U)$ est continu et

$$\|T\|_{L^{(r,q)}(\Omega)\to L^{(p,q)}(U)} \leq \left(\frac{r}{|\gamma|p}\right)^{\frac{1}{q}} 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{r}{r-r_0}\|T\|_{L^{r_0}(\Omega)\to L^{p_0}(U)} + \frac{r_1}{r_1-r}\|T\|_{L^{r_1}(\Omega)\to L^{p_1}(U)}\right)$$

où

$$\gamma = \frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}}$$

Démonstration. Théorème précédent. □

A propos d'applications harmoniques : (tiré de [5])
La fonction de Green d'une boule $B_R \subset \mathbb{R}^n$:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)|\mathbb{S}^{n-1}|}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right) & \text{si } n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\log|x-y| - \log\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|\right) & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

vérifie pour tout $x \in B_R$:

$$\begin{cases} \Delta_y G(x,y) = 0 & \text{pour } y \in B_R \setminus \{x\} \\ G(x,y) = 0 & \text{pour } y \in \partial B_R \end{cases}$$

et pour tout $u \in C^2(B_R)$,

$$\forall x \in B_R, \quad u(x) = \int_{B_R} G(x,y)\Delta u(y)dy + \int_{\partial B_R} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)dy$$

Théorème A.1.10 :

Soit $u : B_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonique. Alors

$$\forall 0 < r < R < 2,\ \forall p \in [1,\infty],\ \exists C = C(r,R,p) > 0, \qquad \|\nabla u\|_{L^p(B_r)} \leq C\|\nabla u\|_{L^{(2,\infty)}(B_R)}$$

Démonstration. Soit $0 < r < R_1 < R < R_2 < 2$. On applique la formule de Green : il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall x \in B_r, \quad u(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R} \partial_\nu \left(\log|x-y| - \log\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|\right) u(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R} \left\langle \frac{y}{R}, \frac{y-x}{|y-x|^2} - \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|^{-2} \frac{|x|}{R}\left(\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right)\right\rangle u(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R} \left\langle \frac{y}{R}, \frac{y-x}{|y-x|^2} + \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|^{-2} \left(\frac{|x|^2}{R^2}y - x\right)\right\rangle u(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R} \left[\frac{\langle y, y-x\rangle}{|y-x|^2} + \frac{\langle x-y, x\rangle}{\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|^2}\right] u(y)dy \end{aligned}$$

De plus, un calcul donne

$$\nabla_x \left(\frac{1}{2} \left| \frac{R}{|x|} x - \frac{|x|}{R} y \right|^2 \right) = - \left| \frac{R}{|x|} x - \frac{|x|}{R} y \right|^2 \frac{x}{|x|^2} + \left(\frac{R}{|x|} \right)^2 x - y - 2 \left\langle y, x - \left(\frac{|x|}{R} \right)^2 y \right\rangle \frac{x}{|x|^2}$$

dont la norme est contrôlée par $\frac{1}{|x|}$ et pour $|y| = R$ et $|x| \leq r$, on a $\left| \frac{R}{|x|} x - \frac{|x|}{R} y \right| \geq R - r$.
Par conséquent, il existe $c = c(r, R_1, R_2) > 0$ telle que

$$\forall x \in B_r, \quad |\nabla u(x)| \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{\partial B_R} |u|$$

Or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $v := u - \lambda$ est également harmonique et on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall R \in (R_1, R_2),\ \forall x \in B_r, \quad |\nabla u(x)| \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{\partial B_R} |u(y) - \lambda| dy$$

Donc si l'on intègre pour $R \in [R_1, R_2]$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in B_r, \quad |\nabla u(x)| \leq c(r, R_1, R_2) \int_{R_1}^{R_2} \int_{\partial B_R} |u(y) - \lambda| dy dR = c \int_{B_{R_2} \setminus B_{R_1}} |u(y) - \lambda| dy$$

Maintenant, en prenant pour λ la moyenne de u sur $B_{R_2} \setminus B_{R_1}$, l'inégalité de Poincaré donne

$$\forall x \in B_r, \quad |\nabla u(x)| \leq c(r, R_1, R_2) \|\nabla u\|_{L^1(B_{R_2} \setminus B_{R_1})} \leq c \|\nabla u\|_{L^1(B_{R_2})} \leq c \|\nabla u\|_{L^{(2,\infty)}(B_{R_2})} \|1\|_{L^{(2,1)}(B_{R_2})}$$

□

A.2 Espace BMO

Cette section vient de [17], chapitre 3.

A.2.1 Moyennes locales

Definition A.2.1 : Espaces BMO et VMO

Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$, on note

$$\forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall r > 0, \quad f_{x,r} = f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f$$

On pose

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^m)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^m, r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{x,r}| dy$$

et $BMO(\mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des f telle que $\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^m)} < +\infty$. $BMO(\mathbb{R}^m)/\mathbb{R}$ est un espace de Banach.
On pose

$$VMO(\mathbb{R}^m) := \left\{ f \in BMO(\mathbb{R}^m) \mid \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{x,r}| dy \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0 \right\}$$

Proposition A.2.2 :

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

(i) Supposons qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout cube Q de $\mathbb{R}^m$, il existe $c_Q \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - c_Q|dx \leq A$$

Alors $f \in BMO(\mathbb{R}^m)$ et $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.

(ii)

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \inf_{c_Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - c_Q|dx \leq \|f\|_{BMO}$$

(iii) Si $h \in \mathbb{R}^m$, alors $\|f(. - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$

(iv) Si $\lambda > 0$ alors $\|f(\lambda\cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$.

(v) Si $f, g \in BMO(\mathbb{R}^m)$ alors

$$\||f|\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{BMO}, \quad \|\max(f,g)\|_{BMO}, \|\min(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{3}{2}(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO})$$

(vi) $\|.\|_{BMO}$ est équivalent à

$$\|f\|_{BMO_b} := \sup_{B \text{ boule}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|dx$$

la constante dépend de la dimension.

Démonstration. (i) : Il suffit de voir que pour tout cube Q et presque tout $x \in Q$,

$$|f(x) - f_Q| \leq |f(x) - c_Q| + |f_Q - c_Q| \leq |f(x) - c_Q| + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - c_Q|dy$$

On prend la moyenne et on obtient $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.
(ii) : L'inégalité de gauche suit directement de (i). Celle de droite vient du choix $c_Q = f_Q$.
(v) : Pour la première inégalité, si $x \in Q$, $|f(x)| \leq |f(x) - f_Q| + |f_Q|$ donc en intégrant,

$$|f|_Q \leq |f - f_Q|_Q + |f_Q| \leq |f - f_Q|_Q + |f_Q - f(x)| + |f(x)|$$

Ainsi,

$$\left| |f(x)| - \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy \right| \leq |f(x) - f_Q| + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|dy$$

D'où le résultat. Pour le min et le max, on utilise que $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ et $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$.
(vi) : Etant donné un cube Q, on considère la plus petite boule B qui contient Q. Alors $|B|/|Q| = 2^{-m}\sqrt[m]{m}\nu_m$ où ν_m est le volume de la boule unité. Donc

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_B|dx \leq \frac{|B|}{|Q|}\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|dx \leq \frac{\nu_m \sqrt[m]{m}}{2^m}\|f\|_{BMO_b}$$

Donc (i) donne $\|f\|_{BMO} \leq 2^{1-m}\nu_m \sqrt[m]{m}\|f\|_{BMO_b}$. On fait de même pour l'autre sens, étant donné une boule, on considère le plus petit cube contenant cette boule et on utilise (i) pour l'espace BMO_b. □

A.2.2 Inégalité de John-Nirenberg

Lemme A.2.3 :

Notons Q_0 le cube unité. Soit $f \in L^1(Q_0)$ positive et $\alpha > |Q_0|^{-1} \int_{Q_0} f$.
Il existe une famille de cubes diadiques disjoints $(Q_j)_j$ telle que $f \leq \alpha$ presque partout sur $Q_0 \setminus \bigcup_j Q_j$ et $\alpha \leq |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} f \leq 2^n \alpha$.

Démonstration. Coupons Q_0 en 2^n cube diadiques et conservons un cube Q si $\alpha \leq |Q|^{-1} \int_Q f$.
Pour les autres, on continue de couper et on garde les cubes vérifiant $\alpha \leq |Q|^{-1} \int_Q f$. On note $(Q_j)_j$ les cubes gardés pendant ce processus.
Il ne reste qu'à vérifier la première propriété. Si Q est un prédécesseur de Q_j (un cube contenant Q_j de côté deux fois plus grand). Par construction, on a $\alpha > |Q|^{-1} \int_Q f$. Notons $F = Q_0 \setminus \bigcup_j Q_j$.
Pour tout $x \in F$, étant donné la manière dont on a construit $(Q_j)_j$, il existe une suite de cubes $(Q^i)_i$ contenant x vérifiant

$$\forall i, \ \frac{1}{|Q^i|} \int_{Q^i} f < \alpha, \quad \text{et} \quad \operatorname{diam}(Q^i) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

Le théorème de Lebesgue donne $f \leq \alpha$ presque partout sur F. □

Théorème A.2.4 : Inégalité de John-Nirenberg

Soit $u \in L^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall B(x,r) \subset \Omega, \quad \int_{B(x,r)} |u - u_{x,r}| \leq M r^n$$

Alors il existe $p_0 = p_0(n)$ et $C = C(n)$ tels que

$$|\{x \in Q \mid |u(x) - u_Q| > t\}| \leq |Q| e^{1 - \frac{p_0}{M} t}$$

En particulier,

$$\forall B(x,r) \subset \Omega, \quad \int_{B(x,r)} e^{\frac{p_0}{M} |u - u_{x,r}|} \leq C r^n$$

Démonstration. Supposons $\Omega = Q_0$. L'hypothèse se réécrit

$$\forall Q \subset Q_0, \quad \int_Q |u - u_Q| \leq M |Q|$$

Quitte à diviser u par M, on peut supposer $M = 1$. Prenons $\alpha > 1 \geq |Q_0|^{-1} \int_{Q_0} |u - u_{Q_0}|$. Appliquons le lemme précédent à $f = |u - u_{Q_0}|$: il existe une suite de cubes disjoints $(Q_j^{(1)})_{j \geq 1}$ telle que

$$\alpha \leq \frac{1}{|Q_j^{(1)}|} \int_{Q_j^{(1)}} |u - u_{Q_0}| < 2^n \alpha, \qquad |u(x) - u_{Q_0}| \leq \alpha, \text{ pour presque tout } x \in Q_0 \setminus \bigcup_{j \geq 1} Q_j^{(1)}$$

En particulier,

$$\sum_j |Q_j^{(1)}| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{Q_0} |u - u_{Q_0}| \leq \frac{|Q_0|}{\alpha}$$

$$\forall j, \ |u_{Q_j^{(1)}} - u_{Q_0}| \leq \frac{1}{|Q_j^{(1)}|} \int_{Q_j^{(1)}} |u - u_{Q_0}| \leq 2^n \alpha$$

Par définition de $\|.\|_{BMO}$:

$$\forall j,\ \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}} |u-u_{Q_j^{(1)}}| \leq 1 < \alpha$$

On applique le lemme précédent à $f = |u - u_{Q_j^{(1)}}|$ dans $Q_j^{(1)}$: il existe $(Q_j^{(2)})_{j\geq 1}$ une suite de cubes disjoints dans $\bigcup_{j\geq 1} Q_j^{(1)}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^{(2)}| \leq \frac{1}{\alpha}\sum_j \int_{Q_j^{(1)}} |u-u_{Q_j^{(1)}}| \leq \frac{1}{\alpha}\sum_j |Q_j^{(1)}| \leq \frac{|Q_0|}{\alpha^2}$$

et $|u(x) - u_{Q_j^{(1)}}| \leq \alpha$ pour presque tout $x \in Q_j^{(1)} \setminus \bigcup_j Q_j^{(2)}$, ce qui implique $|u(x) - u_{Q_0}| \leq 2\cdot 2^n\alpha$ pour presque tout $x \in Q_0 \setminus \bigcup_j Q_j^{(2)}$.

Continuons ce processus : pour tout $k \geq 1$, il existe une suite de cubes disjoints $(Q_j^{(k)})_j$ telle que

$$\sum_j |Q_j^{(k)}| \leq \frac{|Q_0|}{\alpha^k}, \quad \text{et} \quad |u(x) - u_{Q_0}| \leq k2^n\alpha \ \text{ pour presque tout } x \in Q_0 \setminus \bigcup_j Q_j^{(k)}$$

Donc

$$|\{x \in Q_0 \mid |u(x) - u_{Q_0}| > 2^n k\alpha\}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^{(k)}| \leq \frac{|Q_0|}{\alpha^k}$$

Pour tout $t > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $t \in [2^n k\alpha, 2^n(k+1)\alpha)$. Pour ce k,

$$\alpha^{-k} = \alpha e^{-(k+1)\log\alpha} \leq \alpha e^{-\frac{\log\alpha}{2^n\alpha}t}$$

Par conséquent

$$|\{x \in Q_0 \mid |u(x) - u_{Q_0}| > t\}| \leq |Q_0|\alpha e^{-\frac{\log\alpha}{2^n\alpha}t}$$

Donc pour tout cube Q,

$$|\{x \in Q \mid |u(x) - u_Q| > t\}| \leq |Q|\alpha e^{-\frac{\log\alpha}{2^n\alpha}t}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_Q e^{\frac{\log\alpha}{2^{n+1}\alpha}|u(x)-u_Q|}dx &= \int_Q\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{|u-u_Q|>t\}}}{\frac{\log\alpha}{2^{n+1}\alpha}} e^{\frac{\log\alpha}{2^{n+1}n\alpha}t}\ dtdx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{|\{|u-u_Q|>t\}|}{\frac{\log\alpha}{2^{n+1}\alpha}} e^{\frac{\log\alpha}{2^{n+1}\alpha}t}dt \\
&\leq |Q|\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\frac{\log\alpha}{2^{n+1}\alpha}} e^{-\frac{\log\alpha}{2^{n+1}\alpha}t}dt
\end{aligned}$$

□

Corollary A.2.5 :

Pour tout $p \in (0,\infty)$, il existe $B = B(p,m)$ tel que

$$\forall f \in BMO(\mathbb{R}^m), \quad \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq B\|f\|_{BMO}$$

Démonstration. On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|^p &= \frac{p}{|Q|}\int_0^\infty \alpha^{p-1}|\{|f-f_Q|>\alpha\}|\,d\alpha \\ &\leq C(p,m)\int_0^\infty \alpha^{p-1}e^{-\frac{A\alpha}{\|f\|_{BMO}}}d\alpha = C'(p,m)\|f\|_{BMO}^p\end{aligned}$$

□

Corollary A.2.6 :

Pour tout $p\in(1,\infty)$ et $f\in BMO(\mathbb{R}^m)$,

$$\|f\|_{BMO}\approx \sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

A.2.3 Fonction maximale

Théorème A.2.7 : Fonction maximale et potentiel de Riesz

Soit $n\geq 2$, $f\in L^1(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))$, $n>\alpha>0$ tels que

$$M_\alpha f : \left(x\mapsto \sup_{r>0}\frac{1}{r^\alpha}\int_{B(x,r)}|f|\right)\in L^\infty(B(0,1))$$

Alors $\frac{1}{|x|^\alpha}*|f|\in BMO(B(0,1))$.

Démonstration. Soit $x_0\in B(0,1)$ et $r>0$ tel que $B(x_0,3r)\subset B(0,1)$. On pose $f'=|f|\mathbf{1}_{B(x_0,3r)}$ et $f''=|f|-f'$. Montrons que $\frac{1}{|x|^\alpha}*f'$ et $\frac{1}{|x|^\alpha}*f''$ sont dans BMO. Commençons par f' :

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,r)}\frac{1}{|x|^\alpha}*f' &= \int_{B(x_0,r)}\int_{B(x_0,3r)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha}dydx \\ &= \int_{B(0,1)}|f(x_0+3r\bar{y})|\int_{B(0,1)}\frac{r^n d\bar{x}}{r^\alpha|\bar{x}-3\bar{y}|^\alpha}\,(3r)^n d\bar{y} \\ &\leq 3^n r^{2n-\alpha}\int_{B(0,1)}|f(x_0+3r\bar{y})|d\bar{y}\int_{B(0,4)}\frac{dz}{|z|^\alpha} \\ &\leq C(\alpha)r^n M_\alpha f'(x_0)\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{r^n}\int_{B(x_0,r)}\left[\frac{1}{|x|^\alpha}*f'-\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*f'\right)_{x_0,r}\right]\leq CM_\alpha f'(x_0)$$

Passons à f'' : si $z\in B(x_0,3r)^c$ et $x\in B(x_0,r)$ alors $|x_0-z|>3r$ et $|x-z|>r$, donc

$$|\frac{1}{|x|^\alpha}*f''(x)-\frac{1}{|x|^\alpha}*f''(x_0)| = |\int_{B(x_0,3r)^c}\left(\frac{1}{|x-z|^\alpha}-\frac{1}{|x_0-z|^\alpha}\right)|f(z)|\,dz| \leq (3^{-\alpha}+1)r^{-\alpha}\int_{B(x_0,3r)^c}|f|\leq C(\alpha)M_\alpha f''(x_0)$$

En intégrant, on obtient le résultat voulu. □

En particulier, comme $\alpha < n$, il existe $p > 1$ tel que $1/|x|^\alpha \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et donc $\frac{1}{|x|^\alpha} * |f| \in L^p(B(0,1))$.

On pose pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$Mf : x \mapsto \sup_{\delta>0} \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} |f(y)|dy$$

Théorème A.2.8 : Théorème maximal

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Si $f \in L^1$, alors pour tout $\alpha > 0$,

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{c(n)}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|d\mu$$

(b) Si $f \in L^p$ avec $1 < p \leq \infty$, alors $Mf \in L^p$ et

$$||Mf||_p \leq A_p ||f||_p$$

avec $A_p \to \infty$ lorsque $p \to 1$.

Autrement dit, M est continu de $L^1 \to L^{(1,\infty)}$ et $L^p \to L^p$ pour $p \in (1, \infty]$.

Pour démontrer ceci, on aura besoin de poser la fonction $\tilde{M}f$ (pour $f \in L^1_{loc}$) comme la fonction maximale décentrée définie par

$$\tilde{M}f(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f|d\mu \mid B \text{ boule contenant } x \right\}$$

Remarquons que $\tilde{M}f$ est semi-continue inférieurement comme sup de fonctions continues.
De plus, on a $Mf \leq \tilde{M}f \leq c(n)Mf$. En effet, si $x \in \mathbb{R}^n$, soit $B = B(y,\delta)$ une boule contenant x. Alors $B \subset B(x, 2\delta)$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(y,\delta)|} \int_{B(y,\delta)} |f|d\mu &\leq \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,2\delta)} |f|d\mu \\ &\leq \frac{2^n}{|B(x,2\delta)|} \int_{B(x,2\delta)} |f|d\mu \leq 2^n Mf(x) \end{aligned}$$

Donc $\tilde{M}f \leq 2^n Mf$.

Démonstration. On commence par montrer (a).
Soit $\alpha > 0$. Posons $E_\alpha = \{x | \tilde{M}f(x) > \alpha\}$ (c'est un ouvert car $\tilde{M}f$ est semi-continue inférieurement). Soit $E \subset E_\alpha$ un compact.
Par définition de E_α, pour tout $x \in E$, il existe une boule B_x telle que $x \in B_x$ et

$$|B_x| < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f|$$

Par compacité de E, du recouvrement $\bigcup_{x \in E} B_x$, on peut en extraire un recouvrement fini. En parcourant les boules dans l'ordre décroissant de leur rayon et en enlevant celles qui intersectent les précédentes, on peut en sélectionner une sous-famille disjointe B_1,...,B_m vérifiant $|E| \leq c(n) \sum_{k=1}^m |B_k|$.
Comme chaque B_k vérifie l'inégalité précédente, on obtient

$$\mu(E) \leq \frac{c}{\alpha} \int |f|d\mu$$

En prenant le supremum sur tout les compact $E \subset E_\alpha$ et en utilisant le fait que $Mf \leq \tilde{M}f$,

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq |\{\tilde{M}f > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha}\int |f|$$

Montrons (b).
Tout d'abord, notons que $\tilde{M}(f) \leq \tilde{M}(f_1) + \frac{\alpha}{2}$ oú $f_1 = f\mathbf{1}_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}$.
Donc $\{\tilde{M}(f) > \alpha\} \subset \{\tilde{M}(f_1) > \frac{\alpha}{2}\}$ et on obtient alors

$$|\{\tilde{M}(f) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha}\int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}} |f|$$

Ainsi,

$$\int (\tilde{M}f)^p d\mu = p\int_0^\infty \mu(\{\tilde{M}f > \alpha\})\alpha^{p-1}d\alpha \leq c_2 p\int\left(\int_0^{2|f|}\alpha^{p-2}d\alpha\right)|f|d\mu \leq 2^{p-1}\frac{cp}{p-1}\int |f|^p d\mu$$

D'où le résultat avec $A_p = (2^{p-1}cp/(p-1))^{\frac{1}{p}}$ qui tend vers ∞ lorsque $p \to 1$. □

A.3 Décomposition de Paley-Littlewood

Cette section vient de [16], chapitre 6.
On considère $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$ radiale dont la transformée de Fourier est positive, supportée dans l'anneau $\{1 - \frac{1}{7} \leq |\xi| \leq 2\}$, égale à 1 dans l'anneau $\{1 \leq |\xi| \leq 2 - \frac{2}{7}\}$ et vérifiant $\hat{\psi}(\xi) + \hat{\psi}(\xi/2) = 1$ sur l'anneau $\{1 \leq |\xi| \leq 4 - \frac{4}{7}\}$ (pour cela, on considère une fonction radiale vérifiant ces propriétés et on prend ψ comme sa transformée de Fourier inverse).
Ainsi, pour $\xi \neq 0$, on a $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 1$. On définit alors l'opérateur de Littlewood-Paley Δ_j donné par

$$\forall f \in S(\mathbb{R}^m), \quad \mathcal{F}(\Delta_j(f)) = \mathcal{F}(\Delta_j^\psi(f)) = \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$$

Ainsi, en notant $\psi_{2^{-j}} := 2^{jm}\psi(2^j\cdot)$, on a $\Delta_j = \psi_{2^{-j}} * \cdot$.

Théorème A.3.1 :

Il existe $C = C(m,\psi) > 0$ tel que pour tout $p \in (1,\infty)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$,

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq C\max(p, \frac{1}{p-1})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$,

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{(1,\infty)}(\mathbb{R}^m)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}$$

Réciproquement, si $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ vérifie $\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^m)$ pour un certain $p \in (1,\infty)$, alors il existe un unique polynôme Q tel que $f - Q \in L^p(\mathbb{R}^m)$ et

$$\|f - Q\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq C\max(p, \frac{1}{p-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}$$

Démonstration. On considère d'abord le cas $p = 2$. Plancherel donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\{2^j(1-\frac{1}{7})\le|\xi|\le 2^{j+1}\}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\{2^j(1-\frac{1}{7})\le|\xi|\le 2^{j}\}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{\{2^j<|\xi|\le 2^{j+1}\}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right) \\
&\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\{2^j(1-\frac{1}{7})\le|\xi|\le 2^{j}\}} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{\{2^j<|\xi|\le 2^{j+1}\}} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right) \\
&\le 2\|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Dans le cas où $p \neq 2$, on considère l'opérateur $T : f \mapsto (\Delta_j(f))_{j\in\mathbb{Z}}$. Alors en notant $K(x)(a) := (\psi_{2^{-j}}(x)a)_{j\in\mathbb{Z}}$, T s'écrit

$$T(f)(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} \psi_{2^{-j}}(x-y)f(y)dy \right)_{j\in\mathbb{Z}} = \int_{\mathbb{R}^m} K(x-y)(f(y))dy$$

$K(x) : \mathbb{C} \to l^2(\mathbb{Z})$ est un opérateur borné avec $\|K(x)\|_{\mathbb{C}\to l^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_{2^{-j}}(x)|^2\right)^{1/2}$. Donc pour $|x| \ge 2|y|$,

$$\begin{aligned}
\|K(x-y) - K(x)\|_{\mathbb{C}\to l^2(\mathbb{Z})} &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_{2^{-j}}(x-y) - \psi_{2^{-j}}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^j<\frac{2}{|x|}} |\psi_{2^{-j}}(x-y) - \psi_{2^{-j}}(x)|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^j>\frac{2}{|x|}} |\psi_{2^{-j}}(x-y) - \psi_{2^{-j}}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^j<\frac{2}{|x|}} (\|\nabla\psi\|_{L^\infty} 2^{j(m+1)}|y|)^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^j>\frac{2}{|x|}} \left(2\|\psi\|_{L^\infty}|y|^{\frac{1}{2}} \frac{2^{j(n+\frac{1}{2})}}{(1+2^{j-1}|x|)^{n+1}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C(m,\psi) \left(\frac{|y|}{|x|^{n+1}} + \frac{|y|^{1/2}}{|x|^{n+1/2}} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, K vérifie la condition de Hörmander

$$\forall y \in \mathbb{R}^m, \quad \int_{|x|\ge 2|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{\mathbb{C}\to l^2(\mathbb{Z})} dx \le C$$

Et donc T admet une extension bornée de $L^p \to L^p$ (pour tout $1 < p < \infty$) et $L^1 \to L^{(1,\infty)}$.
Passons à la réciproque. Prenons $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ et notons $\Delta_j^* : f \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{\psi}_{2^{-j}}]$ l'adjoint de Δ_j. Alors $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j^*\Delta_j(f)$ converge dans $S'(\mathbb{R}^m)$.
En effet, la suite donnée par $\forall N \in \mathbb{N}$, $u_N := \sum_{|j|<N} \Delta_j^*\Delta_j(f)$ est une suite de Cauchy : on remarque que pour $M > N$ et $g \in S(\mathbb{R}^m)$,

$$|\langle u_N, g\rangle - \langle u_M, g\rangle| \le \left\| \left(\sum_j |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \left(\sum_{N\le|j|\le M} |\Delta_j(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}}$$

Donc $(\langle u_N, g\rangle)_N$ converge vers une certaine limite $\Lambda(g)$ et il faut montrer que $\Lambda \in S'(\mathbb{R}^m)$. On a

$$|\Lambda(g)| \leq \left\| \left(\sum_j |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \left(\sum_j |\Delta_j(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} \leq C(p') \left\| \left(\sum_j |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

En particulier, $\Lambda \in S'(\mathbb{R}^m)$. et $\sum_j \Delta_j^* \Delta_j$ converge. De plus, $\mathcal{F}\left[f - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j^* \Delta_j(f)\right]$ est supporté en 0. Donc $f - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j^* \Delta_j(f) = Q$ est polynômiale. On peut estimer :

$$\begin{aligned}
|\langle f - Q, \bar{g}\rangle| &= |\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle \Delta_j f, \Delta_j \bar{g}\rangle| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} \\
&\leq C(m,p') \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|f - Q\|_{L^p} \leq C(m,p') \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}$. □

On remarque que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\Delta_j = (\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1})\Delta_j$. On définit la fonction Schwartz ϕ par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^m, \quad \hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} \sum_{j\leq 0} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Et on introduit l'opérateur S_0 en posant $S_0(f) := \phi * f$. On a ainsi $S_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j = id$ qui est une série convergente dans $S'(\mathbb{R}^m)$.

Théorème A.3.2 :

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p \in (1,\infty)$. Alors il existe $C = C(m,s,p,\phi,\psi) > 0$ telle que

$$\forall f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^m), \quad \|S_0(f)\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C\|f\|_{W^{s,p}}$$

Réciproquement, il existe $C = C(m,s,p,\phi,\psi) > 0$ tel que si $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ vérifie

$$\|S_0(f)\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} < +\infty$$

alors $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^m)$ et

$$\|f\|_{W^{s,p}} \leq C \left(\|S_0(f)\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \right)$$

Démonstration. Pour $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, on note $f_s := \mathcal{F}^{-1}[(1+|.|^2)^{s/2}\hat{f}]$. De sorte que si $f \in W^{s,p}$, $\|f\|_{W^{s,p}} = \|f_s\|_{L^p}$. Supposons d'abord que

$$\|S_0(f)\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} < +\infty$$

Alors $f_s = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}\hat{f}_s] + \mathcal{F}^{-1}[(1-\hat{\phi})\hat{f}_s]$. Prenons η_0 une fonction lisse à support compact, égale à 1 sur le support de $\hat{\phi}$. Ainsi,

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}\hat{f}_s] = \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{s/2}\eta_0(\xi)\widehat{S_0(f)}(\xi)\right]$$

ce qui donne (par composition d'opérateurs continus sur L^p)

$$\|\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}\hat{f}_s]\|_{L^p} \leq C\|S_0(f)\|_{L^p}$$

On considère maintenant une fonction η_∞ qui s'annule sur un voisinage de 0 et qui vaut 1 sur $\mathrm{supp}(1-\hat{\phi})$. Ainsi,

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{s/2}(1-\hat{\phi}(\xi))\hat{f}(\xi)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}\eta_\infty(\xi)}{|\xi|^s}|\xi|^s(1-\hat{\phi}(\xi))\hat{f}(\xi)\right]$$

et donc en notant $f_\infty := \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s(1-\hat{\phi}(\xi))\hat{f}(\xi)]$, on trouve

$$\|\mathcal{F}^{-1}[(1-\hat{\phi})\hat{f}_s]\|_{L^p} \leq C\|f_\infty\|_{L^p}$$

Pour montrer que le membre de droite est fini, on va appliquer la décomposition de Littlewood-Paley. Considérons ζ une fonction lisse à support dans $\{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 4\}$, égale à 1 sur $\mathrm{supp}(\hat{\psi})$. Posons $\hat{\theta}(\xi) := |\xi|^s\hat{\zeta}(\xi)$ et on introduit la décomposition associée à θ :

$$\Delta_j^\theta : g \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}\hat{\theta}(2^{-j}\cdot)]$$

Il suit que, étant donné $1-\hat{\phi}(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty}\hat{\psi}(2^{-j}\xi)$,

$$\hat{f}_\infty = \sum_{j=1}^{\infty}|\xi|^s\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{\zeta}(2^{-j}\xi)\hat{f} = \sum_{j=1}^{\infty}2^{js}\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{\theta}(2^{-j}\xi)\hat{f}$$

et donc $f_\infty = \sum_{j=1}^{\infty}\Delta_j^\theta(2^{js}\Delta_j^\psi(f))$ et il suit

$$\|f_\infty\|_{L^p} \leq C\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty}|2^{js}\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} < +\infty$$

Reste à obtenir l'autre l'inégalité. Supposons maintenant $f \in W^{s,p}$.
Notons que $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{\phi}(\xi)$ est un multiplicateur de Fourier : $\|S_0(f)\|_{L^p} \leq C\|f_s\|_{L^p} = C\|f\|_{W^{s,p}}$.
Ensuite, posons $\sigma(\xi) := |\xi|^{-s}\hat{\psi}(\xi)$ de sorte que pour $j \geq 2$, $\hat{\phi}$ s'annule sur le support de $\hat{\sigma}(2^{-j}\cdot)$ et

$$2^{js}\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f} = \hat{\sigma}(2^{-j}\xi)|\xi|^s\hat{f} = \hat{\sigma}(2^{-j}\xi)|\xi|^s(1-\hat{\phi}(\xi))\hat{f}$$

Ainsi, $2^{js}\Delta_j^{\psi}(f) = \Delta_j^{\sigma}(f_\infty)$. On obtient

$$\left\| \left(\sum_{j=2}^{\infty} |2^{js}\Delta_j^{\psi}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} = \left\| \left(\sum_{j=2}^{\infty} |\Delta_j^{\sigma}(f_\infty)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C\|f_\infty\|_{L^p}$$

Or

$$\hat{f}_\infty(\xi) = |\xi|^s(1-\hat{\phi}(\xi))\hat{f}(\xi) = \frac{|\xi|^s(1-\hat{\phi}(\xi))}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\hat{f}_s$$

et donc $\|f_\infty\|_{L^p} \leq C\|f_s\|_{L^p} = C\|f\|_{W^{s,p}}$. □

A.4 Espaces de Hardy

Cette section vient de [17], chapitre 2.

A.4.1 Définition

Definition A.4.1 : Espace de Hardy

L'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ vérifiant :
Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^m} \psi = 1$, pour $t > 0$, $\psi_t : x \mapsto t^{-m}\psi(x/t)$ et $M(f;\psi) : x \mapsto \sup_{t>0} |\psi_t \star f(x)|$, alors $M(f;\psi) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ et

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} + \|M(f;\psi)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}$$

Le lien avec la transformée de Riesz se fera dans la section intégrales singulières.

Proposition A.4.2 :

$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m) \subset L^1(\mathbb{R}^m) : \forall f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m), \quad \|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^1}$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$. Alors $(\psi_t * f)_t$ est bornée dans L^1, et donc définit une famille bornée de mesures boréliennes. Quitte à extraire, on peut donc supposer que $(\psi_t * f)_t$ converge (en mesure) vers une certaine mesure μ. Or

$$\psi_t * f \xrightarrow[t\to 0]{S'(\mathbb{R}^m)} f$$

Donc f peut être identifiée à μ et il suffit de montrer que μ est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Comme $M(f;\psi) \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(|F| < \delta) \Rightarrow (\int_F \sup_{t>0} |\psi_t * f(x)| dx < \epsilon)$$

En particulier, si $|E| = 0$, il existe un ouvert U contenant E tel que $|U| < \delta$. Pour $g \in C_c(U)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} g d\mu \right| = \lim_{t\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\psi_t * f(x) dx \right| \leq \|g\|_{L^\infty} \int_U M(f;\psi)(x) dx < \epsilon \|g\|_{L^\infty}$$

Or

$$|\mu(U)| = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^m} g d\mu \right| \mid g \in C_c(U),\ \|g\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}$$

et donc $|\mu(U)| < \epsilon$. Par conséquent, $|\mu|(E) = 0$ et μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. □

Definition A.4.3 :

Pour $a, b > 0$, $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$ et $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, on pose

- Fonction maximal non tangentielle :

$$M_a^*(f;\psi)(x) = \sup_{t>0} \sup_{y\in\mathbb{R}^m, |y-x|\leq at} |\psi_t * f(y)|$$

- Fonction maximale auxiliaire :

$$M_b^{**}(f;\psi)(x) := \sup_{t>0} \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \frac{|\psi_t * f(x-y)|}{(1+t^{-1}|y|)^b}$$

- Une semi-norme sur $S(\mathbb{R}^m)$:

$$\mathcal{N}_n(\psi) := \int_{\mathbb{R}^m} (1+|x|)^N \sum_{|\alpha|\leq N+1} |\partial^\alpha \psi(x)| dx$$

  et sa boule unité $\mathcal{F}_N := \{\phi \in S(\mathbb{R}^m) \mid \mathcal{N}_n(\phi) \leq 1\}$

- La grande fonction maximal de f à l'ordre n :

$$\mathcal{M}_n(f)(x) := \sup_{\phi\in\mathcal{F}_n} M_1^*(f;\phi)(x)$$

On observe que

$$M(f;\phi) \leq M_a^*(f;\phi) \leq (1+a)^b M_b^{**}(f;\phi)$$

Le résultat suivant est admis et l'on pourra trouver une preuve dans [17], théorème 6.4.4 :

Théorème A.4.4 : Définitions alternatives de $\mathcal{H}^1$

i) Il existe $\phi \in S(\mathbb{R}^m)$ d'intégrale non nulle et $C_1 > 0$ telle que $\forall f \in S'(\mathbb{R}^m), \quad \|M(f;\phi)\|_{L^1} \leq C_1 \|f\|_{\mathcal{H}^1}$.

ii) $\forall a > 0,\ \forall \phi \in S(\mathbb{R}^m),\ \exists C_2 = C_2(m,a,\phi) > 0, \quad \|M_a^*(f;\phi)\|_{L^1} \leq C_2 \|M(f;\phi)\|_{L^1}$

iii) $\forall a > 0,\ \forall b > m,\ \forall \phi \in S(\mathbb{R}^m),\ \exists C_3 = C_3(m,a,b,\phi) > 0, \quad \|M_b^{**}(f,\phi)\|_{L^1} \leq C_3 \|M_a^*(f;\phi)\|_{L^1}$

iv) $\forall b > 0,\ \forall \phi \in S(\mathbb{R}^m), \quad [\int_{R^m} \phi \neq 0] \Rightarrow [\exists C_4 = C_4(b,\phi) > 0, \quad \|\mathcal{M}_{[b]+1}(f)\|_{L^1} \leq C_4 \|M_b^{**}(f;\phi)\|_{L^1}$

v) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists C_5 = C_5(n) > 0,\ \forall f \in S'(\mathbb{R}^m), \quad [\|\mathcal{M}_n(f)\|_{L^1} < \infty] \Rightarrow [\|f\|_{\mathcal{H}^1} \leq C_5 \|\mathcal{M}_n(f)\|_{L^1}]$

De plus, $M(f;\phi) \leq CM(f;\psi)$ et $M_1^*(f;\psi) \leq C_5 \mathcal{M}_{m+1}(f)$.

En particulier, $\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} \approx \|\mathcal{M}_{m+1}(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}$.

Proposition A.4.5 :

Pour tout $r \in [1,\infty]$, $L^r \cap \mathcal{H}^1$ est dans dans $\mathcal{H}^1$. (en particulier, $\mathcal{H}^1 \cap L^2$)

Démonstration. On considére le noyau de poisson P donné par $\hat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$, et pour $t > 0$, $P_t : x \mapsto t^{-m}P(x/t)$ de sorte que $\hat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$ (en particulier, $P_s * P_t = P_{s+t}$). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $t > 0$,

$$\forall y \in B(x,t), \quad |P_t * f(x)| \leq M_1^*(f;P)(y) \leq C\mathcal{M}_{m+1}(f)(y)$$

De sorte que

$$|P_t * f(x)| \leq \frac{C(m)}{t^m} \int_{B(x,t)} \mathcal{M}_{m+1}(f)(y)dy \leq \frac{C}{t^m}\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

Donc $\forall t > 0,\ P_t * f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$ et par conséquent, $\forall t > 0,\ P_t * f \in \bigcap_{1\leq r\leq\infty} L^r(\mathbb{R}^m)$. Or la propriété de semi-groupe donne

$$\sup_{s>0} |P_s * P_t * f| = \sup_{s>0} |P_{s+t} * f| \leq \sup_{s>0} |P_s * f|$$

et donc $\forall t > 0,\ \|P_t * f\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^1}$. On va montrer la convergence dans $\mathcal{H}^1$ par convergence dominée. On a

$$\sup_{s>0} |P_s * P_t * f - P_s * f| \leq 2\sup_{s>0} |P_s * f| \in L^1(\mathbb{R}^m)$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $(s \mapsto |P_{s+t} * f(x) - P_s * f(x)|)$ est bornée par $(s \mapsto Cs^{-m})$ et donc tend vers 0 lorsque $s \to \infty$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t > 0, \quad \sup_{s>M} |P_s * P_t * f(x) - P_s * f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Et $\big(t \mapsto \sup_{0\leq s\leq M} |P_s * P_t * f(x) - P_s * f(x)|\big)$ est continue, donc il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\forall t \in (0, t_0], \quad \sup_{0\leq s\leq M} |P_s * P_t * f(x) - P_s * f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Par conséquent,

$$\sup_{s>0} |P_s * P_t * f(x) - P_s * f(x)| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

et le résultat suit. □

Corollary A.4.6 :

Pour tout $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^m)$ d'intégrale non nulle,

$$\forall f \in S'(\mathbb{R}^m), \quad \left\|\sup_{t>0} |\phi_t * f|\right\|_{L^1} \approx \left\|\sup_{t>0} |\psi_t * f|\right\|_{L^1} \approx \|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

avec des constantes dépendant de ϕ et ψ.

Théorème A.4.7 :

Soit $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$ définissant une décomposition de Paley-Littlewood. Alors

$$\exists C = C(m) > 0,\ \forall f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m), \quad \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

Réciproquement, si $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ vérifie $\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1} < +\infty$ alors il existe une unique fonction

polynômiale Q telle que $f - Q \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et

$$\|f - Q\|_{\mathcal{H}^1} \leq C \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1}$$

Démonstration. Soit $\phi \in S(\mathbb{R}^m)$ d'intégrale 1, $M \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{H}^1$. Notons $r_j(t) = \operatorname{sgn}[\sin(2^j \pi t)]$, $j \in \mathbb{N}$ que l'on réindexe sur $\mathbb{Z}$. Alors

$$\left| \sum_{j=-M}^{M} r_j(\omega) \Delta_j(f) \right| \leq \sup_{\epsilon > 0} \left| \phi_\epsilon * \sum_{j=-M}^{M} r_j(\omega) \Delta_j(f) \right|$$

Donc

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^m} \left| \sum_{j=-M}^{M} r_j(\omega) \Delta_j(f)(x) \right| dx d\omega \leq C(m) \int_0^1 \left\| \sum_{j=-M}^{M} r_j(\omega) \Delta_j(f) \right\|_{\mathcal{H}^1} d\omega$$

L'inégalité de Khintchine donne

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{j=-M}^{M} |\Delta_j(f)(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \leq C(m) \int_0^1 \left\| \sum_{j=-M}^{M} r_j(\omega) \psi_{2^{-j}} * f \right\|_{\mathcal{H}^1} d\omega \leq C(m, \psi) \|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

La limite $M \to \infty$ donne le résultat.
Réciproquement, si $r \in \{0, 1, 2\}$ on note que pour $j \neq k \in 3\mathbb{Z} + r$, $\mathcal{F}[\Delta_j(f)]$ et $\mathcal{F}[\Delta_k(f)]$ sont à supports disjoints. Donc on peut fixer $\eta \in S(\mathbb{R}^m)$ dont la transformée de Fourier est à support compact loin de 0 telle que

$$\forall j, k \in 3\mathbb{Z}, \quad \Delta_j^\eta \Delta_j^\psi = \begin{cases} \Delta_j & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, l'application $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{j \in 3\mathbb{Z}} \Delta_j^\eta(f_j)$ est bien définie de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m; l^2) \to \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ car

$$\exists B > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^m,\ \left| \sum_{j \in 3\mathbb{Z}} \hat{\eta}(2^{-j}\xi) \right| \leq B \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^m,\ \exists A_\alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \sum_{j \in 3\mathbb{Z}} |\partial^\alpha(2^{jm}\eta(2^j x))| \leq \frac{A_\alpha}{|x|^{m+|\alpha|}}$$

Donc en prenant $f_j = \Delta_j f$, on obtient

$$\left\| \sum_{j \in 3\mathbb{Z}} \Delta_j(f) \right\|_{\mathcal{H}^1} \leq C(m, \psi) \left\| \left(\sum_{j \in 3\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1}$$

En effectuant la même chose pour $3\mathbb{Z} + 1$ et $3\mathbb{Z} + 2$, on obtient :

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j(f) \right\|_{\mathcal{H}^1} \leq C \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1}$$

Mais la transformée de Fourier de $f - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j(f)$ est supportée en l'origine, donc est polynômiale. □

A.4.2 Décomposition atomique

Dans la suite on notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des cubes dyadiques.

Definition A.4.8 :

- Soit Q un cube dyadique et $L \in \mathbb{N}$. Une fonction $a_Q \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ est une L-atome lisse pour Q si
  i) $\mathrm{supp}(a_Q) \subset 3Q$
  ii) $\forall \gamma \in \mathbb{N}^m, \quad |\gamma| \leq L \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} x^\gamma a_Q(x)dx = 0$
  iii) $\forall |\gamma| \leq L+m+1,\ |\partial^\gamma a_Q| \leq |Q|^{-\frac{|\gamma|}{m}-\frac{1}{2}}$
- Soit $q \in (1,\infty]$. Une fonctions $A \in L^q(\mathbb{R}^m)$ est appelée L^q-atome de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ s'il existe un cube Q contenant le support de A, tel que $\|A\|_{L^q} \leq |Q|^{\frac{1}{q}-1}$ et $\int_{\mathbb{R}^m} A = 0$.
- Pour $(s_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$, on note
$$g((s_Q)_{Q\in\mathcal{D}}) := \left(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{1}{2}}|s_Q|\mathbf{1}_Q)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
- Une famille de complexes $(r_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$ est un ∞-atome s'il existe $Q_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\forall Q \nsubseteq Q_0,\ r_Q = 0$ et $\|g(r)\|_{L^\infty} \leq |Q_0|^{-1}$.

On remarque que pour un ∞-atome r, $\|g(r)\|_{L^1} = \|g(r)\|_{L^1(Q_0)} \leq 1$.

Théorème A.4.9 :

Soit $L \in \mathbb{N}$. Il existe $c = c(m) > 0$ telle que pour toute suite $(a_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$ de L-atomes lisses et toute famille de complexes $(s_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$,
$$\left\|\sum_{Q\in\mathcal{D}} s_Q a_Q\right\|_{\mathcal{H}^1} \leq c\,\|g((s_Q)_{Q\in\mathcal{D}})\|_{L^1}$$
Réciproquement, il existe $C = C(m) > 0$ telle que si $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et $L \in \mathbb{N}$, il existe une famille de L-atomes $(a_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$ et une suite de complexes $(s_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$ vérifiant
$$f = \sum_{Q\in\mathcal{D}} s_Q a_Q \qquad \text{et} \qquad \|g((s_Q)_{Q\in\mathcal{D}})\|_{L^1} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

Démonstration. Commençons par le premier point.
Prenons $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$ dont la transformée de Fourier est à support compact loin de l'origine et considérons Δ_j^ψ les opérateurs de Littlewood-Paley associés.
Soit a_Q un L-atome lisse supporté dans un cube $3Q$ de centre c_Q et de longueur de côté $l(Q) = 2^{-\mu}$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $|\gamma| \leq L+n+1$, il existe $C = C(N,m) > 0$ telle que
$$\forall y \in \mathbb{R}^m, \qquad |\partial^\gamma a_Q(y)| \leq C 2^{-\frac{\mu m}{2}} \frac{2^{\mu(|\gamma|+m)}}{(1+2^\mu|y-c_Q|)^N}$$
De même pour $\psi_{2^{-j}}(.-x)$: pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout multi-indice δ, il existe $C = C(N,m,\delta) > 0$ vérifiant
$$\forall y \in \mathbb{R}^m, \qquad |\partial_y^\delta \psi_{2^{-j}}(y-x)| \leq C \frac{2^{j(|\delta|+m)}}{(1+2^j|y-x|)^N}$$

Par conséquent, en effectuant un développement de Taylor de $\psi_{2^{-j}}$ au point c_Q, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{Z}$, en posant $L' = \begin{cases} L+1 & \text{si } j < \mu \\ L+m & \text{si } \mu \leq j \end{cases}$, il existe $c = c(N, m, L') > 0$ telle que

$$|\Delta_j^\psi a_Q(x)| \leq c 2^{-\frac{\mu m}{2}} \frac{2^{\min(j,\mu)m - |\mu - j| L'}}{(1 + 2^{\min(j,\mu)}|x - c_Q|)^N}$$

Maintenant fixons $b \in (0,1)$ tel que $L + 1 > (\frac{1}{b} - 1)m$ (possible en prenant b proche de 1) de sorte qu'en notant M la fonction maximale de Hardy-Littlewood, pour $N > \frac{m}{b}$

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}, l(Q) = 2^{-\mu}} \frac{|s_Q|}{(1 + 2^{\min(j,\mu)}|x - c_Q|)^N} \leq c 2^{\max(\mu - j, 0)\frac{m}{b}} \left[M \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}, l(Q) = 2^{-\mu}} |s_Q|^b \mathbf{1}_Q \right)(x) \right]^{\frac{1}{b}}$$

Ceci vient d'un découpage de cet ensemble de cube. Notons $\mathcal{F}_0 := \{Q \in \mathcal{D} \mid l(Q) = 2^{-\mu}, |c_Q - x| 2^{\min(j,\mu)} \leq 1\}$ et pour $k \geq 1$, $\mathcal{F}_k := \{Q \in \mathcal{D} \mid l(Q) = 2^{-\mu}, 2^{k-1} < |c_Q - x| 2^{\min(j,\mu)} \leq 2^k\}$. Alors

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}_k} |s_Q| \leq \left(\sum_{Q \in \mathcal{F}_k} |s_Q|^b \right)^{1/b} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{l(Q)}{|x - c_Q| + l(Q)} \right)^m \leq M(\mathbf{1}_Q)(x)$$

Et on obtient l'estimation voulue. Par conséquent,

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \sum_{Q \in \mathcal{D}, l(Q) = 2^{-\mu}} |s_Q \Delta_j^\psi a_Q(x)| \leq C \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} 2^{\min(j,\mu)m - |j - \mu| L' - \mu m + \max(\mu - j, 0)\frac{m}{b}} \left[M \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}, l(Q) = 2^{-\mu}} (|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}})^b \mathbf{1}_Q \right)(x) \right]^{\frac{1}{b}}$$

Par conséquent, la caractérisation de $\mathcal{H}^1$ avec la décomposition de Littlewood-Paley donne, en posant $d(j - \mu) := C 2^{\min(j-\mu, 0)(m - \frac{m}{b}) - |j - \mu| L' - \mu m}$,

$$\begin{aligned} \| \sum_{Q \in \mathcal{D}} s_Q a_Q \|_{\mathcal{H}^1} &\leq \left\| \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\mu \in \mathbb{Z}} d(j - \mu) \left[M \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}, l(Q) = 2^{-\mu}} (|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}})^b \mathbf{1}_Q \right) \right]^{\frac{1}{b}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1} \\ &\leq \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} d(j) \right) \left(\sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \left[M \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}, l(Q) = 2^{-\mu}} (|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}})^b \mathbf{1}_Q \right) \right]^{\frac{2}{b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1} \end{aligned}$$

La définition de L' donne que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} d(j) < +\infty$. et donc comme $M : L^{1/b} \to L^{1/b}$ est borné,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{Q\in\mathcal{D}} s_Q a_Q\|_{\mathcal{H}^1} &\leq C\left\|\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\left[M\left(\sum_{Q\in\mathcal{D},l(Q)=2^{-\mu}}(|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}})^b\mathbf{1}_Q\right)\right]^{\frac{2}{b}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1}\\
&\leq C\left\|\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\left[M\left(\sum_{Q\in\mathcal{D},l(Q)=2^{-\mu}}(|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}})^b\mathbf{1}_Q\right)\right]^{\frac{2}{b}}\right)^{\frac{b}{2}}\right\|_{L^{\frac{1}{b}}}^{\frac{1}{b}}\\
&\leq C\left\|\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{Q\in\mathcal{D},l(Q)=2^{-\mu}}(|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}})^b\mathbf{1}_Q\right]^{\frac{2}{b}}\right)^{\frac{b}{2}}\right\|_{L^{\frac{1}{b}}}^{\frac{1}{b}}\\
&\leq C\left\|\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\sum_{Q\in\mathcal{D},l(Q)=2^{-\mu}}(|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_Q)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1}
\end{aligned}$$

car $2/b > 1$.
Réciproquement, prenons $f \in \mathcal{H}^1$.
On considère $\psi, \theta \in S(\mathbb{R}^m)$ telles que

- $\mathrm{supp}(\hat{\psi}) \subset \{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$ et $\hat{\psi} \geq c > 0$ sur $\{\frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3}\}$
- $\mathrm{supp}(\theta) \subset \{|x| \leq 1\}$ et $\int_{\mathbb{R}^m} \theta = 0$
- $\forall \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\},\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{\theta}(2^{-j}\xi) = 1$

Donc en notant D_j l'ensemble des cubiques diadiques de longueur 2^{-j}, on obtient

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_{2^{-j}} * \theta_{2^{-j}} * f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{Q\in D_j}\int_Q \theta_{2^{-j}}(x-y)(\psi_{2^{-j}} * f)(y)dy = \sum_{j\in\mathbb{Z},Q\in D_j} s_Q a_Q$$

où pour $Q \in D_j$,

$$s_Q := |Q|^{\frac{1}{2}}\|\psi_{2^{-j}} * f\|_{L^\infty(Q)} \sup_{|\gamma|\leq L+m+1}\|\partial^\gamma\theta\|_{L^1} \quad \text{et} \quad a_Q := \frac{1}{s_Q}\int_Q \theta_{2^{-j}}(x-y)(\psi_{2^{-j}} * f)(y)dy$$

Les hypothèses sur θ donnent que a_Q est à support dans $3Q$, a des moments nuls jusqu'à l'ordre L. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $|\gamma| \leq L+m+1$,

$$|\partial^\gamma a_Q(x)| \leq \frac{1}{s_Q}\|\partial^\gamma\theta\|_{L^1} 2^{j(m+|\gamma|)}\|\psi_{2^{-j}} * f\|_{L^\infty(Q)} \leq |Q|^{-\frac{1}{2}-\frac{|\gamma|}{m}}$$

et chaque a_Q est un L-atome lisse. Maintenant, on note que pour $Q \in D_j$ et $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}
\sum_{l(Q)=2^{-j}}(|Q|^{-\frac{1}{2}}s_Q\mathbf{1}_Q(x))^2 &= C\sum_{l(Q)=2^{-j}}(\|\psi_{2^{-j}} * f\|_{L^\infty(Q)}\mathbf{1}_Q(x))^2\\
&\leq C\sup_{|z|\leq\sqrt{m}2^{-j}}\left((1+2^j|z|)^{-b}|(\psi_{2^{-j}} * f)(x-z)|\right)^2(1+2^j|z|)^{2b}\\
&\quad \text{car } x \text{ est dans un unique cube de côté } 2^{-j}\\
&\leq CM^{**}_{b,j}(f,\psi)(x)^2
\end{aligned}$$

En sommant sur j,

$$\left\| \left(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_Q)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1} \leq C \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} M^{**}_{b,j}(f,\psi)(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

(on admet la dernière inégalité) □

Théorème A.4.10 :

Soit $s = (s_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$ des complexes telle que $\|g(s)\|_{L^1} < \infty$. Alors il existe $C = C(m) > 0$ et des scalaires $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et des ∞-atomes $r_j = (r_{j,Q})_{Q\in\mathcal{D}}$ vérifiant

$$s = (s_Q)_{Q\in\mathcal{D}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (r_{j,Q})_{Q\in\mathcal{D}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j r_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \leq C\|g(s)\|_{L^1}$$

Démonstration. Pour $R \in \mathcal{D}$, on note

$$g_R(s) := \left(\sum_{Q\in\mathcal{D}, R\subset Q} (|Q|^{-\frac{1}{2}}|s_Q|\mathbf{1}_Q)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors $g_R(s)$ est constante sur R et si $R_1 \subset R_2$ on a $g_{R_2}(s) \leq g_{R_1}(s)$, et

$$g_R(s)(x) \xrightarrow[l(R)\to\infty, x\in R]{} 0 \quad \text{et} \quad g_R(s)(x) \xrightarrow[l(R)\to 0, x\in R]{} g(s)(x)$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$A_k := \{R \in \mathcal{D} \mid \forall x \in R,\ g_R(s)(x) > 2^k\}$$

de sorte que $A_{k+1} \subset A_k$ et $\{g(s) > 2^k\} = \bigcup_{R\in A_k} R$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \left(\sum_{Q\in\mathcal{D}\setminus A_k} (|Q|^{-\frac{1}{2}}|s_Q|\mathbf{1}_Q(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^k$$

En effet, dans le cas où $g(s)(x) > 2^k$, il existe un cube $R_{max} \in A_k$ de longueur maximal contenant x. Considérons $R_0 \in \mathcal{D}$ l'unique cube dyadique contenant R_{max}, avec $l(R_0) = 2l(R_{max})$. Alors la quantité de gauche est au plus $g_{R_0}(s)(x) \leq 2^k$ car $R_0 \notin A_k$.
Comme $g(s) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ par hypothèse, les cubes de chaque A_k sont de taille bornée par une certaine constante. On note

$$B_k := \{Q \in \mathcal{D} \mid Q \text{ cube dyadique maximal de } A_k \setminus A_{k+1}\}$$

Pour $J \in B_k$, on considère la suite $t(k,J) = (t(k,J)_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$ donnée par $t(k,J)_Q := \begin{cases} s_Q & \text{si } Q \subset J \text{ et } Q \in A_k \setminus A_{k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
On remarque que si $Q \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ alors $s_Q = 0$. Par conséquent, $s = \sum_{k\in\mathbb{Z}, J\in B_k} t(k,J)$.
Pour $x \in \mathbb{R}^m$, on a

$$g(t(k,J))(x) = \left(\sum_{Q\subset J, Q\in A_k\setminus A_{k+1}} (|Q|^{-\frac{1}{2}}|s_Q|\mathbf{1}_Q(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{Q\subset J, Q\in\mathcal{D}\setminus A_{k+1}} (|Q|^{-\frac{1}{2}}|s_Q|\mathbf{1}_Q(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{k+1}$$

On pose alors $r(k,J)_Q := 2^{-k-1}|J|^{-1}t(k,J)_Q$ et $\lambda_{k,J} := 2^{k+1}|J|$.
Par ce qui précède, les $r(k,J)$ sont des ∞-atomes et $s = \sum_{k,J} \lambda_{k,J} r(k,J)$. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{J\in B_k} |\lambda_{k,J}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k+1} \sum_{J\in B_k} |J| &\leq 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \left|\bigcup_{Q\in A_k} Q\right| \\
&\leq 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k |\{g(s) > 2^k\}| \\
&\leq 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^k}^{2^{k+1}} |\{g(s) > \frac{\lambda}{2}\}| d\lambda \\
&\leq 4\|g(s)\|_{L^1}
\end{aligned}$$

□

Lemme A.4.11 :

Il existe $C = C(m) > 0$ tel que pour tout L^2-atome A, $\|A\|_{\mathcal{H}^1} \leq C$.

Démonstration. Soit A un L^2-atome de $\mathcal{H}^1$, à support dans un cube Q centré en l'origine (autrement, on considère $A(. - c_Q)$ où c_Q est le centre que Q). Il suffit de montrer que $\left(\sum_j |\Delta_j(A)|^2\right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^m)$.
On contrôle $\left(\sum_j |\Delta_j(A)|^2\right)^{1/2}$ en l'estimant sur $Q^* := 2\sqrt{m}Q$ puis sur $(Q^*)^c$.

$$\int_{Q^*} \left(\sum_j |\Delta_j(A)|^2\right)^{1/2} dx \leq \left(\int_{Q^*} \sum_j |\Delta_j(A)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} |Q^*|^{\frac{1}{2}} \leq C(m)\|A\|_{L^2}|Q^*|^{\frac{1}{2}} \leq C'(m)$$

En dehors de Q^*, on pose $\psi_{2^{-j}} := 2^{jm}\psi(2^j\cdot)$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\Delta_j(A)(x) &= \int_Q A(y)\psi_{2^{-j}}(x-y)dy \\
&= 2^{jm}\int_Q A(y)\left(\psi(2^jx - 2^jy) - \psi(2^jx)\right) dy \\
&= -2^{jm}\int_Q A(y)\left(\sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha\psi(2^jx - 2^j\theta y)2^jy^\alpha\right) dy \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour $y \in Q$ et $x \notin Q^*$, $|x - \theta y| \geq |x| - |y| \geq \frac{1}{2}|x|$,

$$\begin{aligned}
|\Delta_j(A)(x)| &\leq 2^{jm}\int_Q |A(y)| \frac{C(N,\psi)}{(1+2^{j-1}|x|)^N} |2^jy|\ dy \\
&\leq C(N,\psi)\frac{2^{j(1+m)}}{(1+2^{j-1}|x|)^N}\|A\|_{L^2}\||.|\|_{L^2(Q)} \\
&\leq C(N,\psi)\frac{2^{j(1+m)}}{(1+2^{j-1}|x|)^N}|Q|^{\frac{1}{2}-1}|Q|^{\frac{1}{m}+\frac{1}{2}} \\
&\leq C(N,\psi)\frac{2^{j(1+m)}}{(1+2^{j-1}|x|)^N}|Q|^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

Il suit que pour $x \in (Q^*)^c$,

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(A)(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(N,\psi)|Q|^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{2j(1+m)}}{(1+2^{j-1}|x|)^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Et

$$\begin{aligned}
\int_{(Q^*)^c} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{2j(1+m)}}{(1+2^{j-1}|x|)^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}} dx &= \int_{(Q^*)^c} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2^{j-1}|x|}{1+2^{j-1}|x|}\right)^{2N} \frac{2^{2j(1-m)}}{(2^{j-1}|x|)^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \int_{(Q^*)^c} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^{j-1}|x|>1} \frac{2^{2j(1-m)}}{(2^{j-1}|x|)^{2N}} + \sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^{j-1}|x|<1} 2^{j-1}|x| \frac{2^{2j(1-m)}}{(2^{j-1}|x|)^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \sqrt{2}\left[\int_{(Q^*)^c} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^{j-1}|x|>1} \frac{2^{2j(1-m)}}{(2^{j-1}|x|)^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{(Q^*)^c} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}, 2^{j-1}|x|<1} 2^{j-1}|x| \frac{2^{2j(1-m)}}{(2^{j-1}|x|)^{2N}}\right)^{\frac{1}{2}} dx\right] \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

□

Théorème A.4.12 :

Tout L^2-atome de $\mathcal{H}^1$ est dans $\mathcal{H}^1$.
Pour tout $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, il existe $(A_j)_{j\geq 1}$ une suite de L^2-atomes et $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels telles que $\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{H}^1} f$. De plus, on a l'estimation

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} \approx \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \;\middle|\; f = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i A_i,\ (A_i)_i\ L^2\text{-atomes}\right\}$$

Démonstration. Le lemme précédent donne que si $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$, et $(A_j)_j$ est une famille de L^2-atomes, on a

$$\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j\|_{\mathcal{H}^1} \leq C \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|$$

De sorte que si $\sum_{j=1}^N \lambda_j A_j \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{H}^1} f$, alors $\|f\|_{\mathcal{H}^1} \leq C \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|$. Il reste à montrer l'existence.
On peut décomposer f en $\sum_{Q\in\mathcal{D}} s_Q a_Q$ où chaque a_Q est un L-atome pour le cube Q et $(s_Q)_{Q\in\mathcal{D}}$ vérifie $\|g(s_Q)\|_{L^1} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$.
On applique le théorème précédent : on décompose chaque s_Q en ∞-atomes $r_{j,Q}$ de sorte que $s = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j r_j$ et :

$$f = \sum_j \lambda_j A_j, \quad A_j := \sum_{Q\in\mathcal{D}} r_{j,Q} a_Q, \quad \sum_j |\lambda_j| \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

Montrons que les A_j sont des L^2-atomes pour $\mathcal{H}^1$.
Fixons $j \geq 1$. Par définition des ∞-atomes, il existe des cubes dyadiques Q_0^j tels que $r_{j,Q} = 0$ dès que $Q \not\subseteq Q_0^j$. De plus pour $Q \subset Q_0^j$, a_Q est supporté dans $3Q \subset 3Q_0^j$. Par conséquent, A_j est à support dans $3Q_0^j$. Idem pour $g(r_j)$. Par conséquent,

$$\|A_j\|_{L^2} \leq c\|g(r_j)\|_{L^2} \leq c\|g(r_j)\|_{L^\infty}|3Q_0^j|^{\frac{1}{2}} \leq c|3Q_0^j|^{-\frac{1}{2}}$$

La première estimation se fait de la même manière que le théorème 4.4.0.9, on renvoie à [17] théorème 6.6.5 pour une preuve.
Comme $\int a_Q = 0$ pour tout Q, on retrouve $\int A_j = 0$ pour tout j. On en déduit que chaque A_j est un multiple (avec une constante indépedante de j) d'un L^2-atome pour $\mathcal{H}^1$.
Il reste à montrer que $\sum_j \lambda_j A_j$ converge dans $\mathcal{H}^1$. On a $\|\sum_{j=N}^M \lambda_j A_j\|_{\mathcal{H}^1} \leq C\sum_{j=N}^M |\lambda_j|$ et donc $\left(\sum_{j=1}^M \lambda_j A_j\right)_{M\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^1$, qui converge dans S' vers f. Donc on a aussi convergence dans $\mathcal{H}^1$.

□

A.4.3 Intégrales singulières

Soit $K \in C^1(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ vérifiant $|K(x)| \leq A/|x|^m$ et $|\nabla K(x)| \leq A/|x|^{m+1}$.
On considère une distribution $W \in S'(\mathbb{R}^m)$ qui coïncide avec K sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. On suppose que $\hat{W} \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ et que W est obtenue par troncature de K, i.e. on fixe une fonction $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\eta = \begin{cases} 0 & \text{sur } B(0,1) \\ 1 & \text{sur } B(0,2)^c \end{cases}$ et on suppose qu'il existe $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ décroissante qui tend vers 0 et

$$\forall \phi \in S(\mathbb{R}^m), \quad \langle W, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} K(y)\eta(\epsilon_j^{-1}y)\phi(y)dy$$

On définit l'opérateur tronqué

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall f \in S(\mathbb{R}^m), \quad T_\eta^{(\epsilon)} f(x) := \int_{\mathbb{R}^m} \eta(\epsilon^{-1}y)K(y)f(x-y)dy$$

Et on considère l'opérateur T donné par $T(f) = \lim_{j\to\infty} T^{(\epsilon_j)} f = f * W$.
Maintenant, on cherche à définir T sur $\mathcal{H}^1$. On fixe $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\Phi = \begin{cases} 1 & \text{sur } B(0,1) \\ 0 & \text{sur } B(0,2)^c \end{cases}$ et on pose $W_0 = \Phi W$ puis $K_\infty = (1-\Phi)K$ et enfin

$$\forall f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m),\ \forall \phi \in S(\mathbb{R}^m), \quad \langle T(f), \phi\rangle = \left\langle f, \phi * \tilde{W}_0\right\rangle + \left\langle \tilde{\phi} * f, \tilde{K}_\infty\right\rangle$$

avec $\tilde{\cdot}$ la composition par $-id_{\mathbb{R}^m}$. Comme $\phi * \tilde{W}_0 \in S(\mathbb{R}^m)$ et $\tilde{K}_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$, T est bien définie sur $\mathcal{H}^1$.

Théorème A.4.13 :

Sous ces hypothèses, $T : \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ est borné.

Démonstration. On fixe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ à support dans $B(0,1)$ et telle que $\int \psi \neq 0$. Pour $t > 0$, on considère les fonctions lisses $W^{(t)} := \psi_t * W$ où $\psi_t = t^{-m}\psi(t^{-1}\cdot)$ et $\hat{\psi}_t = \psi(t\cdot)$. On a alors en posant $B = \|\hat{W}\|_{L^\infty}$,

$$\sup_{t>0} \|\widehat{W^{(t)}}\|_{L^\infty} \leq \|\hat{\psi}\|_{L^\infty} B, \quad \sup_{t>0} |W^{(t)}(x)| \leq \frac{C(\psi)A}{|x|^m}, \quad \sup_{t>0} |\nabla W^{(t)}(x)| \leq \frac{C(\psi)A}{|x|^{m+1}}$$

avec $C(\psi) := \sup_{|\gamma|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^m} |\xi|^{|\gamma|}|\hat{\psi}(\xi)|d\xi$. En effet, la première estimation est directe. La seconde vient du fait que pour $|x| \leq 2t$,

$$W^{(t)}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\psi}_t \hat{W}\right](x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2i\pi x\cdot\xi}\hat{W}(\xi)\hat{\psi}(t\xi)d\xi$$

pour $|x| \geq 2t$, on a

$$\partial^\beta W^{(t)}(x) = \int_{B(0,t)} \partial^\beta K(x-y)\psi_t(y)dy$$

On prend maintenant a un L^2-atome pour $\mathcal{H}^1$, que l'on peut supposer être supporté dans un cube Q centré en 0. On considère Q^*le cube de taille $2\sqrt{m}l(Q)$ où $l(Q)$ est la longueur d'un côté de Q. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{Q^*} |M(T(a);\psi)(x)|dx &\leq \|\psi\|_{L^1} \int_{Q^*} |M(T(a))(x)|dx \\
&\leq c|Q^*|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q^*} |M(T(a))(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq c|Q^*|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q^*} |T(a)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{car } M : L^2 \to L^2 \text{ est borné} \\
&\leq cB|Q|^{1/2} \left(\int_{Q} |a(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{car } T : L^2 \to L^2 \text{ est borné par hypothèse} \\
&\leq c(m,\psi)B
\end{aligned}$$

Il reste à estimer $M(T(a),\psi)$ sur $(Q^*)^c$. Soit $x \notin Q^*$ et $y \in Q^*$. Alors $|x| \geq 2|y|$ et $x - y \neq 0$. Par conséquent, en notant $K^{(t)} = \psi_t * K$,

$$T(a) * \psi_t(x) = a * W^{(t)}(x) = \int_Q K^{(t)}(x-y)a(y)dy$$

Comme $\int a = 0$ (c'est un L^2-atome pour $\mathcal{H}^1$), pour tout $y \in Q$ il existe $\theta_y \in (0,1)$ vérifiant

$$T(a) * \psi_t(x) = \int_Q a(y) \left[K^{(t)}(x-y) - K^{(t)}(x) \right] dy = \int_Q a(y) \left(\sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha K^{(t)}(x - \theta_y y) y^\alpha \right) dy$$

Par conséquent, comme $\|a\|_{L^2} \leq |Q|^{-1/2}$,

$$|T(a) * \psi_t(x)| \leq c(m,\psi) \frac{A}{|x|^{m+1}} \int_Q |a(y)||y|dy \leq c \frac{A}{|x|^{m+1}} |Q|^{\frac{1}{m}+\frac{1}{2}} \|a\|_{L^2} \leq c \frac{A}{|x|^{m+1}} |Q|^{\frac{1}{m}}$$

De sorte que

$$\int_{(Q^*)^c} \sup_{t>0} |T(a) * \psi_t(x)|dx \leq c(m,\psi)A|Q|^{\frac{1}{m}} \int_{(Q^*)^c} \frac{dx}{|x|^{m+1}} \leq cA$$

Ainsi, $\|T(a)\|_{\mathcal{H}^1} \leq c(m,\psi)(A+B)$ pour tout L^2-atome a.
Considérons maintenant $f \in L^2 \cap \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ (qui est dense dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$). On peut décomposer $f = \sum_j \lambda_j a_j$ pour des L^2-atomes a_j de $\mathcal{H}^1$ et la série converge dans $\mathcal{H}^1$ avec $\sum_j |\lambda_j| \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$.
Pour $M \in \mathbb{N}$, notons $f_M := \sum_{j=1}^M \lambda_j a_j$ de sorte que $f_M \xrightarrow[M\to\infty]{\mathcal{H}^1} f$.
Comme $\|T(f_M) - T(f_{M'})\|_{\mathcal{H}^1} \leq c \sum_{j=\min(M,M')}^{\max(M,M')} |\lambda_j|$, $(T(f_M))_{M\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^1$ et donc converge vers un certain $g \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$. Montrons que $(T(f_M))_{M\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(f)$ dans S'. Cela permettra d'obtenir la convergence de $\sum_j \lambda_j T(a_j)$ dans $\mathcal{H}^1$ vers f.
Pour cela, on régularise K. On considère $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ supportée dans $B(0,1)$ d'intégrale 1. Pour $\delta > 0$, on pose $\theta_\delta := \delta^{-m}\theta(\delta^{-1}\cdot)$. Pour $\epsilon, \mu > 0$ avec $0 < 10\delta < \epsilon < (10\mu)^{-1}$, on pose

$$K_{\epsilon,\mu} : x \mapsto (\eta(\epsilon^{-1}x) - \eta(\mu x))K(x), \qquad K_{\delta,\epsilon,\mu} := \theta_\delta * K_{\epsilon,\mu}$$

On remarque que $K_{\delta,\epsilon,\mu}$ est C^∞ à décroissance rapide ($\eta(x)$ vaut 1 pour $|x|$ grand et θ_δ est à support compact) donc $K_{\delta,\epsilon,\mu} \in S(\mathbb{R}^m)$ et vérifie les mêmes hypothèses que K. On considère alors l'opérateur $T_{\delta,\epsilon,\mu}$ l'opérateur de

convolution avec $K_{\delta,\epsilon,\mu}$.
Par conséquent,

$$\forall \delta, \epsilon, \mu, \quad T_{\delta,\epsilon,\mu}(f_M) \xrightarrow[M\to\infty]{S'} T_{\delta,\epsilon,\mu}(f)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
|\langle T(f_M), \phi\rangle - \langle T_{\delta,\epsilon,\mu}(f_M), \phi\rangle| &= \left|\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \langle (K_{\delta,\epsilon,\mu} - W) * a_j, \phi\rangle\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{M} |\lambda_j| \|a_j\|_{L^2} \|(\tilde{K}_{\delta,\epsilon,\mu} - \tilde{W}) * \phi\|_{L^2} \\
&\leq c\|f\|_{\mathcal{H}^1} \|(\tilde{K}_{\delta,\epsilon,\mu} - \tilde{W}) * \phi\|_{L^2} \\
&\leq c\|f\|_{\mathcal{H}^1} \|(\hat{K}_{\delta,\epsilon,\mu} - \hat{W})\hat{\tilde{\phi}}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Etant donné $\epsilon > 0$, $\phi \in S(\mathbb{R}^m)$, on peut donc prendre $\delta_0, \epsilon_0, \mu_0$ tels que

$$\forall M \in \mathbb{N}, \quad |\langle T(f_M), \phi\rangle - \langle T_{\delta_0,\epsilon_0,\mu_0}(f_M), \phi\rangle| < \epsilon\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

De même,

$$|\langle T(f), \phi\rangle - \langle T_{\delta_0,\epsilon_0,\mu_0}(f), \phi\rangle| \leq c\|f\|_{L^2} \|(\hat{K}_{\delta,\epsilon,\mu} - \hat{W})\hat{\tilde{\phi}}\|_{L^2} \leq \epsilon\|f\|_{L^2}$$

De plus, par convergence dans S', il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall M \geq M_0, \quad \forall M \in \mathbb{N}, \quad |\langle T_{\delta_0,\epsilon_0,\mu_0}(f), \phi\rangle - \langle T_{\delta_0,\epsilon_0,\mu_0}(f_M), \phi\rangle| < \epsilon$$

Il suit que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M_0 \in \mathbb{N},\ \forall M \geq M_0, \quad |\,\langle T(f_M), \phi\rangle - \langle T(f), \phi\rangle\,| \leq \epsilon(1 + c\|f\|_{\mathcal{H}^1} + \|f\|_{L^2})$$

Donc $(T(f_M))_{M\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(f)$ dans S' et donc dans $\mathcal{H}^1$. Ainsi, le calcul suivant est justifié :

$$\|T(f)\|_{\mathcal{H}^1} = \|\sum_j \lambda_j T(a_j)\|_{\mathcal{H}^1} \leq \sum_j |\lambda_j| \|T(a_j)\|_{\mathcal{H}^1} \leq c\sum_j |\lambda_j| \leq c\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

□

En particulier, les transformées de Riesz donnée par

$$\forall \alpha \in [\![1, m]\!],\ \forall f \in S(\mathbb{R}^m), \quad R_\alpha f(x) := \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{B(0,\epsilon)^c} \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x-y|^{m+1}} f(y)dy$$

Sont la convolution avec le noyau

$$K_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \frac{x_\alpha}{|x|^{m+1}}$$

qui vérifie les hypothèses du théorème. Donc les $R_\alpha : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^1$ sont continus. On renvoie à [16] chapitre 5 pour une étude des R_α sur les L^p. On obtient la caractérisation suivante de $\mathcal{H}^1$:

Théorème A.4.14 :

Pour $m \geq 2$, il existe $c = c(m) > 0$ tel que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^m), \quad c\|f\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|f\|_{L^1} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|R_\alpha f\|_{L^1}$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour f à valeurs réelles.
Considérons donc $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ à valeurs réelles telle que les $R_\alpha f$ soient intégrables.
Notons P_t le noyau de poisson (dont la transformée de Fourier est $e^{-2\pi t|\xi|}$). Pour $\alpha \in [\![1, m]\!]$, on pose $u_\alpha(x,t) := P_t * (R_\alpha f)(x)$ et $u_{m+1}(x,t) = P_t * f(x)$ de sorte que chaque u_α est harmonique sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ et vérifie le système, en notant $x_{m+1} = t$,

$$\sum_{\alpha=1}^{m+1} \partial_\alpha u_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \forall k, j \in [\![1, m+1]\!],\ \partial_k u_j - \partial_j u_k = 0$$

Ce qui se récrit en posant $F = (u_1, \cdots, u_{m+1})$, $\mathrm{div}(F) = 0$ et $\mathrm{curl}(F) = 0$ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ (on le vérifie en prenant la transformée de Fourier).

Lemme A.4.15 :

Soit $F = (u_1, \cdots, u_{m+1})$ comme ci-dessus. Alors

$$\forall q \geq \frac{m-1}{m}, \quad \Delta(|F|^q) \geq 0$$

Démonstration. On calcule

$$\sum_{\alpha=1}^{m+1} \partial^2_{\alpha\alpha}(|F|^q) = \sum_\alpha \partial_\alpha \left(q|F|^{q-2} \langle F, \partial_\alpha F\rangle\right) = q \sum_\alpha \left(|F|^{q-2} \left[\left\langle F, \partial^2_{\alpha\alpha} F\right\rangle + |\partial_\alpha F|^2\right] + (q-2)|F|^{q-4} \langle F, \partial_\alpha F\rangle^2\right)$$

Chaque u_j étant harmonique, on obtient $\Delta F = 0$ et donc le premier terme s'annule. Dans le cas où $q < 2$ (dans le cas contraire, on a déjà le résultat), il suffit de montrer que

$$\sum_\alpha \left\langle \frac{F}{|F|}, \partial_\alpha F \right\rangle^2 \leq \frac{m}{m+1} \sum_\alpha |\partial_\alpha F|^2$$

Posons $\nu := F/|F|$ et $A = (\partial_\alpha u_\beta)_{1 \leq \alpha, \beta \leq m+1}$. Comme $\mathrm{curl}(F) = 0$, A est symétrique et on peut la diagonaliser dans une base orthonormale : $A = PDP^T$. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m+1})$. Alors

$$\left(|A\nu|^2 \leq \frac{m}{m+1}|A|^2\right) \Leftrightarrow \left(\sum_\alpha (\lambda_\alpha \nu_\alpha)^2 \leq \frac{m}{m+1} \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2\right)$$

De plus, $\mathrm{div}(F) = 0$ donne que $tr(A) = 0$, i.e. $\sum_\alpha \lambda_\alpha = 0$, de sorte que si $\alpha_0 \in [\![1, m+1]\!]$ vérifie $|\lambda_{\alpha_0}| = \max_\alpha |\lambda_\alpha|$, on trouve

$$\sum_\alpha (\lambda_\alpha \nu_\alpha)^2 \leq |\lambda_{\alpha_0}|^2 |\nu|^2 = |\lambda_{\alpha_0}|^2 = \left|\sum_{\alpha \neq \alpha_0} \lambda_\alpha\right|^2 \leq m \sum_{\alpha \neq \alpha_0} |\lambda_\alpha|^2$$

□

Lemme A.4.16 :

Soit $0 < q < p < \infty$, si $\sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |F(x,t)|^p dx\right)^{1/p} \leq A < \infty$, alors il existe $c = c(m,p,q) > 0$ telle que la fonction maximale nontangentielle $|F|^*(x) := \sup_{t>0} \sup_{|x-y|<t} |F(y,t)|$ vérifie

$$\||F|^*\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq cA$$

Démonstration. Prenons $\epsilon > 0$ et posons $U(x,t) := |F(x,t+\epsilon)|^q$ et $V(x,t) := (|F(\cdot,\epsilon)|^q * P_t)(x)$.
On cherche à montrer que $U \leq V$.
Etant donné $\eta > 0$, on cherche une boule $B_R := \{(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \mid |x|^2 + t^2 < R^2\}$ telle que $U - V \leq \eta$ sur $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+) \setminus B_R$.
Supposons que ce soit fait. On a $U(\cdot,0) = V(\cdot,0)$ avec V harmonique et U sous-harmonique. Donc $U - V$ est sous-harmonique et le principe du maximum donne que $U - V \leq \eta$ sur B_R. Donc $U - V \leq \eta$ sur tout $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$. Comme η est arbitraire, on passe à la limite $\eta \to 0$ et on obtient $U \leq V$.
Montrons l'existence. Comme $|F|^q$ est sous-harmonique et $p > q$,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+, \quad |F(x,t)|^q \leq \frac{1}{|B((x,t),\frac{t}{2})|} \int_{B((x,t),\frac{t}{2})} |F(y,s)|^q dyds \leq \left(\frac{1}{|B((x,t),\frac{t}{2})|} \int_{B((x,t),\frac{t}{2})} |F(y,s)|^p dyds \right)^{\frac{q}{p}}$$

Par conséquent, si $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$,

$$|F(x,t+\epsilon)|^q \leq \left[\frac{c(m)}{(t+\epsilon)^{m+1}} \int_{\frac{1}{2}(t+\epsilon)}^{\frac{3}{2}(t+\epsilon)} \int_{|y| \geq |x| - \frac{1}{2}(t+\epsilon)} |F(y,s)|^p dyds \right]^{\frac{q}{p}}$$

Si $t + \epsilon \geq |x|$, on peut majorer :

$$U(x,t) \leq \left(\frac{c(m) A^p}{(t+\epsilon)^m} \right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{c' A^q}{|x|^{mq/p}}$$

qui est inférieur à $\eta/2$ pour $|(x,t)|$ assez grand.
Si $t + \epsilon < |x|$, on majore par

$$U(t,x) \leq \left[\frac{c(m)}{(t+\epsilon)^{m+1}} \int_{\frac{1}{2}(t+\epsilon)}^{\infty} \int_{|y| \geq \frac{1}{2}|x|} |F(y,s)|^p dyds \right]^{\frac{q}{p}} \leq \left[c \int_{\frac{1}{2}(t+\epsilon)}^{\infty} \int_{|y| \geq \frac{1}{2}|x|} |F(y,s)|^p dy \frac{ds}{s^{m+1}} \right]^{\frac{q}{p}}$$

Par hypothèse $(x,s) \mapsto \int_{|y| \geq \frac{1}{2}|x|} |F(y,s)|^p dy$ est borné donc la quantité ci-dessus tend vers 0 lorsque $|(x,t)| \to \infty$.
Par conséquent, il existe $R > 0$ tel que $\forall |(x,t)| \geq R,\ U(x,t) - V(x,t) \leq U(x,t) \leq \eta$.
La remarque du début donne $U \leq V$ partout.
L'hypothèse sur F implique que $(|F(\cdot,\epsilon)|^q)_{\epsilon > 0}$ est bornée dans $L^{p/q}$ avec $p/q > 1$. Il existe donc une suite $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ décroissante qui converge vers 0 telle que $(|F(\cdot,\epsilon_k)|^q)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un certain $h \in L^{p/q}(\mathbb{R}^m)$. Comme $P_t \in L^{(p/q)'}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad |F(\cdot,\epsilon_k)|^q * P_t(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} h * P_t(x)$$

Donc

$$\forall (x,t), \quad |F(x,t)|^q = \limsup_{k \to \infty} |F(x,t+\epsilon_k)|^q \leq \limsup_{k \to \infty} |F(\cdot,\epsilon_k)|^q * P_t(x) = h * P_t(x)$$

Et on obtient

$$|F|^*(x) \leq \left(\sup_{t>0} \sup_{|y-x|<t} |h| * P_t(y) \right)^{\frac{1}{q}} \leq c(m) M(h)(x)^{1/q}$$

Ainsi,

$$\| |F|^* \|_{L^p} \leq c(m) \| M(h)^{1/q} \|_{L^p} \leq c(m,p,q) \|h\|_{L^{p/q}}^{1/q} \leq c(m,p,q) \liminf_{k \to \infty} \| |F(\cdot,\epsilon_k)|^q \|_{L^{p/q}}^{1/q} \leq c(m,p,q) A$$

□

Comme le noyau de Poisson est une approximation de l'unité, $u_{m+1}(\cdot,t)$ converge vers f dans L^1 lorsque $t \to 0$. Pour montrer que $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, il suffit que montrer que $M(f;P) = \sup_{t>0} |u_{m+1}(\cdot,t)|$ est intégrable. Mais

$$M(f;P)(x) \leq \sup_{t>0} |F(x,t)| \leq |F|^*(x)$$

Or

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^m} |F(x,t)|dx \leq A_f := \|f\|_{L^1} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|R_\alpha f\|_{L^1}$$

Par conséquent, $\||F|^*\|_{L^1} \leq cA_f$ et le résultat suit. □

A.4.4 Dualité

Théorème A.4.17 :

> $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ est le dual de $VMO(\mathbb{R}^m)$.
> $BMO(\mathbb{R}^m)$ est le dual de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$.

Dualité $BMO - \mathcal{H}^1$. On note $\mathcal{H}^1_0(\mathbb{R}^m)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de L^2-atomes de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$.
Pour $b \in BMO(\mathbb{R}^m)$, on pose $L_b : g \in \mathcal{H}^1_0(\mathbb{R}^m) \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} gb$.
Soit $f \in \mathcal{H}^1$, $(a_k)_k$ une suite de L^2-atomes supportée dans $(Q_k)_k$ et $(\lambda_k)_k$ des scalaires tels que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq 2\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |L_b(\sum_{k=N}^{M} \lambda_k a_k)| &= \left| \sum_{k=N}^{M} \lambda_k \int_{Q_k} a_k(x)(b(x) - b_{Q_k})dx \right| \\ &\leq \sum_{k=N}^{M} |\lambda_k| \|a_k\|_{L^2} |Q_k|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |b(x) - b_{Q_k}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(m)\|b\|_{BMO} \sum_{k=N}^{M} |\lambda_k| \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc $(L_b(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_k))_N$ est une suite de Cauchy et donc converge, on pose $L_b(f)$ cette limite. L'inégalité montre que $|L_b(f)| \leq C(m)\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|b\|_{BMO}$.
Réciproquement, considérons $L \in (\mathcal{H}^1$. Notons $L^2_0(Q) \subset L^2(Q)$ l'ensemble des fonctions de moyenne nulle et montrons que $L^2_0(Q) \subset \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ avec

$$\forall g \in L^2_0(Q), \quad \|g\|_{\mathcal{H}^1} \leq C(m)|Q|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2}$$

Pour cela, prenons $\psi \in S(\mathbb{R}^m)$ vérifiant les conditions pour définir une décomposition de Littlewood-Paley. Soit $g \in L^2_0(Q)$. Il suffit d'estimer la norme L^1 de $\left(\sum_j |\Delta_j(g)|^2\right)^{1/2}$. D'abord,

$$\int_{3\sqrt{m}Q} \left(\sum_j |\Delta_j(g)|^2 \right)^{1/2} dx \leq c(m)|Q|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2}$$

Ensuite, pour $x \notin 3\sqrt{m}Q$, la propriété de la valeur moyenne donne, en notant c_Q le centre de Q,

$$|\Delta_j(g)(x)| \leq \frac{c(m)\|g\|_{L^2} 2^{mj+j}}{(1+2^j|x-c_Q|)^{m+2}} |Q|^{\frac{1}{m}+\frac{1}{2}}$$

Par conséquent,

$$\int_{(3\sqrt{m}Q)^c} \left(\sum_j |\Delta_j(g)|^2 \right)^{1/2} dx \leq c(m)|Q|^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2}$$

Et on obtient l'inclusion voulue. Ainsi, on trouve l'inégalité $\|L\|_{L^2_0(Q)\to\mathbb{C}} \leq c(m)|Q|^{\frac{1}{2}}\|L\|_{\mathcal{H}^1\to\mathbb{C}}$ et par le théorème de représentation de Riesz sur $L^2_0(Q)$, il existe $F^Q \in L^2_0(Q)/\mathbb{C}$ telle que

$$\forall g \in L^2_0(Q), \quad L(g) = \int_Q F^Q(x)g(x)dx$$

avec $\|F^Q\|_{L^2(Q)} \leq \|L\|_{L^2_0(Q)\to\mathbb{C}}$. Remarquons que si $Q \subset Q'$ sont deux cubes, alors

$$\forall g \in L^2_0(Q), \quad \int_Q (F^{Q'}(x) - F^Q(x))g(x)dx = 0$$

Donc $F^{Q'} - F^Q$ est nulle dans $L^2_0(Q)/\mathbb{C}$ et donc F^Q et $F^{Q'}$ diffèrent d'une constante sur Q. En particulier,

$$F^{Q'} - F^Q - (F^{Q'} - F^Q)_Q = 0$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $Q_p := [-p,p]^m$ et définissons

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in Q_p, \quad b(x) = F^{Q_p}(x) - \frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} F^{Q_p}(y)dy$$

Ainsi, pour tout cube Q, il existe $C_Q \in \mathbb{C}$ telle que $F^Q = b - C_Q$ sur Q et donc

$$\forall Q \text{ cube},\ \forall g \in L^2_0(Q), \quad L(g) = \int_Q b(x)g(x)dx$$

Il reste à montrer que $b \in BMO(\mathbb{R}^m)$.

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |b(x) - C_Q|dx = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |F^Q| \leq \sup_Q |Q|^{\frac{1}{2}-1}\|F^Q\|_{L^2(Q)} \leq \sup_Q |Q|^{-\frac{1}{2}}\|L\|_{L^2_0(Q)\to\mathbb{C}} \leq c(m)\|L\|_{\mathcal{H}^1\to\mathbb{C}}$$

Ainsi $b \in BMO(\mathbb{R}^m)$ et

$$\forall g \in \mathcal{H}^1_0(\mathbb{R}^m), \quad L(g) = \int_{\mathbb{R}^m} b(x)g(x)dx$$

On peut donc étendre l'égalité par continuité sur $\mathcal{H}^1$. □

Une preuve adaptée de [18] :

Dualité VMO-$\mathcal{H}^1$. Par définition de VMO, on a $VMO(\mathbb{R}^m) \subset BMO(\mathbb{R}^m)$ avec $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)' \simeq BMO(\mathbb{R}^m)$. Par conséquent, $\mathcal{H}^1 \subset (VMO)'$ et on a

$$\forall v \in VMO(\mathbb{R}^m), \quad [\forall f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m),\ \langle f, v\rangle = 0] \Rightarrow v = 0$$

Ainsi, $\mathcal{H}^1$ est dense dans $(VMO)'$. Considérons $x^* \in VMO(\mathbb{R}^m)'$. Il existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall v \in C_c(\mathbb{R}^m), \quad \int_{\mathbb{R}^m} f_k v \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle x^*, v\rangle$$

Et le théorème de Banach-Steinhauss donne que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{H}^1$. On effectue la décomposition atomique de chaque f_k : il existe des L^2-atomes $A^k_{j,Q}$ et des scalaires $\lambda^k_{j,Q}$ vérifiant

$$\forall k, \quad f_k = \sum_{Q\in\mathcal{D}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda^k_{j,Q} A^k_{j,Q}, \qquad \sum_{j,Q} |\lambda^k_{j,Q}| \leq c(m)\|f\|_{\mathcal{H}^1} \leq C$$

En supposant que lorsque $\lambda^k_{j,Q} \neq 0$, on ait $\|A^k_{j,Q}\|_{L^2} \leq |Q|^{-1/2}$ et $\mathrm{supp}(A_{j,Q}) \subset Q$, et lorsque $\lambda^k_{j,Q} = 0$, on a aussi $A^k_{j,Q} = 0$.
Ainsi, pour tout $(j,Q) \in \mathbb{N}\times\mathcal{D}$, les suites $(\lambda^k_{j,Q})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(A^k_{j,Q})_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{C}$ et dans L^2. Quitte à extraire par un procédé d'extraction diagonale, on peut supposer que chaque $(\lambda^k_{j,Q})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\lambda_{j,Q} \in \mathbb{C}$ et $(A^k_{j,Q})_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un certain $A_{j,Q} \in L^2(\mathbb{R}^m)$. On vérifie que les $A_{j,Q}$ sont bien des L^2-atomes : $\|A_{j,Q}\|_{L^2} \leq \liminf_{k\to\infty} \|A^k_{j,Q}\|_{L^2} \leq |Q|^{-1/2}$ et $\int A_{j,Q} = \lim_{k\to\infty} \int A^k_{j,Q} = 0$.
Comme $\left(\sum_{j,Q} |\lambda^k_{j,Q}|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, $\sum_{j,Q} |\lambda_{j,Q}|$ est finie et on peut passer à la limite pour tout $v \in C_c(\mathbb{R}^m)$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_k v = \sum_{j,Q} \lambda^k_{j,Q} \int_{\mathbb{R}^m} A^k_{j,Q} v \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{j,Q} \lambda_{j,Q} \int_{\mathbb{R}^m} A_{j,Q} v$$

Comme $\sum_{j,Q} \lambda_{j,Q} A_{j,Q} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, on obtient $x^* \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et le résultat suit. □

Un résultat de [19] :

Théorème A.4.18 :

Soit $u \in W^{1,m}(\mathbb{R}^m)$, alors $\det(du) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et

$$\|\det(du)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} \leq C(m)\|u\|_{W^{1,m}(\mathbb{R}^m)}$$

Soit $\phi \in H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ et $E \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ de divergence nulle. Alors $\langle\nabla\phi, E\rangle \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et

$$\|\langle\nabla\phi, E\rangle\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} \leq C(m)\|\phi\|_{H^1(\mathbb{R}^m)}\|E\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$$

Démonstration. On remarque que le premier point est une conséquence directe du second.
Soit $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^m)$ telle que $\mathrm{supp}(\psi) \subset B(0,1)$, $\int_{\mathbb{R}^m} \psi = 1$, et pour $t > 0$, on note $\psi_t : x \mapsto t^{-m}\psi(x/t)$. Fixons $x \in \mathbb{R}^m$. En intégrant par parties, on trouve pour tout $\bar\phi \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
|\langle\nabla\phi, E\rangle * \psi_t(x)| &= \left|\int_{B(x,t)} E(y)[\phi(y)-\bar\phi]\frac{1}{t^{m+1}}\nabla\psi(\frac{x-y}{t})\,dy\right| \\
&\leq \|\nabla\psi\|_{L^\infty}\frac{|B(0,1)|}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|E(y)|\left|\frac{\phi(y)-\bar\phi}{t}\right|dy \\
&\leq C\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|E(y)|^2dy\right)^{1/2}\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}\left|\frac{\phi(y)-\bar\phi}{t}\right|^2dy\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Avec $\bar{\phi} = |B(0,1)|^{-1} \int_{B(0,1)} \phi(x+tz)dz$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}\left|\frac{\phi(y)-\bar{\phi}}{t}\right|^2 dy\right)^{1/2} &= \left(\frac{1}{t^2|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}\left|\phi(x+tz)-\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}\phi(x+t\bar{z})dz\right|^2 dz\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{1}{t^2|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}|t\nabla\phi(x+tz)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|\nabla\phi(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Il suit

$$|\langle\nabla\phi, E\rangle * \psi_t(x)| \leq C\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|E(y)|^2 dy\right)^{1/2}\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|\nabla\phi(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

Et le théorème maximal permet de conclure. □

Une petite amélioration de [9] :

Proposition A.4.19 :

Soit $a \in W^{1,2}(B_{\mathbb{R}^m}(0,2\rho))$, $\Gamma \in L^2(B_{\mathbb{R}^m}(0,\rho);\mathbb{R}^m)$ de divergence nulle et $c \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(B_{\mathbb{R}^m}(0,\rho))$. Alors $\langle\nabla a, \Gamma\rangle c \in \mathcal{H}^1(B_{\mathbb{R}^m}(0,\rho))$ et

$$\|\langle\nabla a,\Gamma\rangle c\|_{\mathcal{H}^1(B_{\mathbb{R}^m}(0,\rho))} \leq C(m,p)\|\Gamma\|_{L^2(B_{\mathbb{R}^m}(0,\rho))}\|\nabla c\|_{L^2(B_{\mathbb{R}^m}(0,\rho))} \sup_{B(x,r)\subset B(0,2\rho)}\left(\frac{1}{r^{m-p}}\int_{B(x,r)}|\nabla a|^p\right)^{1/p}$$

Démonstration. On prolonge toutes nos fonctions par des fonctions à support compact sur $\mathbb{R}^m$ (en gardant un contrôle sur la norme). On prend ψ comme dans la preuve précédente et on effectue le même calcul : pour tout $\bar{a} \in \mathbb{R}$, et $B(x,t) \subset B(0,\rho)$,

$$\begin{aligned}
|(\langle\nabla a,\Gamma\rangle c) * \psi_t(x)| &= \left|\int_{B(x,t)}(a(y)-\bar{a})\Gamma(y)\cdot\nabla_y\left(c(y)\psi_t(x-y)\right)dy\right| \\
&= \left|\frac{1}{t^m}\int_{B(x,t)}\frac{a(y)-\bar{a}}{t}c(y)\Gamma(y)\cdot\nabla\psi(\frac{x-y}{t})dy + \int_{B(x,t)}(a(y)-\bar{a})\psi_t(x-y)\Gamma(y)\cdot\nabla c(y)dy\right|
\end{aligned}$$

En suivant la même preuve que précédemment, on trouve

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{t^m}\int_{B(x,t)}\frac{a(y)-\bar{a}}{t}c(y)\Gamma(y)\cdot\nabla\psi(\frac{x-y}{t})dy\right| &\leq C\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|c\Gamma|^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|\nabla a|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C\|c\|_{L^\infty}\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|\Gamma|^2\right)^{1/2}\sup_{B\subset B(0,2\rho)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\nabla a|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Or $c = 0$ sur $\partial B(0,\rho)$ donc $\|c\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla c\|_{L^2}$ et le théorème maximal donne l'estimation voulue.
Pour le second membre, avec $\bar{a} = t^{-m}\int_{B(x,t)} a$, on a

$$|a(y)-\bar{a}||\psi_t(x-y)| \leq \frac{\|\psi\|_{L^\infty}}{t^{2m}}\int_{B(x,t)}|a(y)-a(z)|dz \leq \frac{C}{t^{2m-1}}\int_{B(x,2t)}|\nabla a| \leq \frac{C}{t^{2m}}\sup_{B\subset B(0,2\rho)}\left(\frac{1}{t^{m-p}}\int_B|\nabla a|^p\right)^{1/p}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(x,t)}(a(y)-\bar{a})\psi_t(x-y)\Gamma(y)\cdot\nabla c(y)dy\right| &\leq C\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|\nabla c|^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|\Gamma|^2\right)^{1/2}\\ &\quad\times\sup_{B\subset B(0,2\rho)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\nabla a|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Et le théorème maximal permet de conclure. □

Théorème A.4.20 :

Soit $\phi\in L^1(B(0,R))$ et $f\in\mathcal{H}^1(B(0,R))$ (i.e. f admet une extension $\hat{f}\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$) vérifiant

$$\begin{cases}\Delta\phi=f & \text{dans } B(0,R)\\ \phi=0 & \text{sur } \partial B(0,R)\end{cases}$$

Alors $\phi\in W_0^{2,1}(B(0,R))$ et

$$\|\phi\|_{W^{2,1}}\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1}$$

Démonstration. On peut étendre ϕ par 0 en dehors de $B(0,R)$, de sorte que $\phi\in L^1(\mathbb{R}^m)$. Comme les transformées de Riesz sont continues de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, on obtient $\|\nabla^2\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}\leq c\|\hat{f}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)}$.
Comme $\phi=0$ sur $B(0,R)^c$, on a $\|\phi\|_{L^1}\leq c\|\nabla\phi\|_{L^1}\leq c'\|\nabla^2\phi\|_{L^1}$ permet de conclure. □

A.5 Inégalité de Polya-Szego

Les preuves viennent de [20].

Proposition A.5.1 : Formule de la coaire

Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert, $u\in Lip(\Omega;\mathbb{R})$ et $g\in L^1(\Omega)$. Alors on notant $\mathcal{H}^{n-1}$ la mesure de Hausdorff $(n-1)$-dimensionnelle,

$$\int_\Omega g(x)|\nabla u(x)|dx=\int_{\mathbb{R}}\int_{u^{-1}(t)}g(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x)dt$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $g\geq 0$, g continue et u de classe C^{n+1}.
Soit $g\in L^1(\Omega)$ positive. Considérons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\phi(t):=\int_{\{u>t\}}g|\nabla u|$. Alors ϕ est décroissante, continue ($\nabla u=0$ pp sur les ensembles de la forme $\{u=c\}$). Maintenant, le théorème de Sard dit que si u est de classe C^{n+1} alors l'ensemble des t tels que $\{u=t\}$ contient un point critique est de mesure nulle.

Considérons donc $t\in\mathbb{R}$ tel que $\{u=t\}$ ne contienne aucun point critique de u.
Pour $h>0$ assez petit, $\{t\leq u\leq t+h\}$ peut être décrit par un système de coordonnées $x:(\lambda,\xi)\in[0,h]\times\mathbb{R}^{n-1}\mapsto x(\lambda,\xi)\in\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\lambda\in[0,h]$, $x(\lambda,\cdot)$ est une paramétrisation de $\{u=t+\lambda\}$ et $x(\cdot,\xi)$ est une paramétrisation des trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau de u. Pour cela, on considère $x(0,\cdot)$ une paramétrisation de $\{u=t\}$ et on considère x solution de $\partial_\lambda x=\nabla u(x)/|\nabla u(x)|^2$.
Ainsi, $|\partial_\lambda x|=1/|\nabla u(x)|$, $\partial_\lambda x$ est orthogonal à $\partial_{\xi_k}x$ et $\partial_{\xi_k}x(\lambda,\xi)=_{\lambda\to 0}\partial_{\xi_k}x(0,\xi)+O(\lambda)$ de sorte que

$$\phi(t+h)-\phi(t)=-\int_0^h\int_{\mathbb{R}^{n-1}}g(x(\lambda,\xi))\left(\sqrt{\det(\langle\partial_{\xi_i}x(0,\xi),\partial_{\xi_j}x\rangle(0,\xi))_{i,j}}+O(\lambda)\right)d\xi d\lambda=-h\int_{\{u=t\}}gd\mathcal{H}^{n-1}+o(h)$$

Donc ϕ est dérivable en t, pour presque tout t. Par conséquent, par continuité de ϕ,

$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) - \phi(s) = -\int_s^t \int_{\{u=\tau\}} g d\mathcal{H}^{n-1} d\tau$$

On obtient le résultat en prenant les limites $t \to \infty$ puis $s \to 0$. □

On rappelle qu'étant donné une fonction mesurable $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, le réarrangement symétrique décroissant $u^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est l'unique fonction telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u^*)^{-1}[(t,+\infty)]$ est une boule centrée en l'origine et ayant la même mesure que $u^{-1}[(t,+\infty)]$.
De manière équivalente, u^* est l'unique fonction radiale, radialement décroissante, dont les sous-niveau stricts sont ouverts et de même mesure que ceux de u. On a la formule suivante, avec $d_u(t) := |\{u > t\}|$ et ω_n la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^n$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u^*(x) := \sup\{t \geq 0 \mid d_u(t) > \omega_n |x|^n\}$$

Proposition A.5.2 : Inégalité de Polya-Szego

Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ alors $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p$$

Démonstration. La formule de la coaire donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p = \int_0^{+\infty} \int_{u^{-1}(t)} |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1} dt$$

Par l'inégalité de Hölder, pour presque tout $t \in (0,+\infty)$,

$$\mathcal{H}^{n-1}(u^{-1}(t)) \leq \left(\int_{u^{-1}(t)} |\nabla u|^p \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla u|} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{u^{-1}(t)} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla u|} \right)^{1-\frac{1}{p}} \qquad (*)$$

Et par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \geq \int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(u^{-1}(t))^p}{\left(\int_{u^{-1}(t)} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla u|} \right)^{p-1}} dt$$

Comme $(u^*)^{-1}[(t,+\infty)]$ est une boule de même mesure que $u^{-1}[(t,+\infty)]$, l'inégalité isopérimétrique donne $\mathcal{H}^{n-1}((u^*)^{-1}(t)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(u^{-1}(t))$.
Dans le cas où u est lipschitzienne, pour $t > h > 0$

$$\int_{\{t-h<u\leq t\}} |\nabla u| = \int_{t-h}^t \mathcal{H}^{n-1}(\{u = \tau\}) d\tau$$

L'inégalité isopérimétrique donne également $d_u(t)^{1-\frac{1}{n}} \leq (\omega_n^{1/n}/n)\mathcal{H}^{n-1}(\{u = t\})$ et donc

$$\|\nabla u\|_{L^\infty}(d_u(t-h) - d_u(t)) \geq c(n) d_u(t)^{1-\frac{1}{n}} h$$

Et la définition de u^* donne que u^* est lipschitzienne, par conséquent dérivable presque partout. On remarque qu'il y a égalité dans $(*)$ lorsque $|\nabla u|$ est constant sur $\{u = t\}$ pour presque tout t. C'est le cas pour des fonctions radiales. De plus,

$$d_u(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{u>t\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|} dx = \int_0^\infty \int_{\{u=\tau\}} \mathbf{1}_{\{u>t\}} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla u|} = \int_t^\infty \int_{\{u=t\}} \frac{\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla u|} dt$$

Comme $d_u = d_{u^*}$, on arrive à la conclusion $\int_{\{u=t\}} \frac{\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla u|} = \int_{\{u=t\}} \frac{\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla u^*|}$ pour presque tout t et le théorème est vérifié pour u lipschitzienne.
Les fonctions lipschitziennes étant denses dans $W^{1,p}$, on obtient le résultat. □

A.6 Systèmes elliptiques

A.6.1 Estimations de Schauder

La preuve de ce qui suit vient de [21] et reprend successivement les théorèmes 4.4 (p.63), 4.9 (p.66) et 4.11 (p.68).

Proposition A.6.1 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert C^1 et $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ une solution faible de

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad -\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^j) = f_i - \partial_\alpha F_i^\alpha$$

avec $f_i, F_i^\alpha \in L^2(\Omega)$ et $A_{ij}^{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$ tels qu'il existe $K > 0$ vérifiant

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^m, \quad A_{ij}^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\eta^i\eta^j \geq K|\xi|^2|\eta|^2$$

Alors il existe $C > 0$ dépendant de $\|A\|_{L^\infty}$ et de K tel que pour tout $B(x_0, R) \subset \Omega$ et $\rho \in (0, R)$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^m, \quad \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u|^2 \leq C\left(\frac{1}{(R-\rho)^2}\int_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,\rho)} |u-\xi|^2 + \int_{B(x_0,R)} \left(R^2|f|^2 + |F|^2\right)\right)$$

Démonstration. Supposons d'abord $f = 0$. Fixons $\rho \in (0, R)$.
Considérons $\eta \in C_c^\infty(\Omega; [0, 1])$ telle que $\eta = \begin{cases} 1 & \text{dans } B(x_0,\rho) \\ 0 & \text{dans } B(x_0,R)^c \end{cases}$ et $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{R-\rho}$. Alors en prenant $\xi \in \mathbb{R}^m$ et en considérant $(u-\xi)\eta^2$ comme fonction test :

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,R)} \eta^2|\nabla u|^2 &\leq K\int_{B(x_0,R)} \eta^2 A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^j\partial_\beta u^i \\
&\leq -K\int_{B(x_0,R)} 2\eta(u^i-\xi^i)A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^j\partial_\beta\eta + K\int_{B(x_0,R)} \left[\eta^2 F_i^\alpha\partial_\alpha u^i + 2\eta F_i^\alpha(u^i-\xi^i)\partial_\alpha\eta\right] \\
&\leq K\|A\|_{L^\infty}\int_{B(x_0,R)} \left[\epsilon\eta^2|\nabla u|^2 + \frac{4}{\epsilon(R-\rho)^2}|u-\xi|^2\right] + K\int_{B(x_0,R)} \left[\epsilon\|A\|_{L^\infty}\eta^2|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon\|A\|_{L^\infty}}|F|^2\right] \\
&\quad + K\frac{4\epsilon\|A\|_{L^\infty}}{(R-\rho)^2}\int_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,\rho)} |u-\xi|^2 + \frac{K}{\epsilon\|A\|_{L^\infty}}\int_{B(x_0,R)} |F|^2
\end{aligned}$$

par l'inégalité $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}$ et les propriétés sur η. En prenant $\epsilon = \frac{1}{4K\|A\|_{L^\infty}}$,

$$\int_{B(x_0,R)} \eta^2|\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{B(x_0,R)} \eta^2|\nabla u|^2 + C\left(\frac{1}{(R-\rho)^2}\int_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,\rho)} |u-\xi|^2 + \int_{B(x_0,R)} |F|^2\right)$$

Comme $\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u|^2 \leq \int_{B(x_0,R)} \eta^2|\nabla u|^2$, on obtient le résultat.
Maintenant, si $f_i \neq 0$, on pose

$$\tilde{F}_i^1(x) := \int_{-\infty}^{x_1} f_i(t, x_2, \cdots, x_n)\mathbf{1}_{B(x_0,R)}(t, x_2, \cdots, x_n)dt$$

et l'inégalité de Jensen donne $\int_{B(x_0,R)}(\tilde{F}_i^1)^2 \leq CR^2 \int_{B(x_0,R)} f_i^2$. $\square$

Pour le théorème suivant, on utilise la méthode des différences finies.
On note $e_1, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Etant donné une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $s \in [\![1, n]\!]$ et $h > 0$, on définit les quotients finis

$$\forall x \in \Omega_{s,h} := \{y \in \Omega \mid y + he_s\Omega\}, \quad \tau_{h,s}u(x) := \frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}$$

On rappelle (proposition 4.8, p.65 dans [21]) que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\Omega_0 \Subset \Omega$, alors pour $|h| < \frac{1}{2}\text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$, il existe $C = C(n) > 0$ telle que $\|\tau_{h,s}u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.
Réciproquement, si $u \in L^p(\Omega)$ et $L > 0$ vérifient pour tout $|h| < \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$, $\|\tau_{h,s}u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq L$, alors $u \in W^{1,p}(\Omega_0)$, $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq L$ et $\tau_{h,s}u \xrightarrow[h\to 0]{L^p(\Omega_0)} \partial_s u$.

Théorème A.6.2 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert C^1 et $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ une solution faible de

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad -\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^j) = f_i - \partial_\alpha F_i^\alpha$$

avec $f_i \in L^2(\Omega)$, $F_i^\alpha \in W^{1,2}(\Omega)$ et $A_{ij}^{\alpha\beta} \in Lip(\bar{\Omega})$ tels que il existe $K > 0$ vérifiant

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^m, \quad A_{ij}^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\eta^i\eta^j \geq K|\xi|^2|\eta|^2$$

Alors $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ et pour tout $\Omega_0 \Subset \Omega$, il existe $C > 0$ qui dépend de Ω_0, Ω, K et $\text{lip}(A)$, telle que

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega_0)} \leq c(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla F\|_{L^2(\Omega)})$$

Démonstration. Supposons $f = 0$.
Prenons $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pour $h > 0$ assez petit et $s \in [\![1, n]\!]$, $\phi(. - he_s)$ est une fonction test et

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x + he_s)\partial_\beta u^j(x + he_s)\partial_\alpha\phi^i(x)dx = \int_\Omega F_i^\alpha(x + he_s)\partial_\alpha\phi^i(x)dx$$

D'où

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x + he_s)\tau_{h,s}(\partial_\beta u^j)\partial_\alpha\phi^i + \int_\Omega(\tau_{h,s}A_{ij}^{\alpha\beta})(\partial_\beta u^j)(\partial_\alpha\phi^i) = \int_\Omega(\tau_{h,s}F_i^\alpha)(\partial_\alpha\phi^i)$$

Si on applique la proposition précédente à $v = \tau_{h,s}\nabla u = \nabla(\tau_{h,s}u)$, $R = 2\rho > 0$ et $B(x_0, 2R) \subset \Omega$,

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\tau_{h,s}\nabla u|^2 \leq C\left(\frac{1}{R^2}\int_{B(x_0,2\rho)} |\tau_{h,s}u|^2 + \int_{B(x_0,2\rho)} |\tau_{h,s}A|^2|\nabla u|^2 + \int_{B(x_0,2\rho)} |\tau_{h,s}F|^2\right)$$

On peut donc passer à la limite $h \to 0$ pour obtenir $\nabla u \in W^{1,2}(B(x_0, \rho))$ avec la borne

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla^2 u|^2 \leq C\left(\frac{1}{R^2}\int_{B(x_0,2\rho)} |\nabla u|^2 + \text{lip}(A)\int_{B(x_0,2\rho)} |\nabla u|^2 + \int_{B(x_0,2\rho)} |\nabla F|^2\right)$$

On trouve donc l'estimation voulue sur $B(x_0, \rho)$. Puis en recouvrant Ω_0 par des boules, on trouve le résultat.
Dans le cas où $f \neq 0$, on considère η une fonction cut-off et on prend $\phi := \tau_{-h,s}(\eta^2\tau_{h,s}u)$ comme fonction test. Alors

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i\partial_\beta\phi^i \geq c\int_\Omega |\nabla(\eta\tau_{h,s}u)|^2 - c'\int_\Omega \left[\eta^2|\nabla u|^2 + |\nabla\eta|^2|\tau_{h,s}u|^2\right]$$

Par conséquent,

$$c\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla(\tau_{h,s}u)|^2 = c\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla(\eta\tau_{h,s}u)|^2 \leq c\int_\Omega|\nabla(\eta\tau_{h,s}u)|^2 \leq c'\int_\Omega\left[\eta^2|\nabla u|^2+|\nabla\eta|^2|\tau_{h,s}u|^2\right]+\int_\Omega(|f||\phi|+|F||\nabla\phi|)$$

Le terme $\int|F||\nabla\phi|$ s'estime comme précédemment. Il reste à estimer $\int|f||\phi|$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega|f||\tau_{-h,s}(\eta^2\tau_{h,s}u)| &\leq \epsilon\int_\Omega|\nabla(\eta^2\tau_{h,s}u)|^2+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega|f|^2\\ &\leq \epsilon\int_\Omega|\nabla(\eta\tau_{h,s}u)|^2+\epsilon\int_\Omega|\nabla\eta|^2|\tau_{h,s}u|^2+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega|f|^2\end{aligned}$$

En injectant ceci dans l'estimation précédente, on trouve pour ϵ assez petit,

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla(\tau_{h,s}u)|^2 = \int_{B(x_0,\rho)}|\nabla(\eta\tau_{h,s}u)|^2 \leq C\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|\tau_{h,s}u|^2+|f|^2+|\nabla F|^2\right)$$

Et on conclut comme avant □

Théorème A.6.3 :

Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ouvert C^1, $k\in\mathbb{N}$ et $u\in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ une solution faible de

$$\forall i\in[\![1,m]\!],\quad -\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^j)=f_i-\partial_\alpha F_i^\alpha$$

avec

1. $A_{ij}^{\alpha\beta}\in C^{k,1}(\bar\Omega)$ tels que il existe $K>0$ vérifiant $\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall\eta\in\mathbb{R}^m,\quad A_{ij}^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\eta^i\eta^j\geq c|\xi|^2|\eta|^2$
2. $f_i\in W^{k,2}(\Omega)$
3. $F_i^\alpha\in W^{k+1,2}(\Omega)$

Alors $u\in W^{k+2,2}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ et pour tout $\Omega_0\Subset\Omega$, il existe $C>0$ dépendant de k, K, $\|A\|_{C^{k,1}}$ telle que

$$\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2(\Omega_0)}\leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|\nabla F\|_{W^{k,2}(\Omega)})$$

Démonstration. Le cas $k=0$ résulte du théorème précédent. Supposons le résultat vrai pour $k-1\geq 0$. Montrons le pour $k\geq 1$.
Etant donné $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$, on considère la fonction test $\phi:=\partial_s\psi$ avec $s\in[\![1,n]\!]$. Une intégration par parties donne

$$\int_\Omega\partial_s(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^j)\partial_\alpha\psi^i=\int_\Omega\partial_s f_i\psi^i+\int_\Omega\partial_s F_i^\alpha\partial_\alpha\psi^i$$

Et on obtient

$$\forall\psi\in C_c^\infty(\Omega),\quad \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta(\partial_s u^j)\partial_\alpha\psi^i=\int_\Omega\partial_s f_i\psi^i+\int_\Omega\left(-\partial_s A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^j+\partial_s F_i^\alpha\right)\partial_\alpha\psi^i$$

Et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tilde f_i:=\partial_s f_i$, $\tilde F_i^\alpha=-\partial_s A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^j+\partial_s F_i^\alpha$. □

Remarquons alors un phénomène intéressant pour les systèmes homogènes : $f = 0$ et $F = 0$.
Si $h \in C^\infty \cap W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ est solution de $\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta h^j) = 0$ alors pour $B(x_0, R) \subset \Omega$, la proposition 2.3.0.2 nous dit qu'en fait les nomes $W^{k,2}(B(x_0, R/2))$ de h sont toutes contrôlées par la norme $L^2(B(x_0, R))$ de h.
De plus, si $\rho < R/2$ et $k \in \mathbb{N}$ assez grand, on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\rho)} |h|^2 &\leq |B(x_0,1)|\rho^n \|h\|^2_{L^\infty(B(x_0,R/2)} \\
&\leq C(n,R,k)\rho^n \|h\|^2_{W^{k,2}(B(x_0,R/2))} \\
&\leq C(n,R,k,A,\Omega)\rho^n \|h\|^2_{L^2(B(x_0,R))}
\end{aligned}$$

Maintenant si l'on regarde l'écart de h à sa moyenne sur une boule, l'inégalité de Poincaré donne

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\rho)} |h - (h)_{B(x_0,\rho)}|^2 &\leq C\rho^2 \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla h|^2 \\
&\leq C\rho^{n+2} \int_{B(x_0,R/2)} |\nabla h|^2 \\
&\leq C\frac{\rho^{n+2}}{R^2} \int_{B(x_0,R)} |h - (h)_{B(x_0,R)}|^2
\end{aligned}$$

En effectuant des changement d'échelle, on obtient (théorème 5.8 p.80 de [21]) :

Proposition A.6.4 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $A_{ij}^{\alpha\beta} \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ vérifiant $A_{ij}^{\alpha\beta}\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \geq K|\xi|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et h solution de $-\partial_\beta(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha h^j) = 0$ sur Ω.
Alors il existe $C > 0$ dépendant de n, m, K, Ω telle que pour toute boule $B(x_0, R) \subset \Omega$ et $\rho < R$, on a

$$\int_{B(x_0,\rho)} |h|^2 \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B(x_0,R)} |h|^2$$

et

$$\int_{B(x_0,\rho)} |h - (h)_{B(x_0,\rho)}|^2 \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0,R)} |h - (h)_{B(x_0,R)}|^2$$

En utilisant des estimations de Morrey, on peut montrer un raffinement du théorème A.6.3 :

Théorème A.6.5 :

Soit $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ une solution faible de

$$\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^j) = f_i - \partial_\alpha F_i^\alpha$$

avec $A_{ij}^{\alpha\beta}, F_i^\alpha \in C^{k,\sigma}_{loc}(\Omega)$ et $f_i \in C^{k-1,\sigma}(\Omega)$, alors $u \in C^{k+1,\sigma}_{loc}(\Omega)$.

On renvoie à [21] (théorème 5.22) pour une preuve.

A.6.2 Systèmes à second membre quadratique

Une application harmonique continue est en fait hölderienne : (théorème 9.8, p.216 de [21])

Proposition A.6.6 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ solution faible de

$$-\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^i) = f_j(x,u,\nabla u)$$

où les $A_{ij}^{\alpha\beta}$ et f sont C^∞ vérifie $\forall(x,u,p),\ |f(x,u,p)| \leq C|p|^2$.
Si u est continue alors u est localement Hölder continue.

Démonstration. Soit $B(x_0,R) \subset \Omega$. On considère $h \in W^{1,2}(B(x_0,R);\mathbb{R}^m)$ solution de

$$-\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta h^i) = 0, \quad h-u \in W_0^{1,2}(B(x_0,R);\mathbb{R}^m)$$

Alors le théorème 2.3.0.4 donne que h est C^∞ et pour $\rho < R$, la proposition 2.3.0.2 appliquée à h et avec l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u|^2 \leq 4\left(C(A,R)\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B(x_0,R)} |\nabla h|^2 + \int_{B(x_0,R)} |\nabla(u-h)|^2\right)$$

Or $u-h$ vérifie la même équation que u et vaut 0 au bord de $B(x_0,R)$ donc :

$$\begin{aligned} K\int_{B(x_0,R)} |\nabla(u-h)|^2 &\leq \int_{B(x_0,R)} \partial_\alpha(u^i-h^i)A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta(u^j-h^j) \\ &\leq \int_{B(x_0,R)} (u-h)\cdot f(.,u,\nabla u) \\ &\leq C(f)\int_{B(x_0,R)} |u-h||\nabla u|^2 \leq C\omega(R)\int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

où ω est le module de continuité de u. Par conséquent,

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u|^2 \leq C\left(\left(\frac{\rho}{R}\right)^n + \omega(R)\right)\int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2$$

Donc pour tout $\tau \in (0,1)$, si l'on prend $\frac{1}{2} > \delta > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que $C(4\delta^2+\epsilon) < \tau$, pour $R > 0$ tel que $\omega(R) < \epsilon$ et $\rho = \delta R$, on a

$$\int_{B(x_0,\delta R)} |\nabla u|^2 \leq \tau \int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2$$

Donc pour tout $k \geq 1$,

$$\int_{B(x_0,\delta^k R)} |\nabla u|^2 \leq \tau^k \int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2$$

Maintenant, pour tout $\rho \in (0,R)$, il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $\delta^{k+1}R \leq \rho < \delta^k R$, on prend la partie entière de $\log(\rho/R)/\log(\delta)$ et on obtient

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u|^2 \leq \int_{B(x_0,\delta^k R)} |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2^k}\int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2 \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\log(\tau)}{\log(\delta)}} \int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2$$

Le corollaire 4.4.0.2 sur les estimations de Morrey donne que u est localement hölderienne. □

Revenons sur cette preuve en sachant que si u est une solution continue de $-\partial_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\beta u^i) = f_j(x,u,\nabla u)$, alors sur une boule $B(x_0,R) \subset \Omega$, le module de continuité vérifie $\omega(\rho) \leq \rho^\alpha$ pour un certain $\alpha > 0$. Ainsi l'estimation de ∇u se récrit

$$\int_{B(x_0,\delta R)} |\nabla u|^2 \leq C_\sigma \rho^{n-2(1-\sigma)}$$

pour tout $\sigma \in (0,1)$. De plus,

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\rho)}|^2 \leq C \left(\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0,R)} |\nabla h - (\nabla h)_{B(x_0,R)}|^2 + \int_{B(x_0,R)} |\nabla(u-h)|^2 \right)$$

Avec, en reprenant l'estimation de $\nabla(u-h)$ dans la preuve précédente, pour un certain $\epsilon > 0$:

$$\int_{B(x_0,R)} |\nabla(u-h)|^2 \leq CR^{n+\epsilon}$$

Donc

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\rho)}|^2 \leq C \left(\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0,R)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,R)}|^2 + R^{n+\epsilon} \right)$$

Et de même que dans la preuve précédente, on en déduit pour un certain $\alpha > 0$:

$$\forall \rho \in (0,R), \quad \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x_0,\rho)}|^2 \leq C\rho^{n+\alpha}$$

Les estimations de Morrey permettent de conclure que ∇u est hölderien.
Finalement, la continuité d'une solution implique la continuité hölderienne, qui implique la régularité C^1 et un argument bootstrap se met en place pour conclure que u a la régularité maximale.

Bibliographie

[1] Frédéric Hélein. *Harmonic Maps, Conservation Laws and Moving Frames.* Cambridge University Press, 2004.

[2] Tristan Rivière. Conformally invariant variational problems. 2012.

[3] Michael Grüter. Conformally invarant variational integrals and the removability of isolated singularties. *Manuscripta Mathematica*, 1984.

[4] D.Gilbard and N.S.Trudinger. *Ellipric Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 1998.

[5] Q.Han and F.Lin. *Elliptic Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2000.

[6] F.Da Lio. Remarks on neumann boundary problems involving jacobians. *Commications in Partial Differential Equations*, 2017.

[7] T.Iwaniec and G.Martin. *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis.* Oxford Mathematical Monographs, 2001.

[8] Karen Uhlenbeck. Connections with l^p bounds on curvature. *Communications in Mathematical Physics*, 1982.

[9] Armin Schikorra. A remark on gauge transformations and the moving frame method. *Annales Institut Henri Poincaré*, 2010.

[10] M.Struwe. *Plateau's Problem and the Calculus of Variations.* Princeton University Press, 1988.

[11] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol.4, Third Edition.* Publish or Perish, Inc., 1999.

[12] D.Fischer-Colbrie and R.Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Communcations of Pure and Applied Mathematics*, 1980.

[13] T.Rivière. Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres. *Acta Matematica*, 1995.

[14] P.Strzelecki. Stationary p-harmonic maps into spheres. *Banach Center Publications*, 1996.

[15] H.Takeuchi. Some conformal properties of p-harmonic maps and a regularity for sphere-valued p-harmonic maps. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 1992.

[16] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis.* Springer, 2009.

[17] Loukas Grafakos. *Modern Fourier Analysis.* Springer, 2009.

[18] R.Coifman and G.Weiss. Extensions of the hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Society*, 1977.

[19] R.Coifman, P.L.Lions, Y.Meyer, and S.Semmes. Compensated compactness and hardy spaces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1993.

[20] G.Talenti. Best constant in sobolev inequality. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1976.

[21] M.Giaquinta and L.Martinazzi. *An Introduction of the Regularity Theory for Elliptics Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs.* Scuola Normale Superiore Pisa, 2012.