Compléments d'analyse : Théorie de la mesure et analyse spectrale

Extrait d'un cours de M2 donné à l'automne 2014 à l'IMJ

Paul Laurain

14 avril 2022

Table des matières

1 Introduction **7**
1.1 Théorie de la mesure 7
1.2 Théorie spectrale 7

2 Rappels de théorie de la mesure **11**
2.1 Théorie élémentaire de l'intégrale de Lebesgue 11
2.2 Prolongement et complétion 15
2.3 Changement de variables 21
2.4 Intégration sur un espace produit 22
2.5 Mesure de Borel positive 26

3 Mesure de Lebesgue **29**
3.1 Construction de la mesure de Lebesgue 29
3.2 Ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue 30
3.3 L'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann . . . 31

4 Deux théorèmes fondamentaux **35**
4.1 Théorème de Riesz 35
4.1.1 Convergence et compacité faible des mesures de Radon 40
4.1.2 Mesure de Haar et analyse sur les groupes localement compacts 43
4.1.3 Représentation des groupes localement compacts 48
4.2 Mesures complexes, théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym et applications 49
4.2.1 Mesures complexes 49
4.2.2 Fonction maximale et points de Lebesgue 51
4.2.3 Théorème de Radon-Nikodym 55
4.2.4 Application 58

4.3 Théorème Fondamental de l'analyse 60
4.4 Ensemble rectifiable et inégalité isopérimétrique 64

5 Intégration à valeurs vectorielles 65
5.1 Intégration dans un espace réflexif 65
5.2 Intégrale de Bochner 66
5.3 Formule de Cauchy généralisée 68

6 Généralités sur les algèbres de Banach 69
6.1 Rappel sur les espaces de Banach 69
6.2 Définitions 70
6.3 Spectre d'un élément d'une algèbre de Banach 72
6.4 Idéaux, caractères et transformé de Gelfand 75
6.5 Exemples d'applications de la théorie de Gelfand 78
6.6 Théorème de Levy-Wiener 80

7 Opérateur sur un espace de Hilbert et C^*-algèbre 81

8 Théorèmes de Gelfand-Naimark 87
8.1 Théorème de Gelfand-Naimark(version commutative) 87
8.2 Calcul fonctionnelle continue 87
8.3 Etats, construction GNS 89
8.4 Théorème de Gelfand-Naimark 92

9 Opérateurs bornés 97
9.1 Rappel sur les espaces de Hilbert complexes 99
9.2 Généralités 99
9.3 Les opérateurs compacts 102
9.4 Alternative de Fredholm et spectre d'un opérateur compact . 103
9.5 Un exemple : le laplacien 107
9.5.1 Harmoniques sphériques et représentation de SO(3) . . 109
9.6 Operateur de Fredholm 112
9.7 Les opérateurs à trace, les opérateurs de Hilbert-Schmidt et les opérateurs à noyau 116
9.8 Théorème de décomposition spectrale 120
9.8.1 Mesures spectrales 120
9.8.2 Le théorème spectral 121
9.8.3 Applications 123

10 Opérateurs non-bornés **133**
10.1 Définitions et généralités 133
10.2 Le calcul fonctionnel borélien 139
10.3 Théorème spectral 144
10.3.1 Première version 144
10.3.2 Deuxième version 147
10.4 Un exemple : l'équation de Schrödinger 1D 149
10.4.1 L'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ 149
10.4.2 L'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + q$ 149
10.5 Application au flot d'opérateur 150
10.5.1 Equation de la chaleur 150
10.5.2 Equation de Schrödinger 154
10.5.3 L'equation des ondes 155
10.6 Le laplacien suite et fin 157
10.6.1 Deux exemples 157
10.6.2 Fonction de Green et Noyau de la chaleur 158

11 La physique quantique, une théorie d'opérateurs... **161**
11.1 Opérateurs position et moment 161
11.2 Les axiomes de base de la théorie quantique 163
11.3 L'équation de Schrödinger 165
11.4 L'interprétation d'Heisenberg 166
11.5 Solution de l'équation de Schrödinger libre sur $\mathbb{R}$ 167
11.6 L'oscillateur harmonique 168
11.7 Le moment angulaire en mécanique quantique et la notion de spin 170
11.8 La Quantification 172

12 Problèmes **173**

13 Solutions des exercices **191**

Bibliographie **220**

Chapitre 1

Introduction

1.1 Théorie de la mesure

Ce cours n'a en aucune manière la prétention d'être un cours complet d'intégration. Il s'agit simplement de rappeler les bases de cette théorie en insistant sur quelques points clefs afin de suivre sans difficulté la deuxième partie du cours consacrée à la théorie géométrique de la mesure. J'invite l'étudiant consciencieux à travailler ce document de base à l'aide des références qui l'ont inspiré : [Vil10] et [Rud80]. Mais on pourra aussi consulter [Tao11b] qui a un point de vue différent mais peut-être plus intuitif. Enfin dans l'optique du deuxième cours il peut être instructif de poursuitvre cette introduction à travers [EG92].

Une des applications que nous donnerons du théorème de Riesz est l'existence de mesure de Haar sur un groupe localement compact. On définira alors l'algèbre $L^1(G)$ et l'espace de Hilbert $L^2(G)$. Ces deux espaces nous permettront notamment de donner une courte introduction à l'analyse harmonique abstraite. Que ce soit à travers l'étude des caractères pour les groupes abéliens ou celle des représentations pour les groupes compacts.

1.2 Théorie spectrale

Soit E un espace hermitien et $L : E \to E$ un opérateur hermitien, alors le théorème spectral (classique) nous assure l'existence d'une base hermitienne (e_i) de E et d'une suite de réels (λ_i) tels que

$$L(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Dès lors, pour toute fonction continue $f : \sigma(L) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \to \mathbb{C}$ on peut définir $f(L) : E \to E$ comme suit

$$f(L)(e_i) = f(\lambda_i)e_i.$$

En particulier on peut définir e^{-tL} pour $t > 0$, e^{itL} pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\sqrt{L}}$ pour $t \in \mathbb{R}$ (si L est positif) et $(L - zId)^{-1}$ pour $z \notin \sigma(L)$ qui sont des solutions des équations différentielles ordinaires suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) &= 0 \text{ équation de la chaleur,}\\
\frac{\partial u}{\partial t} + +iL(u) &= 0 \text{ équation de Schrödinger,}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L(u) &= 0 \text{ équation des ondes,}\\
(L - zId)(u) &= f \text{ équation de Helmholtz.}
\end{aligned}$$

Si on l'on souhaite passer des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles, alors l'opérateurs L va devenir un opérateur différentiel, par exemple $\frac{\partial}{\partial x}$, et va donc agir sur un espace de fonctions qui sera de dimension infinie. L'un des objectif de ce cours est de donner une version du théorème spectral pour des espaces de dimension infinie. Ce qui nous permettra de résoudre les équations précédentes en toute généralité. Mais comme nous le verrons les applications de la théorie spectrale sont très larges, en particulier nous donnerons une preuve du théorème de Peter-Weyl sur la représentation des groupes compacts.

Dans un premier temps, nous étudierons l'algèbre des opérateurs sur un espace de Hilbert et plus généralement le concept de C^*-algèbre. Nous en profiterons pour donner une courte introduction à la théorie de Gelfand en démontrant notamment la version commutative du théorème de Gelfand-Naimark.

Dans un deuxième temps, nous reviendrons aux opérateurs continus auto-adjoint d'un espace de Hilbert et nous donnerons plusieurs versions du théorème spectral ainsi qu'une courte introduction à la théorie de Fredholm.

Comme les opérateurs différentiels auxquels on s'intéresse le plus souvent sont non-bornés et définis seulement sur un sous espace dense de l'espace de Hilbert ambiant : typiquement le laplacien Δ défini sur $C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Le but de l'avant dernier chapitre sera donc de généraliser ce qu'on aura vu pour les opérateurs bornés à des opérateurs non-bornés.

Enfin, nous donnons une très brève introduction à la mécanique quantique d'un point vue mathématique et plus précisément du point vu de la théorie des opérateurs.

Chapitre 2

Rappels de théorie de la mesure

2.1 Théorie élémentaire de l'intégrale de Lebesgue

Définition 2.1.1 *Une famille $\mathcal{M}$ de sous-ensembles d'un ensemble X constitue une σ-algèbre sur X si*

i) $X \in \mathcal{M}$,

ii) $\mathcal{M}$ *est stable par passage au complémentaire,*

iii) $\mathcal{M}$ *est stable par union dénombrable.*

Un ensemble X muni d'une σ-algèbre $\mathcal{M}$ est appelé un *espace mesurable*, on le note alors $(X, \mathcal{M})$.

Exercise 2.1.1 Montrer que toute partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ admet une plus petite σ-algèbre qui la contient. On la notera $\sigma(\mathcal{F})$, c'est la *σ-algèbre engendrée* par $\mathcal{F}$.

Définition 2.1.2 *Une fonction $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ entre deux espaces mesurables est dite mesurable si l'image réciproque de tout ensemble mesurable est mesurable.*

Cette définition n'est pas sans rappeler celle des fonctions continues. Or il semble nécessaire qu'une théorie de l'intégration contienne au moins les fonctions continues. Nous allons donc introduire la σ-algèbre engendrée par

les ensembles ouvert d'un espace topologique.

Soit (X, τ) un espace topologique, alors il existe une plus petite σ-algèbre sur X qui contient les ouverts de X, c'est $\sigma(\tau)$, mais on préféra la noter $\mathcal{B}(X)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur la topologie de X. Les éléments de $\mathcal{B}(X)$ sont appelés les *boréliens* de X. Dans la suite, on va tout particulièrement s'intéresser à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $[-\infty, +\infty]$ et $\mathbb{C}$. Dans ce cas on supposera ces espaces munis de leur topologie usuelle et on pourra parler sans ambiguité de fonctions mesurables à valeurs dans l'un de ces espaces .

Exercise 2.1.2 Montrer que les boréliens de $\mathbb{R}^k$ sont engendrés par les pavés ouverts bornés. Plus précisément, montrer que tout ouvert s'écrit comme une réunion dénombrable disjointe de pavés semi-ouverts.

Exercise 2.1.3 Montrer que $[0, 1)$ n'est pas union d'intervalles fermés disjoints.

Définition 2.1.3 *Une mesure positive (resp. complexe) est une fonction μ définie sur une σ-algèbre $\mathcal{M}$, à valeur dans $[0, \infty]$ (resp. $\mathbb{C}$) telle que pour toute famille (A_k) dénombrable d'éléments disjoints de $\mathcal{M}$ on ait :*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right).$$

Un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ muni d'une mesure positive (reps. complexe) est appelé un *espace mesuré* (resp. *espace mesuré complexe*), on le $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ou (X, μ) lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la σ-algèbre considérée. La construction d'une mesure intéressante, même sur $\mathbb{R}$ n'est pas une trivialité, ça sera l'objet de la section 3. Toutefois on peut se donner un premier exemple simple, en considérant $\mathbb{N}$, muni de la σ-algèbre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage δ.

Exercise 2.1.4 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que si A et B sont mesurables, on a

$$\text{si } A \subset B \text{ alors } \mu(A) \leq \mu(B),$$

et

$$\text{si } \mu(A \cap B) < +\infty \text{ alors } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Exercise 2.1.5 Soit (A_k) une famille croissante de parties mesurables d'un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$, montrer que

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Montrer que si on ne suppose pas que la famille est croissante on a tout de même

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k \mu(A_k).$$

Dans la suite on fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Définition 2.1.4 *Soit $s : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable étagée, c'est à dire*

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

où $a_i \in [0, \infty[$ et $\mathbf{1}_{A_i}$ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable A_i.

Nous définissons[1] *pour tout élément $E \in \mathcal{M}$*

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(E \cap A_i).$$

Lorsque $f : X \to [0, \infty]$ est une fonction mesurable et que $E \in \mathcal{M}$, on définit son intégrale comme suit

$$\int_E f\, d\mu = \sup \int_E s\, d\mu,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des fonctions mesurables étagées s vérifiant $0 \leq s \leq f$.

Exercise 2.1.6 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à la mesure de comptage, alors $\{x \mid f(x) > 0\}$ est dénombrable.

Même si la définition de l'intégrale est indépendante de l'existence d'une suite de fonctions simples qui approche la fonction à intégrer. Ce fait est crucial pour démontrer les propriétés de bases comme la linéarité.

1. Ici on utilise la convention $0 \times \infty = 0$.

Théorème 2.1.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante de fonctions simples (φ_n) qui converge simplement vers f.*

L'intégrale ainsi définie vérifie les propriétés classiques d'additivité et positivité [2], mais le grand intérêt de l'intégrale de Lebesgue est la facilité avec laquelle on peut passer à la limite, notamment grâce au théorème suivant.

Théorème 2.1.2 (théorème de convergence monotone) *Soit (f_n) une suite de fonctions positives mesurables sur X telle que*

i) $0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq \ldots,$

ii) $f_n(x) \to f(x)$ *pour tout* $x \in X$,

alors la fonction f est mesurable et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Définition 2.1.5 *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable, on dit que f est intégrable si*

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty.$$

On note alors $L^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables et on définit alors son intégrale comme suit, si $f = u + iv$, on pose

$$\int_X f \, d\mu = \int u^+ \, d\mu - \int u^- \, d\mu + i \int v^+ \, d\mu - i \int v^- \, d\mu.$$

L'intégrale ainsi définie vérifie les propriétés classiques de linéarité et l'inégalité triangulaire [3], mais conserve aussi un bon comportement vis à vis du passage à la limite, notamment grâce au théorème suivant.

Théorème 2.1.3 (théorème de convergence dominé) *Soit (f_n) une suite de fonctions complexes mesurables sur X telle que*

$$f_n(x) \to f(x) \text{ pour presque [4] tout } x \in X,$$

et telle qu'il existe $g : X \to [0, \infty]$ intégrable telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

alors la fonction f est intégrable et

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

2. voir [Vil10] II-43 pour les détails.
3. voir [Vil10] II-43 et II-47 pour les détails.
4. c'est à dire sur un ensemble Y telle que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

2.2 Prolongement et complétion

Afin de construire une mesure, nous aimerions définir sa valeur sur des objets élémentaire comme les boules d'un espace métrique, mais rien ne nous garantie que cela va bien définir une mesure sur la tribu borélienne. Pour cela on a besoin d'un théorème qui assure que le prolongement est possible, c'est l'objectif du théorème de Carathéodory. Mais avant on introduit le concept de mesure extérieur qui prolonge le concept de mesure à $\mathcal{P}(X)$ quitte à perdre la σ-additivité.

Définition 2.2.1 *On appelle mesure extérieur sur X tout application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ telle que*

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

ii) si $A \subset B$ alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

iii) $\mu^*\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$, *$\sigma$-sous-additivité.*

Exercise 2.2.1 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, on définit

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \mid A_k \in \mathcal{M} \text{ et } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\},$$

montrer μ^* est une mesure extérieur. Plus généralement si $\mathcal{F} \subset X$ et $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ alors cela définit une mesure extérieur, on parlera de mesure extérieur associé à μ, mais attention μ^* ne prolonge pas nécessairement μ.

Il nous faut également introduire le concept de classe monotone, essentiel dans la preuve dut théorème de Carathéodory.

Définition 2.2.2 *On appelle classe monotone une famille $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble X, telle que*

i) si $A, B \in \mathcal{C}$ et $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{C}$, stabilité par différence croissante,

ii) si $A_k \in \mathcal{C}$ et $A_k \subset A_{k+1}$ alors $\cup_k A_k \in \mathcal{C}$, stabilité par union croissante.

Exercice 2.2.1 (lemme des classes monotones) *Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties d'un ensemble X, stable par intersection finie. Soit $\mathcal{C}$ la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{F}$; on suppose que $X \in \mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ coïncide avec $\sigma(\mathcal{F})$.*
Indication : Montrer qu'il suffit d'avoir la stabilité par intersection. Puis soit

$A \in \mathcal{F}$, montrer que $\{B \in \mathcal{C} \mid A \cap B \in \mathcal{C}\} = \mathcal{C}$, puis de même avec $A \in \mathcal{C}$, et conclure[5].

Enfin, avant d'énoncer le théorème, on définit la notion de complétion pour une mesure. Effet il peut être utile[6] de compléter une mesure en ajoutant tous les ensembles qui sont contenus dans un ensemble négligeable.

Exercise 2.2.2 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et soit

$$\overline{\mathcal{M}} = \{A \cup B \,|\, A \in \mathcal{M} \text{ et } B \subset N \text{ tel que } \mu(N) = 0\}.$$

Montrer que $\overline{\mathcal{M}}$ est une σ-algèbre, et que μ admet un prolongement unique $\overline{\mu}$ à $\overline{\mathcal{M}}$, de sorte que $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ est un espace mesuré *complet*, c'est-à-dire tel que tout sous-ensemble d'une partie négligeable est mesurable.

Théorème 2.2.1 (théorème de prolongement de Carathéodory) *Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties de X stable par intersection finie et qui contient l'ensemble vide et X. Soit $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ tel que $\mu(\emptyset) = 0$, on a*

i) Si X est union dénombrable d'une famille croissante d'éléments X_k de $\mathcal{F}$ tels que $\mu(X_k) < +\infty$, alors il existe au plus un prolongement de μ en une mesure sur $\sigma(\mathcal{F})$;

ii) Soit μ^* la mesure extérieur associée à μ. On suppose que

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) = \mu(A). \tag{2.1}$$

Alors μ^* définit sur $\sigma(\mathcal{F})$ une mesure qui prolonge μ. En outre, cette mesure est σ-additive sur la σ-algèbre $\mathcal{M}$, contenant $\sigma(\mathcal{F})$, définie par

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \,|\, \forall B \subset X, \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B)\}.$$

Les éléments de $\mathcal{M}$ sont dits μ-mesurables ; la σ-algèbre $\mathcal{M}$, munie de μ^*, est automatiquement complète.

iii) Si on suppose de plus que la différence de deux éléments de $\mathcal{F}$ peut s'écrire comme une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors la condition (2.1) est équivalente à la σ-additivité[7] *de μ sur $\mathcal{F}$.*
En particulier il suffit que μ soit σ-additive pour se prolonger en une mesure.

5. ce raisonnement classique sera d'une grande utilité pour la preuve du théorème de Carathéodory.
6. mais aussi dangereux, voir section 3.
7. il est pas nécessaire de supposer que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable.

Preuve du théorème 2.2.1 :

Preuve de (i) :

Tout d'abord supposons que (i) soit vérifié lorsque $\mu(X) < \infty$, alors si on avait deux prolongements possibles μ_1 et μ_2, on aurait $\mu_1(X_k \cap A) = \mu_2(X_k \cap A)$ pour tout k et $A \in \sigma(\mathcal{F})$. Puis utilisant le fait que les μ_i sont σ-additives et que la suite X_k est croissante, d'après l'exercice 2.1.5, on obtient que $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F})$, ce qui prouve l'unicité.

Reste à prouver (i) lorsque $\mu(X) < \infty$. Tout d'abord on remarque que le lemme des classes monotones s'applique et que $\sigma(\mathcal{F})$ est simplement la plus petite classe monotone contentant $\mathcal{F}$. Soient deux prolongements possibles μ_1 et μ_2, on pose

$$\mathcal{G} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) \,|\, \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

On remarque que $\mathcal{G}$ est une classe monotone[8] contentant $\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{F})$, ce qui achève la preuve. $\square$

Preuve de (ii) :

Etape 1 : $\mathcal{M}$ est une algèbre.
Il est clair que $\emptyset \in \mathcal{M}$ et que $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire. Il reste à démontrer que $\mathcal{M}$ est stable par intersection. Pour cela on va procéder par double inégalité. Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, on a, par sous-additivité de μ^*, que

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap (A_1 \cap A_2)) + \mu^*(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \text{ pour tout } B \subset X.$$

D'autre part, en remarquant que $B \setminus (A_1 \cap A_2) = ((B \cap A_1) \setminus A_2) \cup (B \setminus A_1)$, on a donc pour sous-additivité

$$\mu^*(B \setminus (A_1 \cap A_2)) \leq \mu^*(((B \cap A_1) \setminus A_2)) + \mu^*(B \setminus A_1),$$

d'où

$$\begin{aligned}\mu^*(B \cap (A_1 \cap A_2)) + \mu^*(B \setminus (A_1 \cap A_2)) &\leq \mu^*((B \cap A_1) \cap A_2) + \mu^*(((B \cap A_1) \setminus A_2)) + \mu^*(B \setminus A_1) \\ &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_1) = \mu^*(B),\end{aligned}$$

8. c'est ici qu'on utilise la finitude, pour donner du sens à $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

ce qui prouve que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$.

Etape 2 : μ^* est additive sur $\mathcal{M}$
En effet soit $A, B \in \mathcal{M}$ deux éléments disjoints alors

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

De plus si $B \subset X$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ disjoints, on a

$$\mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*((B \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) + \mu^*((B \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1) = \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2),$$

ce qu'on généralise par récurrence à une union finie d'élément disjoints.

Etape 3 : $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre et μ^* est σ-additive sur $\mathcal{M}$.
Pour montrer cela on va procéder comme précédemment par double inégalité, en fait il suffit de montrer que pour toute famille A_k d'éléments disjoints de $\mathcal{M}$ et toute partie B de X, on a

$$\mu^*(B \cap (\cup A_k)) + \mu^*(B \setminus (\cup A_k)) \leq \mu^*(B),$$

Etant donné que l'autre inégalité est une conséquence de la sous-additivité.

Notons $A^n = \cup_{k=1}^n A_k$, alors par additivité et croissance, grâce à l'étape précédente, on a

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A^n) + \mu^*(B \setminus A^n) \geq \sum_{k=1}^n \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \setminus A^\infty).$$

En passant à la limite et en utilisant la sous-additivité, on obtient le résultat souhaité, plus précisément

$$\mu^*(B) \geq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \setminus A^\infty) \geq \mu^*(B \cap A^\infty) + \mu^*(B \setminus A^\infty) \geq \mu^*(B).$$

De plus en posant $B = X$, dans l'inégalité précédente, on obtient directement la σ-additivité de μ^* sur $\mathcal{M}$.

Etape 4 : μ^* est complète sur $\mathcal{M}$.
Soit $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu^*(A) = 0$, $A' \subset A$ et $B \subset X$ alors $\mu^*(B \cap A') \leq \mu^*(A) = 0$ et $\mu^*(B) \geq \mu^*(B \setminus A') \geq \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B)$ d'ou $\mu^*(B \setminus A') + \mu^*(A' \cap B) = \mu^*(B)$, ce qui prouve bien que A' est mesurable.

Il est a noter que jusqu'ici nous n'avons pas utilisé (2.1).

Enfin pour achever la preuve de (ii), il suffit de montrer que $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$, c'est à dire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, car en appliquant (2.1) avec $B = \emptyset$, on aura $\mu(A) = \mu^*(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$ et donc μ^* prolongera bien μ. Soit $A \in \mathcal{F}$ et $B \subset X$. On choisit (B_k) une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ recouvrant B. On applique alors la sous-additivité et (2.1), ce qui donne

$$\begin{aligned}\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \sum_k \mu(B_k \cap A) + \mu^*(B \setminus A)\\ &\leq \sum_k (\mu(B_k \cap A) + \mu^*(B_k \setminus A)) = \sum_k \mu(B_k),\end{aligned}$$

en passant à la borne inférieur on obtient

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B)$$

l'autre inégalité étant toujours satisfaite, cela prouve bien que $A \in \mathcal{M}$. $\square$

Preuve de (iii) : Dans le cas où (2.1) est satisfaite, d'après (ii), μ^* est bien un prolongement de μ et donc μ est σ-additive sur $\mathcal{F}$.

Supposons maintenant que μ est σ-additive sur $\mathcal{F}$ et prouvons (2.1). Pour cela, il suffit de montrer que μ et μ^* coïncide sur $\mathcal{F}$. En effet, comme on l'a vu au $ii)$, μ^* est bien défini sans l'hypothèse (2.1) et dans ce cas elle est sous-additive. Donc si μ et μ^* coïncident, on a l'inégalité suivante

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{F}.$$

Pour établir l'égalité inverse on remarque que par hypothèse $A \setminus B$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{l} C_i \text{ avec } C_i \in \mathcal{F}$$

d'ou

$$\mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \leq \mu(A \cap B) + \sum_{i=1}^{l} \mu^*(C_i) = \mu(A \cap B) + \sum_{i=1}^{l} \mu(C_i).$$

Or $A \cap B$ et (C_k) forment une partition de A donc, μ étant additive , on a bien

$$\mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \leq \mu(A \cap B) + \sum_{i=1}^{l} \mu(C_i) = \mu(A).$$

Reste à prouver que μ et μ^* coïncident sur $\mathcal{F}$. On sait que par définition on a $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. D'autre part soit (A_k) un recouvrement de $A \in \mathcal{F}$ par des éléments de $\mathcal{F}$, on pose $A'_k = A_k \setminus (\cup_{i<k} A_i)$ qui forme une partition du recouvrement.

On vérifie que chaque A'_k peut s'écrire comme union finie d'éléments disjoints de $\mathcal{F}$.

En effet chaque différence $A_k \setminus A_l$ est égale à $\cup_{1 \leq i \leq N_l} F_{i,l}$, où les $F_{i,l}$ sont des éléments disjoints de $\mathcal{F}$. On a donc

$$\begin{aligned} A'_k &= (A_k \setminus A_1) \cap \cdots \cap (A_k \setminus A_{k-1}) \\ &= \left(\bigcup_{1 \leq i \leq N_1} F_{i,1} \right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup_{1 \leq i \leq N_{k-1}} F_{i,k-1} \right) \\ &\bigcup_{i_1, \ldots, i_{k-1}} F_{i_1,1} \cap \cdots \cap F_{i_{k-1},k-1}. \end{aligned}$$

On vérifie que cela conduit à une partition des A'_k en éléments disjoints de $\mathcal{F}$, que l'on réécrit $A'_k = \cup_{1 \leq i \leq M_k} C_{k,i}$. En outre on a

$$A_k = \bigcup_{1 \leq l \leq k, 1 \leq i \leq M_l} C_{l,i},$$

d'ou par σ-additivité de μ,

$$\mu(A_k) = \sum_{1 \leq l \leq k, 1 \leq i \leq M_l} \mu(C_{l,i}),$$

ce qui donne en conservant uniquement les termes tels que $l = k$,

$$\sum_{1 \leq i \leq M_k} \mu(C_{k,i}) \leq \mu(A_k),$$

d'ou

$$\sum_{k,i} \mu(C_{k,i}) \leq \sum_k \mu(A_k),$$

puis par croissance[9] de μ, on a

$$\sum_{k,i} \mu(C_{k,i} \cap A) \leq \sum_k \mu(A_k).$$

Or les $(C_{i,k} \cap A)$ forment une partitions de A, donc par σ-additivité,

$$\mu(A) \leq \sum_k \mu(A_k),$$

et ceci pour tout recouvrement, on a donc $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, ce qui achève la preuve. ■

2.3 Changement de variables

Exercise 2.3.1 Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, Y un ensemble quelconque, et $f : X \to Y$. Montrer que

$$f\#\mathcal{M} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$$

est la plus grande σ-algèbre qui rende f mesurable, elle est appelée σ-algèbre image de $\mathcal{M}$ par f.

Définition 2.3.1 (Mesure image) *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to Y$. Alors la formule*

$$\nu(B) := \mu(f^{-1}(B))$$

définit une mesure sur la σ-algèbre image $f\#A$, appelée mesure image de μ par f et notée $f\#\mu$.
Si Y est déjà mesurable par $\mathcal{B}$ et f mesurable, alors $f\#\mu$ est définie par restriction sur $\mathcal{B}$.

Théorème 2.3.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesurable et $(Y, \mathcal{N})$ un espace mesurable, et $\phi : X \to Y$ une application mesurable. Alors,*

i) Pour toute fonction f mesurable sur Y, à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\int f d(\phi\#\mu) = \int (f \circ \phi) d\mu.$$

ii) Pour toute fonction f mesurable sur Y, à valeurs dans $\mathbb{C}$, la fonction $f \circ \phi$ est μ-intégrable si et seulement si la fonction f est $(\phi\#\mu)$-intégrable, et l'égalité ci-dessus est alors vérifiée.

9. C'est une conséquence

2.4 Intégration sur un espace produit

Si l'on veut définir une mesure sur $\mathbb{R}^k$, il semble naturel de s'appuyer sur la structure produit pour étendre les objets définis sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.4.1 *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables, on appelle σ-algèbre produit sur $X \times Y$, et on la note $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, la σ-algèbre engendrée par les pavés $A \times B$, où $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$.*

Exercise 2.4.1 Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Exercise 2.4.2 Soient $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(Y)$, on suppose de plus que X(resp. Y) est union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$(resp. $\mathcal{G}$). Montrer que, $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$.
Indication : On remarquera que si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ alors $A \times Y$ et $X \times B$ sont dans $\sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, à partir de la on suivra l'idée de la démonstration du lemme des classes monotones.

Exercise 2.4.3 Montrer que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la plus petite classe monotone contenant les pavés.

Définition 2.4.2 *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Si $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ et $(x, y) \in X \times Y$, on définit*

$$Q_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in Q\} \text{ et } Q^y = \{x \in X \mid (x, y) \in Q\}.$$

On appelle Q_x et Q^y respectivement tranche selon x et tranche selon y.

Proposition 2.4.1 *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Soit $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, alors Q_x et Q^y sont mesurables.*

Preuve :
On pose

$$\mathcal{C} = \{Q \subset X \times Y \mid Q_x \in \mathcal{N}\}.$$

En fait $\mathcal{C}$ est la σ-algèbre image de la projection $y \mapsto (x, y)$, et clairement $\mathcal{C}$ contient tous les pavés $P = A \times B$, car P_x est soit vide soit égale à B. Donc $\mathcal{C}$ contient la σ-algèbre produit. On procède de même pour Q^y. $\square$

Exercise 2.4.4 Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Soit $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ une fonction mesurable pour la σ-algèbre produit, alors $y \mapsto f(x, y)$ (resp. $x \mapsto f(x, y)$) est mesurable pour tout $x \in X$ (resp. pour tout $y \in X$).
Indication : Utiliser la proposition précédente et l'approximation par des fonctions mesurables étagées.

Théorème 2.4.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, alors il existe une unique mesure, notée $\mu \otimes \nu$, sur $X \times Y$ telle que*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \ \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B),$$

c'est la mesure produit[10].

Preuve :

Il s'agit d'une application du théorème de Carathéodory. On prend $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les pavés $A \times B$ et on pose $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$. Clairement $\mathcal{F}$ est stable par intersection. Par σ-finitude, on a la conclusion $i)$ du théorème de 2.2.1.
De plus la différence de deux pavés est union finie de pavés, donc il reste simplement à vérifier la σ-additivité pour avoir la conclusion $ii)$ du théorème de 2.2.1, ce qui achèvera la preuve.

Soit $P_k = A_k \times B_k$ un ensemble de pavés disjoints dont l'union est encore un pavé que l'on note $P = A \times B$. On démontre sans peine que, grâce à la σ-finitude, on peut supposer que $\mu(A) < +\infty$ et $\nu(B) < +\infty$. On pose alors

$$f_k = \nu(B_k)\mathbf{1}_{A_k},$$

qui est mesurable et dont l'intégrale vaut $\mu \otimes \nu(A_k \times B_k) = \mu(A_k) \times \nu(B_k)$. On a alors, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned}\sum_k f_k(x) &= \sum_k \int_B \mathbf{1}_{B_k}(y)\mathbf{1}_{A_k}(x)\, d\nu(y) \\ &= \sum_k \int_B \mathbf{1}_{(x,y)\in P_k}\, d\nu(y) = \int_B \sum_k \mathbf{1}_{(x,y)\in P_k}\, d\nu(y),\end{aligned}$$

10. Comme pour l'intégrale on utilise la convention $0 \times +\infty = 0$.

la fonction $\mathbf{1}_{(x,y)\in P_k}$ est bien mesurable grâce à l'exercice ci-dessus. On remarque que la dernière somme n'est rien d'autre que la fonction indicatrice de P par hypothèse. Ce qui donne

$$\sum_k f_k(x) = \nu(B)\mathbf{1}_A.$$

On appliquant encore une fois le théorème de convergence monotone, on a

$$\begin{aligned}\sum_k \mu\otimes\nu(A_k\times B_k) &= \sum_k \int_X f_k\, d\mu(x) = \int_X \sum_k f_k\, d\mu(x)\\ &= \int_X \nu(B)\mathbf{1}_A\, d\mu(x) = \mu\otimes\nu(A\times B),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Théorème 2.4.2 (Fubini) *Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ et $(Y,\mathcal{N},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.*

i) Soit $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ mesurable, on pose

$$\phi(x) = \int_Y f(x,\,.\,)\, d\nu \text{ et } \psi(y) = \int_X f(\,.\,,y) d\mu$$

alors ϕ et ψ sont mesurables et de plus

$$\int_X \phi\, d\mu = \int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \psi\, d\nu. \tag{2.2}$$

ii) Soit $f : X\times Y \to \mathbb{C}$ mesurable, on pose

$$\Phi(x) = \int_Y |f(x,\,.\,)|\, d\nu$$

et on suppose que

$$\int_X \Phi\, d\mu < \infty,$$

alors f est intégrable.

iii) Si f est intégrable alors, $f(x,\,.\,)$ et $f(\,.\,,y)$ le sont presque partout et (2.2) est satisfaite.

Le théorème de Fubini nous assure que si f est intégrable, on peut intégrer par tranche dans un sens ou dans l'autre. Parfois on aimerait avoir des tranches curvilignes, c'est possible grâce à la formule la co-aire, voir le cours de Thierry de Pauw.

Preuve :

Preuve de i) :

Grâce au théorème de convergence monotone et l'hypothèse de σ-finitude on peut supposer que μ et ν sont finies.

On va d'abord démontrer $i)$ pour $f = \mathbf{1}_Q$ où $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Soit

$$\mathcal{C} = \{Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \mid \text{ i) est vraie pour } \mathbf{1}_Q\}$$

alors, par constructions de la mesure produit, $\mathcal{C}$ contient tous les pavés. Grâce au théorème de convergence monotone, on montre que $\mathcal{C}$ est stable par union croissante. Enfin en écrivant la fonction caractéristique d'une différence croissante comme une différence de deux fonctions caractéristiques, on prouve que $\mathcal{C}$ est une classe monotone. Le lemme des classes monotones nous assure que $\mathcal{C}$ contient bien la σ-algèbre produit.
Enfin on établit i) en approchant une fonction mesurable par une suite de fonction simple croissante et en appliquant le théorème de convergence monotone.

Preuve de ii)
On applique i) à $|f|$.

Preuve de iii)
On suppose f réel pour simplifier, le cas complexe se déroule exactement de la même manière. Soit ϕ^+ et ϕ^- les fonction associé à f^+ et f^- par le i). Alors ϕ^+ et ϕ^- sont intégrables et de plus on a

$$\int_X \phi^+ \, d\mu = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu)$$

et

$$\int_X \phi^- \, d\mu = \int_{X \times Y} f^- d(\mu \otimes \nu).$$

En remarquant que

$$f(x, .) = f^+(x, .) - f^-(x, .),$$

alors $f(x, .)$ est intégrable dés que $\phi^+(x) < \infty$ et $\phi^-(x) < \infty$. Or cette condition est vraie presque partout, et dans ce cas on peut définir $\phi(x) = \phi^+(x) - \phi^-(x)$ presque partout. En soustrayant les équations (2.2) vérifiées par f^+, ϕ^+ et f^-, ϕ^- on obtient la partie de gauche de (2.2) pour f et ϕ. La partie de droite s'en déduit par symétrie, ce qui achève la preuve. ■

2.5 Mesure de Borel positive

Dans cette section on suppose que X est un espace topologique muni d'une σ-algèbre $\mathcal{M}$, contenant les boréliens, et d'une mesure μ.

Définition 2.5.1 *Soit X un espace séparé localement compact, on dira que μ est une mesure de Borel si elle prend une valeur finie sur tout compact. On dit qu'une telle mesure est intérieurement régulière*[11] *si*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \,|\, K \subset A \text{ et } K \text{ compact}\}.$$

On dit qu'une telle mesure est extérieurement régulière si

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \,|\, A \subset O \text{ et } O \text{ ouvert }\}.$$

Si μ est intérieurement et extérieurement régulière alors on dira simplement qu'elle est régulière.

Exercise 2.5.1 Soit μ une mesure régulière sur X, alors, toute partie $A \in \mathcal{M}$ de mesure finie, peut se décomposer sous la forme $F \cup N$, où F est une union dénombrable de compact et N un ensemble négligeable ; elle peut aussi se décomposer sous la forme $G \setminus N$, où G est une intersection dénombrable d'ouverts et N un ensemble négligeable.
Si on suppose de plus que X est σ-compact, alors pour tout ensemble mesurable E il existe un F_σ A et G_δ B tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.

Les mesures définies sur certains espaces topologiques sont automatiquement régulières, c'est le cas des espaces polonais[12] et des espaces localement compacts, comme le montrent les deux théorèmes suivant.

11. dans ce cas on parle aussi de *Mesure de Radon.*
12. une espace métrisable séparable et complet.

Théorème 2.5.1 *Soit X un espace polonais muni d'une mesure de Borel μ, σ-finie. Alors μ est automatiquement régulière, et concentrée sur un ensemble σ-compact.*

En particulier les mesures de Borel sur $\mathbb{R}^n$ finies sur les compacts sont régulières.

Théorème 2.5.2 *Si X est un espace topologique séparé localement compact et tel que tout ouvert est σ-compact alors toute mesure de Borel est régulière.*

A l'image d'une fonction, on aimerait définir le support d'une mesure, mais comme pour les fonction continue, on a besoin d'un peu de régularité.

Exercise 2.5.2 Montrer que si X un espace topologique séparé et μ une mesure de Borel régulière sur X, alors l'union(quelconque) des ouvert de mesure nulle est de mesure nulle.

Définition 2.5.2 *Soit X un espace topologique séparé et μ une mesure de Borel régulière sur X. On définit le support de μ comme le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel μ est identiquement nulle.*

Chapitre 3

Mesure de Lebesgue

3.1 Construction de la mesure de Lebesgue

A l'aide du théorème de Carathéodory nous sommes en mesure de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1.1 *Il existe une unique mesure de Borel λ sur $\mathbb{R}$ telle que la mesure d'un intervalle $[a, b]$ soit égale à sa longueur $b - a$. On l'appelle mesure de Lebesgue. La complétion de λ, que l'on note aussi λ, également appelée mesure de Lebesgue, est définie sur la σ-algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables, qui est constituée de toutes les parties E de $\mathbb{R}$ telles qu'il existe des ensembles boréliens A et B tels que $A \subset E \subset B$ et $\lambda(B \setminus A) = 0$.*

On notera $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ la σ-algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables. Puis par induction on définit la mesure de Lebesgue λ_k (ou simplement λ) sur $\mathbb{R}^k$ comme $\otimes^k \lambda$.

La preuve de l'existence de la mesure de Lebesgue repose sur l'exercice suivant.

Exercise 3.1.1 Soit (I_k) une famille d'intervalles disjoints dont la réunion est un intervalle I, montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = |I|.$$

Preuve du théorème 3.1.1 :

Bien sûr il s'agit d'appliquer le théorème de Carathéodory à une famille bien choisie qui se trouve être simplement les intervalles de $\mathbb{R}$, puisque cette famille est stable par intersection finie, et que d'après l'exercice 3.1.1, la longueur est σ-additive sur cette famille. De plus $\mathbb{R}$ est égale à l'union des $[-k, k]$, donc l'unicité est assurée par le (i) du théorème 2.2.1. Enfin l'existence est assurée par le (iii) du théorème 2.2.1, puisque la différence de deux intervalles est réunion d'un nombre finie d'intervalles, et dans ce cas on pourra appliquer (ii). ■

Exercise 3.1.2 Montrer que cette mesure est invariante par translation et que cette propriété la caractérise(à multiplication par un scalaire près).

Exercise 3.1.3 Montrer que pour tout $T \in GL(\mathbb{R}^k)$ on a $T\#\lambda = \det(T^{-1})\lambda$.

Exercise 3.1.4 Soient E un ensemble de mesure nulle de $\mathbb{R}^k$ et $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Montrer qu'il existe un recouvrement de E par un nombre dénombrable de boules $B(x_i, r_i)$ telles que $x_i \in E$, $0 < r_i < \eta$ et $\sum_i \lambda(B(x_i, r_i)) < \varepsilon$.

3.2 Ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue

Théorème 3.2.1 (Paradoxe de Viatli) $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Preuve :

Soit $[0, 1]$ muni de la relation d'équivalence

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Q}.$$

On choisit [1] un représentant dans chaque classe d'équivalence et on note E l'ensemble des représentants. Comme $[0, 1] \subset \mathbb{Q} + E$, on voit que $\lambda(E)$ ne peut être définit et donc E n'est pas mesurable. ■

1. Grâce à l'axiome du choix.

Exercise 3.2.1 En déduire que contrairement aux boréliens, les ensembles Lebesgue-mesurables ont un mauvais comportement vis à vis du produit, i.e. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n}) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Pour plus de précision, notamment sur le paradoxe de Banach-Tarsky, on pourra consulter les références : [Vil10] chapitre IV et [CQ] chapitre VI.

3.3 L'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann

On rappelle la définition de l'intégrale de Riemann sur un intervalle compact, mais tout ce qui suit passe aux intégrales de Riemann généralisées, puisque tout intervalle de $\mathbb{R}$ est limite croissante d'intervalles compacts, voir [Vil10] section IV.3.

Définition 3.3.1 *Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction bornée. Pour une subdivision σ de $[a, b]$, c'est à dire une partition en sous-intervalle $J_1, \ldots, J_k$, on définit*

$$\mathcal{I}^-(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{k} |J_k| m_k \text{ et } \mathcal{I}^+(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{k} |J_k| M_k$$

où $m_k = \inf_{J_k} f$ et $M_k = \sup_{J_k} f$. Puis on pose

$$\mathcal{R}^-(f, [a, b]) = \sup_{\sigma} \mathcal{I}^-(f, \sigma) \text{ et } \mathcal{R}^+(f, [a, b]) = \inf_{\sigma} \mathcal{I}^+(f, \sigma),$$

où les extrema sont pris sur toutes les subdivisions. On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si $\mathcal{R}^+(f, [a, b]) = \mathcal{R}^-(f, [a, b])$ et cette valeur est l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Théorème 3.3.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable si et seulement si*

i) elle est Lebesgue-mesurable,

ii) l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle.

Dans ce cas, l'intégrale de Riemann de f est égale à l'intégrale de Lebesgue de f.

Preuve :

Tout d'abord supposons que f soit Riemann intégrable sur $[a,b]$, alors pour tout m il existe deux subdivisions (I_k^m) et (J_k^m) telles que

$$\mathcal{R}(f,[a,b]) - \sum_k |I_k^m| m_k \leq \frac{1}{m} \text{ et } \mathcal{R}(f,[a,b]) - \sum_k |J_k^m| M_k \geq -\frac{1}{m}.$$

Et quitte à prendre une subdivision plus fine on peut supposer que $I_k^m = J_k^m$. Donc à m fixé on définit f_m^- et f_m^+ de sorte que si $x \in I_k^m$ on ait

$$f_m^-(x) = m_k \text{ et } f_m^+(x) = M_k.$$

Enfin quitte à prendre chaque subdivision plus fine on peut supposer quelles sont de plus en plus fines. Dans ce cas f_m^- est croissante et f_m^+ est décroissante, ont peut donc définir leurs limites f^- et f^+. De plus on a clairement $f^+ \geq f^-$. D'autre part en appliquant le théorème de convergence monotone, on a

$$\int f^- \, d\lambda = \lim_{m\to+\infty} \int f_m^- \, d\lambda \text{ et } \int f^+ \, d\lambda = \lim_{m\to+\infty} \int f_m^+ \, d\lambda$$

Or par hypothèse c'est limite sont égales, à $\mathcal{R}(f,[a,b])$, donc

$$\int (f^+ - f^-) \, d\lambda = 0,$$

ce qui implique que $f^+ = f^-$ presque partout. Finalement ces deux fonctions coïncident presque partout avec f sur $[a,b]$, d'ou f est Lebesgue-intégrable et $\mathcal{R}(f,[a,b]) = \int f \, d\lambda$.
Enfin soit D l'ensemble des extrémités des I_k, D est dénombrable donc de mesure nulle et sur $[a,b] \setminus D$, $f^+ = f^- = f$ presque partout donc f est continue en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

Réciproquement soit f Lebesgue-mesurable borné et dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle. On définit la subdivision suivante de $[a,b]$: $I_k^n = \left[a + \frac{k(b-a)}{2^n}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{2^n}\right[$, et f_n^- et f_n^+ comme ci-dessus. Soit x un point de continuité de f qui n'appartient pas à une extrémité des I_k. Pour tout n il existe k tel que $x \in I_k^n$, comme f est continue en x on a

$$\sup_{I_k^n} f - \inf_{I_k^n} f \to 0,$$

c'est à dire $f_n^+(x) - f_n^-(x) \to 0$. La suite $f_n^+ - f_n^-$ est bornée et converge simplement vers 0 presque partout, donc par convergence dominée $\int (f_n^+ - f_n^-)\, d\lambda \to 0$, ce qui implique que f est Riemann-intégrable, et comme on l'a déjà vu dans ce cas les intégrales coïncident. ■

Chapitre 4

Deux théorèmes fondamentaux

4.1 Théorème de Riesz

Grâce à la propriété de linéarité de l'intégrale on vérifie aisément que $L^1(\mu)$ est un espace vectoriel et que l'application

$$f \mapsto \int_X f \, d\mu$$

définie une forme linéaire. D'autre part si μ est une mesure de Borel, on peut également vérifier que $C_c(X)$ l'ensemble des applications continue à support compact de X dans $\mathbb{C}$ est un sous-espace de $L^1(\mu)$. L'objet du théorème suivant est d'établir que toute forme linéaire positive sur $C_c(X)$ peut s'interpréter comme une mesure sur X.

Théorème 4.1.1 (Théorème de Riesz) *Soit X un espace séparé localement compact et soit Λ une forme linéaire positive sur $C_c(X)$, il existe une σ-algèbre $\mathcal{M}$, contentant les boréliens, et une unique mesure de Borel presque-régulière*[1]*, complète et positive μ sur $\mathcal{M}$ telle que*

$$\Lambda(f) = \int_X f \, d\mu,$$

pour tout $f \in C_c(X)$.

Si X est compact, la positivité implique directement la continuité pour la norme uniforme. On peut aussi prendre une topologie plus faible sur $C_c(X)$

1. la régularité intérieur n'a lieu que pour les ouverts (et les ensembles de mesure finie).

qui rend Λ continue et dont l'espace des formes linéaires continues ne sera rien d'autre l'espace des distributions.

On peut également définir la mesure de Lebesgue à l'aide du théorème de Riesz, en définissant l'intégrale des fonctions continues en les approchant par des fonctions en escaliers, l'intégrale une fois définie le théorème nous donne la mesure, voir [Rud80] 2.20.

Avant de donner la preuve, on rappelle le lemme suivant

Lemme 4.1.1 (Lemme d'Urysohn) *Soient X un espace séparé localement compact, O un ouvert et K un compact contenu dans O. Alors il existe une fonction continue f à valeurs dans $[0,1]$ qui vaut 1 sur K et dont le support est inclus dans O.*

Preuve du théorème 4.1.1 :

Montrons tout d'abord l'unicité. Soit μ_1 et μ_2 deux mesures représentant la forme linéaire. Soit K un compact et $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O tel que $\mu_1(K) \geq \mu_1(O) - \varepsilon$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue f à valeurs dans $[0,1]$ qui vaut 1 sur K et dont le support est inclus dans O. On a donc

$$\mu_2(K) = \int \mathbf{1}_K \, d\mu_2 \leq \int f \, d\mu_2 = \int f \, d\mu_1 \leq \int \mathbf{1}_O \, d\mu_1 = \mu_1(O) \leq \mu_1(K) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$ et l'autre inégalité s'obtient par symétrie. On a donc égalité sur les compacts, donc sur les ouverts par presque régularité" intérieur et sur tous les ensembles par régularité extérieur.

On va démontrer l'existence à l'aide du théorème de Carathéodory 2.2.1, pour cela on va définit μ sur les ouvert de X. Là encore, on va approcher les fonctions indicatrices par des fonctions continues. On pose, pour tout ouvert O,

$$\mu(O) = \sup\{\Lambda(f) \,|\, f \in C_c(X) \text{ vérifiant } 0 \leq f \leq \mathbf{1}_O\}.$$

Pour prolonger μ à l'ensemble des boréliens, il suffit de vérifier que la condition (2.1) du théorème de Carathéodory est vérifiée. On décompose

cela en plusieurs étapes :

Etape 1 : μ est σ-sous-additive sur les ouverts.

Soit $O = \cup O_k$ et f une fonction continue à support compact K dans O. Alors il existe une partition de l'unité de K, c'est à dire des fonctions continues χ_{k_i} à support dans O_{k_i} et à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\sum_{i=1}^N \chi_{k_i} = 1$ sur K. On a alors

$$f = f\left(\sum_{i=1}^N \chi_{k_i}\right) = \sum_{i=1}^N g_i,$$

où les g_i sont des fonctions continues à support dans O_{k_i} et à valeurs dans $[0,1]$. Ce qui donne

$$\Lambda(f) = \sum_i \Lambda(g_i) \leq \sum_{i=1}^N \mu(O_{k_i}) \leq \sum_k \mu(O_k),$$

on obtient l'inégalité souhaité en passant au supremum sur f.

Puis on remarque que l'ensemble des ouverts est également stable par union dénombrable, ce qui simplifie la définition de la mesure extérieur,

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(O) \,|\, O \text{ ouvert tel que } A \subset O\}.$$

Déslors μ et μ^* coïncident sur les ouverts. Soit A et B deux ouverts, par sous-additivité de μ^*, on a

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B).$$

Il suffit donc de prouver

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B). \tag{4.1}$$

Etape 2 : μ est additive.

D'après l'étape 1, il suffit de montrer qu'elle est sur-additive. Soit O_1 et O_2 deux ouverts disjoints et f_1 et f_2 deux fonctions continues à support dans O_1 et O_2 et à valeurs dans $[0,1]$, alors $f_1 + f_2$ est à support dans $O_1 \cup O_2$ et toujours à valeurs dans $[0,1]$, d'ou

$$\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) = \Lambda(f_1 + f_2) \leq \mu(O_1 \cup O_2),$$

on obtient l'inégalité désirée en passant au supremum en f_1 et f_2.

Etape 3 : preuve de (4.1).

Soient A et B deux ouverts et f une fonction continue à support compact à valeur dans $[0,1]$ dont le support K est contenu dans $A \cap B$. On sait qu'il existe K' compact et O' ouvert tels que

$$K \subset O' \subset K' \subset A \cap B,$$

en particulier

$$\Lambda(f) \leq \mu(O').$$

D'autre part

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus K',$$

et comme $A \setminus K'$ est ouvert, on a

$$\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus K') = \mu(A \setminus K').$$

Finalement

$$\Lambda(f) + \mu^*(A \setminus B) \leq \mu(O') + \mu(A \setminus K').$$

Or O' et $A \setminus K'$ sont disjoints, donc on peu appliquer l'additivité, ce qui donne

$$\Lambda(f) + \mu^*(A \setminus B) \leq \mu(O' \cup (A \setminus K')) \leq \mu(A).$$

On achève la démonstration du théorème en passant au supremum sur f. ■

On peut construire une mesure à partir d'une simple forme linéaire sur les fonctions continues. Il est alors naturel de s'interroger sur la continuité de l'objet construit, en particulier sur la différence entre les fonction mesurables et les fonctions continue, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.1.2 (Théorème de Lusin) *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace séparé localement compact, mesuré tel que μ soit régulière et f une fonction mesurable telle $\mu(\{x \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existes $g \in C_c(X)$ telle que*

$$\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

En plus, on peut assurer que $\sup |g| \leq \sup |f|$.

L'idée de la démonstration consiste à approcher les supports de fonctions indicatrices inférieurement par des compacts et supérieurement par des ouverts et d'utiliser le lemme d'Urysohn. On passe au fonction mesurable à l'aide du théorème d'approximation.

D'autre part, la convergence presque partout implique la convergence uniforme en-dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite.

Théorème 4.1.3 (Théorème d'Egoroff) *Soient μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ et $f_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une suite de fonction mesurables qui converge presque partout sur A de mesure finie. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe B mesurable tel que $\mu(A \backslash B) < \varepsilon$ et f_k converge uniformément sur B.*

Exercise 4.1.1 Montrer que l'hypothèse $\mu(A) < \infty$ est essentielle.

D'autre part, on remarque que la mesure produite par le théorème de Riesz bien que presque régulière, n'est pas σ-finie. Or cette hypothèse est essentielle si on veut appliquer le théorème de Fubini. Ci-dessous on donne un énoncé qui nous permettra d'utiliser Fubini pour des mesures produites par le théorème de Riesz mais *a priori* non σ-finies.

Théorème 4.1.4 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés localement compacts et presque régulier, alors il existe une unique mesure, notée $\mu \otimes \nu$, sur $X \times Y$ telle que*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \ \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B),$$

c'est la mesure produit. De plus, soit $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mu \otimes \nu$-intégrable, alors $\int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ et $\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ sont bien définies et

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Exercice 4.1.1 *Démontrer le théorème précédent.*

Indication : démontrer d'abord le théorème pour des ouverts de mesure fini à l'aide du Fubini classique, puis passer au compact et au σ-compact, enfin montrer le pour les ensembles négligeables et conclure.

4.1.1 Convergence et compacité faible des mesures de Radon

On rappelle qu'une mesure de Radon est une de Borel intérieurement régulière.

Exercise 4.1.2 Montrer que toute mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ est automatiquement régulière.

Théorème 4.1.5 *Soient μ et (μ_k) des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\lim_k \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu$ *pour tout* $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$,

ii) $\limsup_k \mu_k(K) \leq \mu(K)$ *pour tout K compact et* $\liminf_k \mu_k(O) \geq \mu(O)$ *pour tout O ouvert.*

iii) $\lim_k \mu_k(B) = \mu(B)$ *pour tout B borélien borné telle que* $\mu(\partial B) = 0$.

Preuve :

i) implique ii)

Soit U un ouvert et $K \subset U$ compact. Il existe $f \in C_c(U)$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $f \equiv 1$ sur K. On a alors

$$\mu(K) = \int \mathbf{1}_K\, d\mu \leq \int f\, d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_k \leq \liminf_k \mu_k(U).$$

Par régularité on a

$$\mu(U) \leq \liminf_k \mu_k(U).$$

La deuxième inégalité s'obtient de manière similaire.

ii) implique iii)

Soit B un borélien borné dont le bord est de mesure nulle, on applique ii) à $\mathring{B} \subset B \subset \overline{B}$.

iii) implique i)

Soient $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que $supp(f) \subset B(0,R)$ et $\mu(\partial B(0,R)) = 0$, on choisit alors une séquence $0 = t_0 < \ldots t_N$ telle que $t_N = 2\|f\|_\infty$, $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$ et $\mu(f^{-1}(t_i)) = 0$. On pose $B_i = f^{-1}((t_{i-1}, t_i])$, on a alors

$$\sum_{i=2}^{N} t_{i-1}\mu_k(B_i) \leq \int f\, d\mu_k \leq \sum_{i=2}^{N} t_i\mu_k(B_i) + t_1\mu_k(B(0,R))$$

et

$$\sum_{i=2}^{N} t_{i-1}\mu(B_i) \leq \int f\, d\mu \leq \sum_{i=2}^{N} t_i\mu(B_i) + t_1\mu(B(0,R)).$$

D'ou

$$\limsup_k \left| \int f\, d\mu_k - \int f\, d\mu \right| \leq 2\varepsilon\mu(B(0,R)),$$

et ceci pour tout ε, ce qui achève la preuve. ■

Ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 4.1.1 *Si l'une des assertions du théorème précédent est vérifiée alors on dit que (μ_k) converge faiblement vers μ.*

Théorème 4.1.6 (Compacité faible) *Soit (μ_k) une suite de mesure de Radon qui vérifie*

$$\sup_k \mu_k(K) < +\infty \text{ pour tout } K \text{ compact.}$$

Alors il existe une sous suite (μ_{k_i}) qui converge faiblement vers μ.

Preuve :

Tout d'abord on remarque qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque

$$\sup_k \mu_k(\mathbb{R}^d) < +\infty,$$

le cas général s'en déduit en utilisant la σ-compacité et une extraction diagonale.

Soit (f_k) une suite dense de $C_c(\mathbb{R}^d)$. Comme $\int f_1\, d\mu_k$ est borné, on peut trouver une sous suite (μ_k^1) et $a_1 \in \mathbb{R}$ tell que

$$\int f_1\, d\mu_k^1 \to a_1.$$

Puis en itérant le procédé d'extraction, on trouve une sous suite (μ_k^i) et $a_i \in \mathbb{R}$ telle que

$$\int f_j\, d\mu_k^i \to a_j \text{ pour tout } j \leq i.$$

On pose alors $\nu_l = \mu_l^l$, de sorte que

$$\int f_k\, d\nu_l \to a_k \text{ pour tout } k \geq 0.$$

On définit alors $L : Vect\{(f_k)\} \to \mathbb{R}$, application linéaire, par $L(f_k) = a_k$. On remarque que

$$|L(f_k)| \leq \|f_k\|_\infty M,$$

où $M = \sup_k \mu_k(\mathbb{R}^d)$. Donc L admet un unique prolongement, toujours noté L à $C_c(\mathbb{R}^d)$, il est clair que L est positive, donc il existe une mesure de Radon μ telle que

$$L(f) = \int f\, d\mu, \text{ pour tout } f \in C_c(\mathbb{R}^d).$$

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, il existe une sous-suite de (f_{k_i}) qui converge vers f. Soit $\varepsilon > 0$, pour i assez grand on a

$$\|f - f_{k_i}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

D'autre part pour j assez grand

$$\left|\int f_{k_i}\, d\nu_j - \int f_{k_i}\, d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left|\int f\, d\nu_j - \int f\, d\mu\right| &\leq \left|\int (f - f_{k_i})\, d\nu_j\right| + \left|\int (f - f_{k_i})\, d\mu\right| \\ &\quad + \left|\int f_{k_i}\, d\nu_j - \int f_{k_i}\, d\mu\right| \\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

4.1.2 Mesure de Haar et analyse sur les groupes localement compacts

On rappel qu'un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie qui rend l'inversion et la multiplication continue. Un groupe topologique est dit localement compact s'il est séparé et si tout point possède un voisinage compact. Voici une propriété des groupes localement compacts qui nous sera utile par la suite.

Proposition 4.1.1 *Soit G un groupe localement compact. On a*
- *G possède un sous groupe ouvert σ-compact.*
- *L'union dénombrable de sous-groupe ouvert σ-compact, engendre un groupe ouvert σ-compact.*

Preuve :
Soit V un voisinage symétrique relativement compact de e. Pour tout n, on a $\overline{V}^n = \overline{V^n} \subset V.V^n = V^{n+1}$. On pose alors $H = \cup_n V^n = \cup_n \overline{V}^n$. Or le produit de deux compacts est compact par continuité de la multiplication. Donc H est σ-compact. On montre facilement que c'est un groupe. Enfin il est ouvert car on peut facilement le réécrire comme union d'ouvert.

Soit H_n une suite de sous-groupes σ-compact ouvert. Le groupe engendré par les H_n est ouvert car il contient un sous-groupe ouvert, H_1 par exemple. Et il est σ-compact, car engendré par les K_n^k tels que $H_n = \cup_k K_n^k$. □

Théorème 4.1.7 *Soit G un groupe localement compact, il existe une mesure de Borel presque régulière μ, non-triviale, invariante par action à gauche, i.e. $\mu(x.E) = \mu(E)$ pour tout borélien E et $x \in G$. Si ν est une autre mesure vérifiant cette propriété, alors il existe une constante positive c telle que $\nu(E) = c\mu(E)$ pour tout borélien E.*

Exercise 4.1.3 Le but de cette exercice est de démontrer le théorème précédent.

1) Soit $f \in C_c(G)$ montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de e tel que pour tout $y \in V$ et $x \in G$,

$$|f(x) - f(y^{-1}x)| \leq \varepsilon.$$

Soit f et ϕ dans $C_c^+(G) \setminus \{0\}$, on pose

$$(f : \phi) = \inf \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des $c_i \in \mathbb{R}^+$ tels qu'il existe $x_i \in G$ de sorte que

$$f \leq \sum_{i=1}^{n} c_i L_{x_i} \Phi,$$

où $(L_{x_i}\Phi)(x) = \phi(x_i^{-1}x)$.

2) Montrer que $(f : \phi) < +\infty$.

3) Montrer que

   i) $(f : \phi) = (L_y f : \phi)$ pour tout $y \in G$,

   ii) $(f_1 + f_2 : \phi) \leq (f_1 : \phi) + (f_2 : \phi)$,

   iii) $(cf : \phi) = c(f : \phi)$ pour tout $c > 0$,

   iv) si $f_1 \leq f_2$ on a $(f_1 : \phi) \leq (f_2 : \phi)$,

   v) $(f : \phi) \leq (f : \psi)(\psi : \phi)$ pour tout $\psi \in C_c^+(G) \setminus \{0\}$.

   On fixe $f_0 \in C_c^+(G) \setminus \{0\}$ et on pose

$$I_\phi(f) = \frac{(f : \phi)}{(f_0 : \phi)}.$$

   Il est clair que I_ϕ est invariante à gauche, sous-additive et homogène.

4) Soit $f_1, f_2 \in C_c^+(G) \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe V voisinage de e tel que

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq I_\phi(f_1 + f_2) + \varepsilon \text{ pour tout } \phi \in C_c^+(G) \setminus \{0\},$$

   dés que $supp(\phi) \subset V$.

5) Montrer que

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leq I_\phi(f) \leq (f : f_0),$$

   en déduire que les I_ϕ vivent dans un compact de $(\mathbb{R}^+)^{C_c^+(G)}$.

6) Pour V voisinage de e, on pose

$$K(V) = \overline{\{I_\phi \,|\, supp(\phi) \subset V\}},$$

   Montrer que $K(V)$ est compact.

7) En déduire qu'il existe I telle que que pour tout voisinage V de e, $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n \in C_c^+(G)$., il existe $\phi \in C_c^+(G)$ telle que $supp(\phi) \subset V$ et

$$|I(f_i) - I_\phi(f_i)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } i.$$

En particulier montrer que I est invariante à gauche, additive et homogène.

8) Prolonger I à $C_c(G)$ et en déduire l'existence de la mesure invariante.

Dans la suite on suppose que G est σ-compact [2].

9) Soit μ et ν deux mesures de Haar, montrer que la dérivé de Radon-Nikodym de μ par rapport à $\mu + \nu$ est constante.

10) En déduire l'unicité de la mesure de Haar.

Exercise 4.1.4 Montrer qu'un groupe localement localement compact est compact si et seulement si il admet une mesure de Haar finie.

Exercise 4.1.5 Montrer qu'un ouvert négligeable pour la mesure de Haar est nécessairement vide. En déduire que le support d'une fonction intégrable est nécessairement inclus dans un ensemble σ-compact.

On remarquera que l'exercice précédent nous offre une nouvelle preuve du théorème de Fubini dans le cas particulier des mesure de Haar.

Exercise 4.1.6 [Exemples] Montrer que les mesures suivantes sont bien des mesures de Haar(invariante à gauche) :

i) La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, +)$,

ii) $\frac{dx}{x}$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$,

iii) $\frac{dxdy}{x^2}$ sur le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Ce n'est pas nécessaire pour démontrer l'unicité, voir r [Fol95], car on dispose d'un théorème de Fubini pour les mesures générées par le théorème de Riesz, mais ici on souhaite appliquer le théorème de Radon-Nikodim qui requière cette hypothèse.

Soit $g \in G$ et μ une mesure de Haar(invariante à gauche) alors μ_g définie par

$$\mu_g(E) = \mu(Eg),$$

est également une mesure de Haar(invariante à gauche). Par unicité il existe $\Delta(g) > 0$ tel que $\mu_g = \Delta(g)\mu$. Δ est la fonction modulaire. On dit qu'un groupe est unimodulaire si $\Delta \equiv 1$, dans ce cas toute mesure de Haar est invariante à gauche et à droite.

Exercise 4.1.7 Montrer que si $f \in C_c(G)$ tel que $c = \int_G f\, d\mu \neq 0$ alors

$$\Delta(y) = \frac{1}{c} \int_G f(xy^{-1})\, d\mu(x).$$

En utilisant le 1) de l'exercice 4.1.3, montrer que Δ est un morphisme continue de G dans R_+^*, et que tout groupe compact ou abélien est unimodulaire. Enfin montrer que l'exemple iii) du denier exercice n'est pas unimodulaire.

Exercise 4.1.8 Soit $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que son complémentaire est négligeable dans $M_n(\mathbb{R})$. (*Indication : considérer cet ensemble comme les zéros d'un polynôme.*) On pose $\mu(X) = \frac{dX}{|det(X)|^n}$, où dX est la mesure de Lebesgue sur $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que cette mesure est bien définie et que c'est une mesure de Haar invariante à gauche. Montrer que c'est un groupe unimodulaire.

Définition 4.1.2 *Soient G un groupe localement compact, μ une mesure de Haar et $f, g \in L^1(G, d\mu)$, on définit la convolutions de f et g comme*

$$f * g(x) = \int f(y) g(y^{-1}x)\, d\mu(y).$$

Exercice 4.1.2 *Montrer que*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1.$$

Pour clore cette section, on présente rapidement la transformé de Fourier sur les groupes abéliens localement compacts (ALC).

Définition 4.1.3 *Soit G un groupe ALC. Un caractère sur G est un homomorphisme continue de G dans $\mathbb{U}$. Les caractères forment un groupe, noté $\widehat{G}$, appelé groupe dual.*

Exercice 4.1.3 *Montre que :*

i) les caractères de $\mathbb{Z}$ *sont les applications* $k \mapsto e^{ikx2\pi}$ *où* $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

ii) les caractères de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *sont les applications* $x \mapsto e^{ikx2\pi}$ *où* $k \in \mathbb{Z}$,

iii) les caractères de $\mathbb{R}$ *sont les applications* $k \mapsto e^{iyx2\pi}$ *où* $y \in \mathbb{R}$.

On peut munir $\widehat{G}$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, ce qui en fait un groupe topologique localement compact [3] .

Définition 4.1.4 *Soit* G *un groupe ALC et* $f \in L^1(G)$. *On définit alors* $\hat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ *par*

$$\hat{f}(\xi) = \int_G f(x)\overline{\xi(x)}\, d\mu(x).$$

C'est la transformé de Fourrer de f.

Exercice 4.1.4 *Montrer que* $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

On peut montrer que $f \mapsto \hat{f}$ est une application continue. Mais on a beaucoup mieux, c'est l'objet des deux théorèmes suivant dont on trouvera des démonstrations dans [DS09] chapitre 3. Par contre elle repose en partie sur l'utilisation de C^*-algèbre dont nous parlerons dans les chapitres suivants.

Théorème 4.1.8 (Théorème de Plancherel) *Soit* G *un groupe ALC et* $\widehat{G}$ *son dual. On fixe une mesure de Haar sur* G *alors il existe une unique mesure de Haar sur* $\widehat{G}$ *telle que pour tout* $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ *on ait*

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

De plus la transformé de Fourier s'étend en une isométrie de $L^2(G)$ *sur* $L^2(\widehat{G})$.

Soit G un groupe ALC, à tout élément $x \in G$ on peut associer un élément du bi-dual δ_x défini par

$$\delta_x(\xi) = \xi(x).$$

Théorème 4.1.9 (Dualité de Pontryagin) *Soit* G *un groupe ALC. L'application* $\delta : G \to \widehat{\widehat{G}}$ *est un isomorphisme de groupes ALC.*

3. voir l'exercice 6.4.4

4.1.3 Représentation des groupes localement compacts

Définition 4.1.5 *Soit G un groupe topologique. On appelle représentation réel (reps. complexe) de G, la donnée d'un espace Hilbert (reps. Hermitien) H et d'un morphisme de groupe $\pi : G \to GL_c(H)$ telle que pour tout $x \in H$, $g \mapsto \pi(g)(x)$ soit continue. Une représentation est dite unitaire si $\pi(g)$ est unitaire pour tout $g \in G$.*

Exercise 4.1.9 Montrer que pour tout groupe localement compact G, l'application

$$y \mapsto L_y$$

définit une représentation unitaire dans $L^2(G, d\mu)$.

Définition 4.1.6 *Une représentation (π, H_π) est une sous-représentation d'une représentation (η, H_η) si H_π est un sous-espace fermé de H_η et $\pi = \eta_{|H_\pi}$. Une représentation (π, H_π) est dite irréductible si elle n'a aucune sous-représentation propre, c'est-à-dire les seuls sous-espaces fermés stable par π son H_π et $\{0\}$.*

Exercise 4.1.10 La représentation naturel du groupe des matrices unitaires $U(n)$ sur $\mathbb{C}^n$ est irréductible.

Lemme 4.1.2 (de Schur) *Soit G un groupe topologique et soit (π_1, H_1) et (π_2, H_2) deux représentations irréductibles unitaires de G. Soit T une application linéaire continue de H_1 dans H_2 tel que $\pi_2(g) \circ T = T \circ \pi_1(g)$ pour tout $g \in G$. Alors soit $T = 0$ soit T est un isomorphisme.*
De plus, si $\pi_1 = \pi_2$ est une représentation complexe de dimension finie, alors $T = \lambda Id$.

Preuve :
On remarque d'abord que le noyau de T est un sous-espace invariant de π_1, on a donc soit $Ker(T) = \{0\}$, soit $Ker(T) = H_1$. Supposons que T est injective, alors on remarque l'image de T est un sous-espace invariant de π_2, c'est donc H_2 et T est un isomorphisme.

Si la représentation est complexe de dimension finie, alors T admet un sous-espace propre V, on vérifie alors que ce sous-espace est un sous-espace invariant de la représentation, on donc $V = H$ et $T = \lambda Id$. □

Exercise 4.1.11 Montrer que les représentations irréductibles complexes d'un groupe abélien sont de dimension 1.

Dans le cas d'un groupe abélien, on peut identifier les représentations irréductibles unitaires et les caractères. En effet pour tout $g \in G$, $\pi(g)$ est un automorphisme unitaire de $\mathbb{C}$, c'est à dire un élément de $\mathbb{U}$.
Considérons alors, la représentation de G dans $L^2(G)$, et supposons que $L^2(G)$ est séparable. On peut alors trouver une base hilbertienne de $L^2(G)$ de sorte que la restriction de la représentation à chaque espace engendré par un vecteur de base soit irréductible, donc corresponde à un caractère. On peut alors écrire pour tout $f \in L^2(G)$,

$$f(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi(g).$$

On trouve ici la formule d'inversion de Fourier, le but du théorème de Peter-Weyl est d'étendre cette construction au groupe compact non-abélien.

4.2 Mesures complexes, théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym et applications

4.2.1 Mesures complexes

On a définit une mesure complexe comme une fonction σ-additive à valeur complexe, définition 2.1.3, c'est à dire pour toute famille (A_k) d'ensembles disjoints sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Il est a noter que le membre de droite est supposé convergeant. On remarque même qu'il est convergeant pour toute permutation d'indice étant donné que le terme de gauche est invariant par une telle transformation. Donc le terme de droite est absolument convergeant.

Définition 4.2.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, muni d'une mesure complexe μ, on définit la variation total de μ, notée $|\mu|$, comme suit*

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(A_k)|,$$

où le sup *est pris sur toutes les partitions dénombrables* (A_k) *de* A.
Dans le cas d'une mesure réelle, on définit alors la variation positive et négative de μ*, comme suit*

$$\mu^+ = \frac{\mu + |\mu|}{2} \text{ et } \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

Exercise 4.2.1 Montrer que la variation total d'une mesure complexe est une mesure finie.
Indication : Montrer que si $|\mu|(X) = +\infty$*, on peut trouver* A *et* B *mesurables disjoints tels que* $|\mu|(A) = +\infty$ *et* $|\mu(B)| \geq 1$.

Le théorème suivant montre que l'on peut décomposer X en deux ensembles disjoints supportant chacun une variation de la mesure.

Théorème 4.2.1 (Décomposition de Hahn) *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un ensemble mesurable muni d'une mesure réel* μ*. Il existe deux ensembles mesurables et disjoints* A *et* B *tels que les variations positive et négative vérifient*

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \text{ et } \mu^-(E) = -\mu(E \cap B) \text{ pour tout } E \in \mathcal{M}.$$

Preuve du théorème 4.2.1 :

Soit

$$M = \sup_{E \subset \mathcal{M}} \mu(E),$$

M est finie vue l'exercice 4.2.1. On prend (A_k) une suite d'ensembles mesurables vérifiant

$$\mu(A_k) \geq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) M.$$

On pose

$$A = \bigcap_l \bigcup_{k \geq l} A_k.$$

Soit B un ensemble mesurable, on a

$$\mu(A_k \cup B) = \mu(A_k) + \mu(B) - \mu(A_k \cap B) \geq \mu(A_k) + \mu(B) - M \geq \mu(B) - \frac{M}{2^k},$$

puis en itérant, on obtient,

$$\mu(A_l \cup \cdots \cup A_k) \geq \mu(A_l) - \frac{M}{2^{l-1}}.$$

Si, on passe à la limite en k , on a

$$\mu\left(\cup_{k\geq l} A_k\right) \geq \mu(A_l) - \frac{M}{2^{l-1}} \geq \left(1 - \frac{3}{2^l}\right) M,$$

et ensuite en l, on obtient

$$\mu(A) \geq M,$$

ce qui donne $\mu(A) = M$.
On pose alors $B = X \setminus A$. Montrons que pour tout ensemble mesurable $C \subset A$, on a $\mu(C) \geq 0$. En effet sinon on aurait

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A) - \mu(C) > M,$$

ce qui serait absurde. De même pour tout ensemble mesurable $C \subset B$, on a $\mu(C) \leq 0$. Enfin, soit $E \in \mathcal{M}$, on a par définition de $|\mu|$,

$$|\mu|(E) = |\mu|(E \cap A) + |\mu|(E \cap B) = \mu(E \cap A) - \mu(E \cap B),$$

ce qui achève la preuve. ■

4.2.2 Fonction maximale et points de Lebesgue

Dans cette section la seule mesure considérée est la mesure de Lebesgue, notée λ ou $|\,.\,|$.

Un problème classique d'intégration est de montrer que l'intégration et la différentiation sont des opérations "inverses" l'une de l'autre. Plus précisément nous allons regarder dans cette section les questions suivantes, que l'on formule en dimension 1 par soucis de clarté.

— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ intégrable et $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, est ce que F est dérivable ? Et dans ce cas est ce que $F' = f$?
— Et réciproquement, soit F dérivable presque partout [4], est ce que F' est intégrable ? dans ce cas, a-t-on $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\, dt$?

Exercise 4.2.2 Construire une fonction F croissante telle que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$ et telle que F soit constante en dehors de l'ensemble de Cantor. En déduire que la réponse à la deuxième question est négative [5].

4. le théorème de Rademacher, nous assure que F Lipschitz est une condition suffisante.
5. Toutefois si on suppose que F est absolument continue alors c'est vrai, voir la preuve du théorème fondamental de l'analyse.

En reprenant les notations de la première question, F est dérivable en x si et seulement si

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \text{ convergence quand } h \text{ tend vers } 0,$$

c'est-à-dire si

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{|I|\to 0}\frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt \text{ existe },$$

où $I=(x,x+h)$. Ce qui nous amène à formuler notre premier problème en toute dimension comme suit : Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ intégrable et $x\in\mathbb{R}^d$:

$$\text{est ce que l'on a } \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,d\lambda(y) = f(x)\,?$$

Pour répondre à cette question, on introduit le concept de fonction maximale, introduit par Hardy et Littelwood.

Définition 4.2.2 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f\in L^1(U)$, on définit sa fonction maximale, notée $M(f)$, par*

$$M(f)(x) = \sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\,d\lambda(y),$$

où le supremum est pris sur toutes les boules ouvertes de U qui contiennent x.

la fonction maximale vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 4.2.2 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f\in L^1(U)$, alors*

i) $M(f)$ est mesurable,

ii) $M(f)(x)<+\infty$ presque partout,

iii) $M(f)$ vérifie

$$\lambda(\{x\in U \mid M(f)(x)>t\}) \le \frac{C}{t}\|f\|_1 \text{ pour tout } t>0,$$

où C est une constante qui ne dépend que de d.

La dernière assertion repose sur le théorème suivant [6].

Théorème 4.2.3 (Théorème de recouvrement de Vitali) *Soit X un espace métrique séparable et $\mathcal{B}$ une famille de boules fermées de rayon non nul et majoré. Alors on peut extraire une famille dénombrable $\overline{\mathcal{B}}$ de boules disjointes telle que*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B\in\overline{\mathcal{B}}} 5B.$$

Preuve du théorème 4.2.3 dans le cas fini :

On réordonne les boules par rayon décroissant : $B_1, \ldots, B_N$. On garde B_1 et on élimine toutes les boules qui l'intersectent puisque qu'elles sont inclus dans $3B_1$. Puis on sélectionne la première boule dans l'ensemble restant : B_{i_2}. On élimine toutes les boules qui l'intersectent et on continue ainsi jusqu'à épuiser toutes les boules. Le sous ensemble ainsi formé, satisfait clairement les conditions du théorème. □

Exercise 4.2.3 Démontrer le théorème 4.2.3 dans le cas général.
Indication : Commencer par montrer qu'on peut extraire une famille disjointe "maximale", puis "ordonner" les boules.

Preuve du théorème 4.2.2 :

On vérifie facilement que $E_t = \{x \in U \,|\, M(f)(x) > t\}$ est ouvert et donc mesurable. Ce qui prouve $i)$. Comme $ii)$ est une conséquence de $iii)$, on prouve directement $iii)$. Soit $t > 0$, pour tout $x \in E_t$ il existe $r_x > 0$ tel que

$$\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int_{B(x,r_x)} |f(y)| \, d\lambda(y) > t.$$

De plus, on a

$$|B(x, r_x)| < \frac{\int_{B(x,r_x)} |f(y)| \, d\lambda(y)}{t}.$$

Soit K un compact de E_t, alors K est recouvert par un nombre finiede boules $(B(x_i, r_{x_i}))_{i=1}^N$. On applique alors le théorème de recouvrement

6. En fait une version finie suffit.

de Vitali aux $(B(x_i, r_{x_i}))_{i=1}^N$. On a donc une famille de boules disjointes $(B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}))_{j=1}^M$, telle que

$$\begin{aligned} |K| \leq \left|\bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_{x_i})\right| &\leq 3^d \left|\bigcup_{j=1}^M B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})\right| \\ &\leq 3^d \sum_{j=1}^M \left|B\left(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}\right)\right| \\ &\leq \frac{3^d}{t} \sum_{j=1}^M \int_{B\left(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}\right)} |f(y)|\, d\lambda(y) \\ &\leq \frac{3^d}{t} \|f\|_1, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ce qui achève la preuve, par régularité de la mesure de Lebesgue. ■

Exercise 4.2.4 Trouver une fonction dans L^1 dont la fonction maximale n'est pas dans L^1.

Définition 4.2.3 *On appelle point de Lebesgue de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, tout point $x \in \mathbb{R}^d$ telle que que*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0.$$

Exercise 4.2.5 Quels sont les points de Lebesgue d'une fonction continue, d'une fonction caractéristique d'un intervalle ou encore de la fonction caractéristique de l'ensemble de Cantor.

Théorème 4.2.4 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ fixé alors presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue.*

Preuve du théorème 4.2.4 :

Il suffit de montrer que

$$E_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) > t \right\}$$

est de mesure nulle. On fixe $\varepsilon > 0$, d'après le théorème 4.1.2, il existes g continue telle qui $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. D'après l'exercice précédent, on voit que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\, d\lambda(y) \leq M(f-g)(x) + |f(x)-g(x)|.$$

Donc $E_t \subset F_{\frac{t}{2}} \cup G_{\frac{t}{2}}$ où $F_t = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, M(f-g)(x) > t\}$ et $G_t = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |f(x)-g(x)| > t\}$. D'une part

$$|G_t| \leq \frac{\|f-g\|_1}{t} = \frac{\varepsilon}{t}$$

et d'autre part, d'après le théorème 4.2.2,

$$|F_t| \leq \frac{C\|f-g\|_1}{t} = \frac{C\varepsilon}{t},$$

où C ne dépend que de d. Ceci étant vrai pour tout ε, la preuve est achevée. ■

En particulier la réponse à la première partie de notre première question est affirmative. Nous développerons plus cette question au cours de la preuve du théorème de de Rademacher.

4.2.3 Théorème de Radon-Nikodym

Définition 4.2.4 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et ν une mesure complexe sur $(X, \mathcal{M})$. On dit que ν est mesurable par μ s'il existe une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $\nu = f\mu$. On dit que ν est étrangère à μ si ν et μ sont concentrés*[7] *sur des ensembles mesurables disjoints ; dans ce cas on note $\mu \perp \nu$.*

Théorème 4.2.5 (Décomposition de Lebesgue) *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et ν une mesure complexe sur $(X, \mathcal{M})$. Alors il existe une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{C}$ et une mesure complexe ν_s, telle que*

$$\nu = f\mu + \nu_s \text{ avec } \nu_s \perp \mu.$$

La mesure ν_s est unique, et la fonction f est unique à modification près sur un ensemble de μ-mesure nulle ; en particulier, la mesure $f\mu$ est unique.

7. il existe deux ensembles mesurables et disjoints A et B telle que $\mu(X \setminus A) = 0$ et $\nu(X \setminus B) = 0$.

La mesure ν_s est la partie singulière de μ par rapport à ν. La fonction f est appelée densité (ou dérivée) de Radon–Nikodym de ν par rapport à μ, et notée

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Preuve du théorème 4.2.5 :

Tout d'abord, on montre aisément qu'on peut se ramener au cas de mesure positive. Puis on montre également qu'on peut se ramener au cas où X est de mesure finie pour μ et ν à la l'aide d'une partition σ-finie.

On pose

$$\mathcal{E} = \{f : X \to [0, +\infty] \text{ mesurable } \mid f\mu \leq \nu\}.$$

Montrons que le maximum de deux éléments de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{E}$. Soir $f, g \in \mathcal{E}$, $A = \{f > g\}$ et $h = \max(f, g)$, on a

$$h\mu = f\mathbf{1}_A\mu + g\mathbf{1}_{X\setminus A}\mu = \mathbf{1}_A(f\mu) + \mathbf{1}_{X\setminus A}(g\mu) \leq \mathbf{1}_A\nu + \mathbf{1}_{X\setminus A}\nu = \nu,$$

et donc $h \in \mathcal{E}$. On généralise sans peine cet argument à un nombre finie de fonctions.
On pose alors

$$a = \sup\left\{\int_X f\,d\mu \mid f \in \mathcal{E}\right\} \leq \nu(X) < \infty,$$

et on prend une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $\int f_n\,d\mu \to a$. Quitte à remplacer f_n par $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$ on peut supposer f_n croissante et finalement on pose $f = \sup f_n$. A l'aide du théorème de convergence monotone on montre que, pour tout $A \in \mathcal{M}$, on a

$$\int_A f\,d\mu = \lim_n \int_A f_n\,d\mu \leq \nu(A),$$

donc $f \in \mathcal{E}$ et de plus

$$\int_X f\,d\mu = a.$$

On va montrer que f est la fonction cherchée, c'est à dire que $\tilde{\nu} = \nu - f\mu$ est étrangère à μ. D'après le théorème 4.2.1, il existe A_k tel que $(\tilde{\nu} - \frac{1}{k}\mu)^+$ est concentré sur A_k et $(\tilde{\nu} - \frac{1}{k}\mu)^-$ est concentré sur $X \setminus A_k$. On pose $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$

et $B = X \setminus A$. On a donc, pour tout k, $(\tilde{\nu} - \frac{1}{k}\mu)^+$ est concentré sur A, d'ou $(\tilde{\nu} - \frac{1}{k}\mu)(B) \leq 0$ pour tout k, ce qui implique $\tilde{\nu}(B) = 0$. Il suffit alors de montrer que $\mu(A) = 0$ pour prouver que $\tilde{\nu} = \nu - f\mu$ et μ sont étrangères. Or si $\mu(A) > 0$, il existe k telle que $\mu(A_k) > 0$, or $\tilde{\nu}_{|A_k} \geq \frac{1}{k}\mu_{|A_k}$, ce qui implique que

$$\nu_{|A_k} \geq \left(f + \frac{1}{k}\right)\mu_{|A_k}$$

d'ou

$$\nu \geq \left(f + \frac{1}{k}\mathbf{1}_{|A_k}\right)\mu,$$

en particulier $g = f + \frac{1}{k}\mathbf{1}_{|A_k} \in \mathcal{E}$ mais

$$\int g\, d\mu > \int f\, d\mu,$$

ce qui est une contradiction et achève la preuve du théorème. ■

Par exemple, si $\mu = \lambda_{[0,1]}$ et $\nu = \lambda_{[0,1]} + \delta_{\{1\}}$ alors

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \mathbf{1}_{[0,1)} \text{ et } \nu_s = \delta_{\{1\}}.$$

Au vu de la démonstration du théorème de Radon-Nykodim, il est clair que l'on peut remplacer la mesure complexe par une mesure (positive) σ-finie, où encore une mesure signée σ-finie. Une mesure signée est la différence de deux mesures dont l'une des deux au moins est finie.

Corollaire 4.2.1 *(Théorème de Radon-Nikodym). Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et ν une mesure complexe sur $(X, \mathcal{M})$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*

i) ν ne charge aucun ensemble μ-négligeable

ii) ν est mesurable par μ.

Exercise 4.2.6 Soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$ et ν la mesure de Lebesgue. Montrer que ν ne charge aucun ensemble μ-négligeable et que ν n'est pas μ-mesurable.

Exercise 4.2.7 On dit qu'une mesure est continue si elle ne charge aucun atome. On dit aune mesure est discrete si son support est discret, c'est alors

une somme dénombrable de dirac. Soit μ une mesure σ-fini sur $\mathbb{R}^k$, Montrer qu'il existe une fonction mesurable f, une mesure μ_1 continue et une mesure μ_2 discrete tel que

$$\mu = f\lambda + \mu_1 + \mu 2$$

et μ_i sont étrangère à λ. Cosntuire une mesure continue étrangère à la mesure Lebesgue.

4.2.4 Application

Le but cette section est d'aboutir à la formule de changement variable en différentiant la mesure image à l'aide du théorème de Radon-Nikodym. Dans la suite on se place sur $\mathbb{R}^k$ muni de la mesure de Lebesgue λ.

Théorème 4.2.6 (Changement de variables) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ continue, injective, et différentielle sur $X \subset U$ mesurable telle que $\lambda(U \setminus X) = 0$. Alors, en posant $Y = \phi(X)$, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$, on*

$$\int_Y f\, d\lambda = \int_X (f \circ \phi)\, |\det(d\phi)|\, d\lambda.$$

Preuve :

D'après le théorème 2.3.1 il suffit de prouver que $\nu = \phi^{-1}\#\lambda = |\det(d\phi)|\,\lambda$. Mais afin que ceci est un sens, il faut que ϕ^{-1} soit mesurable ce qui n'est pas évident puisque *a priori* elle n'est pas continue. Mais d'après l'exercice 2.5.1, comme $\mathbb{R}^k$ est σ-compact, on a que tout ensemble mesurable s'écrit comme union dénombrable de compacts et d'un ensemble négligeable. Comme l'image d'un compact par une application continue est compact, il suffit de vérifie que l'image d'un ensemble négligeable est mesurable. En fait on fait même mieux c'est l'objet de la première étape.

Etape 1 : ν est bien définie et ne charge aucun ensemble Lebesgue-négligeable

Soit $E \subset X$ tel que $\lambda(E) = 0$. On définit

$$F_{n,p} = \left\{ x \in E \,|\, \forall y \in B\left(x, \frac{1}{p}\right) \cap E \text{ on ait } |\phi(x) - \phi(y)| \leq n|x - y| \right\},$$

par hypothèse $E = \cup_{n,p>1} F_{n,p}$, donc il suffit de montrer que chaque $\phi(F_{n,p})$ est un inclus dans un ensemble de mesure nulle pour conclure grâce à la complétude de la mesure de Lebesgue. D'après l'exercice 3.1.4, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir $F_{n,p}$ par des boules $B(x_i, r_i)$ telle que $x_i \in F_{n,p}$, $r_i < \frac{1}{p}$ et $\sum \lambda(B(x_i, r_i)) < \varepsilon$. On vérifie alors facilement que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\phi(B(x_i, r_i))) < n^k \varepsilon,$$

on alors $\lambda(\phi(F_{n,p})) = 0$, ce qui prouve l'étape 1.

On peut donc appliquer le théorème de Radon-Nikodym : $\nu = f\lambda$. Grâce à l'étape suivante on détermine f.

Etape 2 : $\lim_{r\to 0} \dfrac{\lambda(\phi(B(x,r)))}{\lambda(B(x,r))} = |\det(d\phi_x)|$

Sans perte de généralité, on suppose que $x = 0$ et $\phi(x) = 0$ et on pose $A = d\phi(0)$. Dans un premier temps on suppose que A est injectif. On pose $F = A^{-1} \circ \phi$ et on va montrer que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(F(B(0,r)))}{\lambda(B(0,r))} = 1,$$

ce qui prouvera le résultat grâce à l'exercice 3.1.3.

Etant donné que $dF = Id$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| < \delta$ alors

$$|F(x) - x| \leq \varepsilon |x|.$$

On a alors pour tout $r < \delta$, les inclusions

$$B(0, (1-\varepsilon)r) \subset F(B(0,r)) \subset B(0, (1+\varepsilon)r),$$

d'ou pour tout $r < \delta$,

$$(1-\varepsilon)^k \leq \frac{\lambda(F(B(0,r)))}{\lambda(B(0,r))} \leq (1+\varepsilon)^k,$$

ce qui donne le résultat souhaité.

Enfin si A n'est pas injectif, dans ce cas $A(B(0,1))$ est borné et inclus dans un sous-espace strict donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η tel que $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x, A(B(0,1))) < \eta\}) < \varepsilon$. Or il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| < \delta$ alors

$$|\phi(x) - Ax| \leq \eta|x|.$$

Donc pour $r < \delta$, $\phi(B(0,r)) \subset \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x, A(B(0,r))) < r\eta\}$ or la mesure du denier ensemble est inférieur à $r^k\varepsilon$ d'après nos hypothèses, donc

$$\lambda(\phi(B(0,r)) \leq r^k\varepsilon,$$

ce qui permet d'achever la preuve. ■

4.3 Théorème Fondamental de l'analyse

Une condition intuitivement nécessaire pour que la dérivée d'une fonction soit intégrable, est que la somme des "sauts" de la fonction soit finie. D'où la définition suivante.

Définition 4.3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est à variation bornée si*

$$\sup \sum_i |f(t_i) - f(t_{i+1})| < +\infty,$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Dans ce cas on note $T_f(a,b)$ ce supremum, c'est la variation total de f sur $[a,b]$. On définit également la variation positive de f, comme suit

$$P_f(a,b) = \sup \sum_i \varepsilon_i(f(t_i) - f(t_{i-1}),$$

où ε_i vaut 1 si $f(t_i) \geq f(t_{i-1})$ et 0 sinon. Ainsi que la variation négative de f, comme suit

$$N_f(a,b) = \sup \sum_i \varepsilon_i(f(t_i) - f(t_{i-1}),$$

où ε_i vaut -1 si $f(t_i) \leq f(t_{i-1})$ et 0 sinon.

Théorème 4.3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, alors*

$$f(x) - f(a) = P_f(a,x) - N_f(a,x)$$

et

$$T_f(a,x) = P_f(a,x) + N_f(a,x).$$

En conséquence toute fonction à variation bornée peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes bornées.

Exercise 4.3.1 Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est au plus dénombrable.
Soit alors x_n les points de discontinuité et $s_n = f(x_n^+) - f(x_n^-)$. On pose alors

$$J_f = \sum_n s_n h_n(x),$$

où $h_n(x) = 0$ si $x < x_n$, $\frac{f(x_n)-f(x_n^-)}{s_n}$ si $x = x_n$ et 1 sinon.
Montrer que $f - J_f$ est croissante et continue et que J_f est dérivable presque partout.

Avant de démontrer que toute fonction continue et croissante est dérivable presque partout, ce qui nous permettra, de prouver que tout fonction à variation bornée est dérivable presque partout, nous laissons à titre d'exercice le lemme classique suivant, connu sous le nom de *rising sun lemma*

Exercise 4.3.2 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et

$$E = \{x \mid f(x+h) > f(x) \text{ pour un certain } h > 0\}.$$

Si E est non vide alors il est ouvert et peux s'écrire comme union disjointe d'intervalles ouverts (a_k, b_k) telle que si l'intervalle est fini alors $f(a_k) = f(b_k)$.

Théorème 4.3.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, alors f est dérivable presque partout.*

Preuve :

D'après l'exercice 4.3.1, on peut supposer que f est continue. Soit $\Delta_h(f)(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Etape 1 : $\limsup_{h\to 0^+} \Delta_h(f)(x) < +\infty$ *presque partout.*

Soit $\delta > 0$, on pose $E_\delta = \{x \mid \limsup_{h\to 0} \Delta_h(f)(x) > \delta\}$. On montre sans difficulté que c'est un ensemble mesurable. Puis en appliquant l'exercice

4.3.2 à $g(x) = f(x) - \gamma x$, on trouve une suite d'intervalles (a_k, b_k) disjoints telle que $f(b_k) - f(a_k) \geq \delta(b_k - a_k)$ qui recouvre E_δ. D'ou

$$|E_\delta| \leq \sum_k |b_k - a_k| \leq \frac{1}{\delta} \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \leq \frac{f(b) - f(a)}{\delta},$$

on conclut en laissant tendre δ vers l'infini.

Etape 2 : $\limsup_{h \to 0^+} \Delta_h(f)(x) \leq \liminf_{h \to 0,^-} \Delta_h(f)(x)$ *presque partout.*

Il suffit de montrer que pour tout $R > r$ l'ensemble

$$E = \left\{ x \mid \limsup_{h \to 0^+} \Delta_h(f)(x) > R > r > \liminf_{h \to 0,^-} \Delta_h(f)(x) \right\}$$

est de mesure nulle. Par l'absurde, il existe O ouvert tel que $E \subset O$ $|O| < |E|\frac{R}{r}$. Cette ouvert est union dénombrable d'intervalles disjoints I_n, en appliquant l'exercice 4.3.2, on trouve dans chaque intervalle une union disjointe (a_k, b_k) telle que

$$F(b_k) - F(a_k) \leq r(b_k - a_k).$$

En appliquant encore une fois l'exercice 4.3.2, on trouve dans chaque intervalle (a_k, b_k) une union disjointe (a_k^i, b_k^i) telle que

$$F(b_k^i) - F(a_k^i) \geq R(b_k^i - a_k^i).$$

Notons $O_n = \cup_{k,i}(a_k^i, b_k^i)$, comme f est croissante, on a

$$\begin{aligned} |O_n| = \sum_{k,i} b_k^i - a_k^i &\leq \sum_{k,i} \frac{1}{R} F(b_k^i) - F(a_k^i) \\ &\leq \sum_k \frac{1}{R} F(b_k) - F(a_k) \leq \frac{r}{R} \sum_k (b_k - a_k) \\ &\leq \frac{r}{R} |I_n| \end{aligned}$$

Enfin on remarque $O_n \subset I_n$ et $O_n \cap E \subset I_n$, d'ou

$$|E| \leq \sum_n |E \cap I_n| \leq \sum_n |O_n| \leq \sum_n |I_n| \leq \frac{r}{R}|O| < |E|,$$

d'ou la contradiction souhaitée. ■

Bien qu'une fonction croissante continue soit dérivable presque partout, on n'a pas nécessairement $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt$ comme on l'a vu avec l'escalier de Cantor, exercice 4.2.2. Toutefois on a toujours l'inégalité suivante.

Exercise 4.3.3 Soit f une fonction continue croissante. Montrer que f' est mesurable et que

$$\int_a^b f'(t)\,dt \leq f(b)-f(a).$$

Indication : utiliser le lemme de Fatou sur une suite adéquate.

On va donc considérer une classe de fonctions plus régulières pour démontrer le théorème fondamentale de l'analyse.

Définition 4.3.2 *Soit $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est absolument continue si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ telle que*

$$\sum_{k=1}^N b_k-a_k<\delta \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^N f|(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon,$$

pour toute famille (a_k,b_k) d'intervalles disjoints.

Avant dénoncer le théorème centrale, nous avons besoin d'une version améliorée du théorème de recouvrement de Vitali, dont on laisse la démonstration en exercice.

Exercise 4.3.4 On appelle recouvrement de Vitali d'un ensemble $E\subset \mathbb{R}^d$, un ensemble de boules $\mathcal{B}$ tel que pour tout $x\in E$ et $\eta>0$ il existe une boule de rayon inférieur à η et contenant x dans $\mathcal{B}$. Montrer que, pour tout $\delta>0$, on peut extraire de tout recouvrement de Vitali, un ensemble fini de boules disjointes B_i tel que

$$\sum_{i=1}^N |B_i|\geq |E|-\delta.$$

Théorème 4.3.3 *Si f est absolument continue sur $[a,b]$ alors f est dérivable presque partout. De plus si $f'=0$ presque partout alors f est constante.*

Preuve :

La première partie du théorème est une simple conséquence du fait que f est continue et à variation borné et du théorème 4.3.2 et de l'exercie 4.3.1.

Supponsosn que $f' = 0$ presque partout, il suffit alors de montrer que $f(b) = f(a)$ et dans le cas général il suffira de remplacer $[a, b]$ par n'importe quel sous intervalle. Soit $\varepsilon >$ et $E = \{x \mid f'(x) \text{ existe et } f'(x) = 0\}$, pour tout point $x \in E$, il existe (a_x, b_x) tel que $b_x - a_x \leq \eta$ et $f(b_x) - f(a_x) \leq \varepsilon(b_x - a_x)$, où η est donné par l'absolue continuité. D'après l'exercice précédent on peut extraire de ce recouvrement, une famille finie (a_i, b_i) d'éléments disjoints telle que

$$\sum_i b_i - a_i \geq (b - a) - \delta,$$

où δ est associé ε vis-à-vis de l'absolue continuité.

De plus on a

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon(b - a).$$

Comme les (a_i, b_i) sont disjoints, leur complémentaire est également une union disjointe d'intervalle que l'on notera (c_k, d_k). En appliquant l'absolue continuité on obtient

$$\sum_k |f(d_k) - f(c_k)| \leq \varepsilon.$$

Finalement en sommant et en faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat souhaité. ■

Corollaire 4.3.1 (Théorème fondamental de l'analyse) *Soit f une fonction absolument continue sur $[a, b]$, alors f' existe presque partout et*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Exercise 4.3.5 Démontrer ce théorème.

4.4 Ensemble rectifiable et inégalité isopérimétrique

Chapitre 5

Intégration à valeurs vectorielles

5.1 Intégration dans un espace réflexif

Théorème 5.1.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et E un espace vectoriel normé réflexif. Soit $f : X \to E$ mesurable quand E est muni de la topologie faible, telle que $\int \|f(x)\| \, d\mu(x) < \infty$. Alors il existe un unique élément I de E tel que*

$$\langle \xi, I \rangle = \int_X \langle \xi, f(x) \rangle \, d\mu(x) \text{ pour tout } \xi \in E^*.$$

On dit que I est l'intégrale faible de f et on note

$$I = \int_X f(x) \, d\mu(x).$$

Preuve :
On remarque d'abord que $\|f\|$ est mesurable, puisque la norme est semi-inférieurement continue pour la topologie faible. Pour tout $\xi \in E^*$, on a

$$|\langle \xi, f(x) \rangle| \leq \|\xi\| \, \|f(x)\|$$

donc $x \mapsto \langle \xi, f(x) \rangle \in L^1(\mu)$ pour tout $\xi \in E^*$. On pose alors pour tout $\xi \in E$,

$$l(\xi) = \int \langle \xi, f(x) \rangle \, d\mu(x),$$

on vérifie que l définit bien une forme linéaire continue sur E^*. Donc $l \in E^{**} \equiv E$ par réflexivité, ce qui achève la preuve. ■

Exercice 5.1.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espace mesuré, définir une intégrale pour les fonctions de X dans $L^p(Y, \nu)$, avec $1 < p < \infty$. De même pour $p = 1$, en supposant que X et Y sont σ-finis.*

5.2 Intégrale de Bochner

Le but de cette section est définir une intégrale de Lebesgue à valeur dans un Banach. Par contre il n'aura pas de preuve, on renvoie à [Lan93] pour les détails. Dans toute cette section, on fixe E un espace de Banach que l'on munit des boréliens et un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Théorème 5.2.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans E. Si $f_n \to f$ simplement, alors f est mesurable.*

Comme dans le cas complexe on définit les fonctions simple comme une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles de mesure fini, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

où $a_i \in E$ et $\mu(A_i) < \infty$.

Définition 5.2.1 (μ-mesurabilité) *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to E$. On dit que f est μ-mesurable, s'il existe une suite de fonctions simples qui converge μ-presque partout vers f.*

Exercice 5.2.1 *Montrer que si l'espace mesuré est complet alors la μ-mesurabilité implique la mesurabilité.*

A partir de maintenant on ne considère que des espaces mesurés complets.

Théorème 5.2.2 *Soit (f_n) une suite de fonctions μ-mesurables sur X à valeurs dans E. Si $f_n \to f$ presque partout, alors f est μ-mesurable.*

Corollaire 5.2.1 *Si X est σ-fini et E est séparable alors la μ-mesurabilité et la mesurabilité sont deux notions équivalentes.*

Les théorèmes précédents nous ont permis de définir une notion de mesurabilité stable par passage à la limite. Ce qui est essentielle pour définir une intégrale d'une fonction par approximation par des fonctions "simples". De plus sous des hypothèses raisonnables, cette notion est équivalente à la notion classique de mesurabilité.

Lorsque $s = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ est une fonction simple, on définit l'intégrale de s comme suit

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) a_i,$$

avec la convention $\mu(A) \times 0 = 0$. On vérifie sans peine que cette définition est indépendante de la décomposition de s. De plus cette intégrale définit une forme linéaire sur les fonctions simples et vérifie l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire

$$\left\| \int_X s \, d\mu \right\| \leq \int_X \|s\| \, d\mu.$$

Définition 5.2.2 *Une fonction $f : X \to E$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions simples (s_n) telle que*

i) $s_n \to f$ *μ-presque partout,*

ii) $\int_X \|s_n - f\| \, d\mu \to 0$.

On dit que s_n est une suite approximante de f.

Théorème 5.2.3 (Critère d'intégrabilité) *Une fonction $f : X \to E$ est intégrable si et seulement si f est μ-mesurable et $\int_X \|f\| \, d\mu < \infty$.*

Définition 5.2.3 *Soit $f : X \to E$ intégrable, on définit l'intégrale de f comme suit*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_n \int_X s_n \, d\mu,$$

où s_n est une suite approximante.[1]

Proposition 5.2.1 (linéarité) *Soit F un espace de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Si $f : X \to E$ est intégrable alors $T(f)$ est intégrable et*

$$\int_X T(f) \, d\mu = T\left(\int_X f \, d\mu \right).$$

1. On vérifie sans peine que cette définition ne dépend pas de la suite choisie.

Exercice 5.2.2 *Vérifier que le théorème de convergence dominé et le théorème de Fubini sont encore vrais pour des intégrales à valeurs dans un Banach.*

Exercice 5.2.3 *Soit G un groupe localement compact et $f \in C_c(G)$ et $g \in L^1(G)$. Vérifier que la convolution $f * g$ n'est rien d'autre que l'intégrale de Bochner de l'application $x \mapsto f(x)L_x g$.*

5.3 Formule de Cauchy généralisée

Le théorème suivant généralise la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphe à des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 5.3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, E un espace de Banach et $f : U \to E$ holomorphe*[2]*. Pour tout disque $D(x, r)$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et $z \in D(z_0, r)$ on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(x,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Preuve :
Soit $l : E \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue, alors

$$l\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(x,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(x,r)} \frac{l(f(\xi))}{\xi - z}\, d\xi = l(f(z)),$$

d'après la formules de Cauchy classique. D'après le théorème de Hahn-Banach, on a l'égalité désirée. ■

2. c'est à dire $\mathbb{C}$-dérivable.

Chapitre 6

Généralités sur les algèbres de Banach

6.1 Rappel sur les espaces de Banach

Tout d'abord une conséquence remarquable du théorème de Baire est le théorème suivant qui nous assure, entre autre chose, qu'une suite est bornée si et seulement si elle est bornée contre toute forme linéaire continue, voir [Rud80] 5.10. En particulier toute suite qui converge faiblement est bornée.

Théorème 6.1.1 (Banach-Steinhaus) *Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel de normé et une suite d'opérateurs linéaires bornés (T_α) entre X et Y, alors si pour tout $x \in X$ on a*

$$\sup_\alpha \|T_\alpha(x)\| < +\infty,$$

il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_\alpha \|T_\alpha(x)\| \leq M.$$

Nous rappelons également une des conséquences du théorème de Hahn-Banach, pour plus de précision voir [Rud80] 5.16 à 5.21.

Théorème 6.1.2 (Hahn-Banach) *Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) normé et $x \in E \setminus \{0\}$, il existe une forme linéaire continue $f \in E'$, de norme 1, telle que $f(x) = \|x\|$.*

6.2 Définitions

Définition 6.2.1 *Une algèbre $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel muni d'une multiplication qui vérifie*

i) Bilinéarité : pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $x, y, z \in \mathcal{A}$ on a

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz),$$

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz),$$

ii) Associativité : x(yz)=(xy)z .

Lorsque $\mathcal{A}$ possède une unité, on la notera $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ (ou simplement $\mathbf{1}$) et on parlera d'algèbre unitaire.

Définition 6.2.2 *Une algèbre normée $\mathcal{A}$ est une algèbre munie d'une norme $\|\,.\,\|$ qui vérifie*

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \text{ pour tout } x, y \in \mathcal{A}.$$

Une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

Exemples :

i) L'ensemble des matrices $M_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Banach pour la multiplication et

$$\|(a_{ij})\| = \sum_{ij} |a_{ij}|.$$

ii) Soit E un Banach, $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continues de E muni de la composition et de la norme d'opérateur est une algèbre de Banach.

iii) Soit X un espace compact, $C(X)$, l'ensemble des fonctions continues muni de la multiplication et de la norme uniforme est une algèbre de Banach.

iv) *L'algèbre du disque* des fonctions continues de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{D}$ est une sous-algèbre de Banach de $C(\overline{\mathbb{D}})$.

v) *L'algèbre de Weiner* des fonctions continues de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty,$$

$$\text{où } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta,$$

munie de la multiplication et de $\|\,.\,\|$ est une algèbre de Banach.

vi) *L'algèbre de Convolution* $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ munie de $\|\,\|_1$ est une algèbre de Banach.

Le dernier exemple se généralise à tout groupe localement compact muni de μ, une mesure de Haar. En effet, l'ensemble des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ intégrables par rapport à μ, muni de la norme

$$\|f\| = \int_G |f|\, d\mu,$$

et de la multiplication

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, d\mu(y),$$

est une algèbre de Banach. De plus elle est commutative si et seulement si G l'est.

Exercice 6.2.1 *Vérifier la dernière assertion.*

Par contre ce n'est pas une algèbre unitaire, mais on peut définir une *approximation de l'unité* comme suit. Soit U un voisinage symétrique et compact de e, par le lemme d'Urysohn, il existe une $f \in C_c(G,[0,1])$, que l'on peut supposer également symétrique, telle que $f_{|U} \equiv 1$ sur U, quitte à normaliser f , on a $f_U \in C_c(G,[0,+\infty[)$ telle que $f_{|U} > 0$ sur U et $\int_G f_U\, d\mu = 1$. Soit $(U_i)_{i\in I}$une base de voisinage voisinage symétrique compact de e alors $(f_{U_i})_{i\in I}$ forment une approximation de unité, dans le sens ou pour tout $g \in L^1(G)$ on a $(f * f_{U_i})$ et $(f_{U_i} * f)$ converge f dans $L^1(G)$. De plus si $f \in C_c(G)$ alors la convergence est ponctuelle.

Exercice 6.2.2 *Démontrer les deux dernières assertions.*

La multiplication à gauche, $L_x(y) = xy$, est un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, en fait on peut considérer $\mathcal{A}$ comme une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ grâce au théorème suivant.

Théorème 6.2.1 *Soit une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ unitaire, alors l'application $x \mapsto L_x$ définit un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{A}$ sur une sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ tel que*

i) $L_{\mathbf{1}} = Id$,

ii) pour tout $x \in \mathcal{A}$ on a

$$\frac{\|x\|}{\|\mathbf{1}\|} \leq \|L_x\| \leq \|x\|.$$

En particulier pour la norme (équivalente) $\|x\|_1 = \|L_x\|$ on a $\|\mathbf{1}\|_1 = 1$.

Dés lors, en présence d'une algèbre de Banach unitaire on supposera toujours que $\|\mathbf{1}\| = 1$. L'application $x \mapsto L_x$ est appelée **représentation régulière** de $\mathcal{A}$.

6.3 Spectre d'un élément d'une algèbre de Banach

Dans cette section $\mathcal{A}$ désigne une algèbre de Banach unitaire.

Définition 6.3.1 *Soit $x \in \mathcal{A}$, on appelle spectre de x, que l'on note $\sigma(x)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x - \lambda\mathbf{1}$ n'est pas inversible.*

Exercise 6.3.1 Soit $a, b \in \mathcal{A}$, si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \in \sigma(ab) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(ba)$.

Exercice 6.3.1 *Soit $x \in \mathcal{A}$ tel que $\|x\| < 1$, montrer que $\mathbf{1} - x$ est inversible et que*[1]

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

En déduire que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{A}^{-1}$, est un ouvert. Enfin montrer que $x \mapsto x^{-1}$ est différentiable et de différentielle $h \mapsto -x^{-1}hx^{-1}$.

On remarque alors que le spectre est fermé, étant donné que son complémentaire est ouvert.

Exercise 6.3.2 Soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}$, montrer que $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ et que $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

1. Cette formule est connue sous le nom de série de Neumann.

Théorème 6.3.1 *Pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x)$ est un compact non vide de $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq \|x\|\}$.*

Preuve du théorème 6.3.1 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|x\|$. On a

$$x - \lambda\mathbf{1} = -\lambda(\mathbf{1} - \lambda^{-1}x),$$

et vu que $\|\lambda^{-1}x\| < 1$, d'après l'exercice 6.3.1, $x - \lambda\mathbf{1}$ est inversible. D'autre part vu que $\lambda \mapsto x - \lambda\mathbf{1}$ est continue et que $\mathcal{A}^{-1}$ est ouvert, toujours d'après l'exercice 6.3.1, on déduit que le spectre est fermé et borné, donc compact.

Enfin si $\sigma(x)$ était vide, alors, pour toute forme linéaire continue $l \in \mathcal{A}'$, l'application définit par

$$f(\lambda) = l((x - \lambda\mathbf{1})^{-1})$$

serait holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, par hypothèse elle est définie sur $\mathbb{C}$, et si on utilise le fait que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est différentiable sur $\mathcal{A}^{-1}$ et que sa différentielle est égale à l'application de $\mathcal{A}$ dans lui-même définie par

$$h \mapsto -x^{-1}hx^{-1}.$$

Alors f est différentiable et sa différentielle est égale à

$$df = -l((x - \lambda\mathbf{1})^{-2})Id,$$

qui est conforme, donc f est holomorphe. De plus, on vérifie aisément que $f(\lambda) \to 0$ lorsque $|\lambda| \to +\infty$. D'après le théorème de Liouville f est identiquement nulle. Ceci étant vraie pour toute forme linéaire, d'après le théorème 6.1.2 de Hahn-Banach, $(x - \lambda\mathbf{1})^{-1} = 0$ pour tout λ, ce qui est absurde. ■

Exercice 6.3.2 (Théorème de Gelfand-Mazur) *Montrer que si $\mathcal{A}$ est un corps alors $\mathcal{A}$ est isométrique à $\mathbb{C}$.*

Définition 6.3.2 *Soit $x \in \mathcal{A}$, le rayon spectral de x, noté $\rho(x)$, est défini comme*

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Théorème 6.3.2 (Formule du rayon spectrale de Beurling-Gelfand) *Soit $x \in \mathcal{A}$, alors*

$$\rho(x) = \lim_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Preuve :

Soit $\lambda \in \sigma(x)$ alors $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. En effet

$$x^n - \lambda^n \mathbf{1} = (x - \lambda\mathbf{1}) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} x^k.$$

D'ou $\lambda \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, ce qui donne

$$\rho(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

D'autre part, soit $l \in \mathcal{A}'$, et comme pour le théorème 6.3.1 posons

$$f(\lambda) = l((x - \lambda\mathbf{1})^{-1}).$$

Par définissions f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, \rho(x))}$, on peut même la développer en série de Laurent à l'aide de la série de Neumann [2], ce qui donne

$$f(\lambda) = -\lambda^{-1} l((\mathbf{1} - \lambda^{-1}x)^{-1}) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l(x^n)}{\lambda^n}.$$

En particulier la suite $\left(l\left(\frac{x^n}{\lambda^n}\right)\right)$ est bornée. La dernière assertion étant vraie pour toute forme linéaire, le théorème 6.1.1 de Banach-Steinhaus nous assure que $\left(\frac{x^n}{\lambda^n}\right)$ est bornée, ce qui implique $\limsup_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lambda$. D'ou

$$\limsup_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x),$$

ce qui achève la preuve. ■

Exercise 6.3.3 Montrer que si $\|x\| = \|x^2\|^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a alors $\rho(x) = \|x\|$.

2. Le fait que la série converge sur $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, \rho(x))}$ alors qu'elle est définie*a priori* sur $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, \|x\|)}$ est conséquence de la formule de Cauchy.

6.4 Idéaux, caractères et transformé de Gelfand

Dans cette section $\mathcal{A}$ désigne une algèbre de Banach unitaire.

Définition 6.4.1 *Un idéal de $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel I invariant à droite et à gauche, i.e. $\mathcal{A}I+I\mathcal{A} \subset I$. Un idéal est dit maximal s'il est différent de $\mathcal{A}$ et si le seul autre idéal le contenant est l'algèbre $\mathcal{A}$ tout entière.*

Proposition 6.4.1 *Tout idéal maximal est fermé.*

Preuve : Si I est un idéal on vérifie sans peine que $\overline{I}$ est encore un idéal. Donc si M est un idéal maximal comme il est différent de $\mathcal{A}$ il est disjoint de l'ouvert $\mathcal{A}^{-1}$ et donc son adhérence également, d'où $\overline{M} = M$. □

Un exemple d'idéal est donné par le noyau d'une forme linéaire continue compatible avec la multiplication, ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 6.4.2 *On appelle caractère de $\mathcal{A}$, tout homomorphisme*[3] *de $\mathbb{C}$-algèbre de $\mathcal{A}$ vers $\mathbb{C}$. On notera $\mathcal{M}$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$.*

Exercice 6.4.1 *L'ensemble des caractères peut être vide, puisque $\phi(\mathbf{1}) = 1$ exclu le caractère trivial. Démontrer ce fait en considérant l'algèbre $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.*

Exemples :

i) Soit $\mathcal{A} = C(X)$ où X est compact. Alors l'évaluation $m_x(f) = f(x)$ défini un caractère de $\mathcal{A}$.

ii) Soir G un groupe ALC et $\mathcal{A} = L^1(G, \mu)$ où μ est une mesure de Haar. Alors à tout élément $\chi \in \widehat{G}$, on peut associer

$$m_\chi(f) = \hat{f}(\xi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, dx,$$

qui est un caractère de $\mathcal{A}$.

Exercise 6.4.1 Montrer qu'un caractère est automatiquement continue, en particulier que $\mathcal{M}$ est un sous ensemble de la sphère unité de $\mathcal{A}'$.

3. Si $\mathcal{A}$ n'était pas unitaire on peut utiliser cette définition si on ajoute l'hypothèse continue et non nul. C'est d'ailleurs comme cela que l'on concevra les caractères de $L^1(G)$.

Comme on l'a déjà remarqué le noyau d'un caractère est un idéal, en fait c'est même un hyperplan, ce qui laisse à penser qu'il est maximal, ce que confirme le théorème suivant.

Théorème 6.4.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et* **commutative**, *L'application $\phi \mapsto Ker(\phi)$ est une bijection de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ sur l'ensemble des idéaux maximaux.*

Preuve :
Comme l'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative, I est un idéal maximal si et seulement si $\mathcal{A}/I$ est un corps. Donc clairement le noyau d'un caractère est un idéal maximal. D'autre part si deux caractères ont le même noyau alors il sont proportionnels en tant que forme linéaire et comme ils prennent la même valeur sur $\mathbf{1}$, ils sont égaux. Enfin soit M un idéal maximal alors $\mathcal{A}/M$ est un corps. On munit ce corps d'une norme, en posant

$$\|[x]\| = \inf_{u \in [x]} \|u\|.$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit bien d'une norme qui fait de $\mathcal{A}/M$ une algèbre de Banach, elle est donc isomorphe à $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Gelfand-Mazur, on obtient le caractère cherché en relevant l'isomorphisme, ce qui achève la preuve. ■

Exercise 6.4.2 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et **commutative**, montrer [4] que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. En déduire que $x \in \mathcal{A}$ est inversible si et seulement si pour tout $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ on a $\phi(x) \neq 0$.

Dans la suite $\mathcal{A}$ désignera une algèbre de Banach unitaire et **commutative**.

Définition 6.4.3 *Pour $a \in \mathcal{A}$ on définit $\hat{a} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ par*

$$\hat{a}(\phi) = \phi(a),$$

c'est-à-dire l'évaluation en a d'un caractère. $\hat{a}$ est la transformé de Gelfand de a et l'application $a \mapsto \hat{a}$ est la transformation de Gelfand.

4. Il faut probablement utiliser Zorn.

Théorème 6.4.2 *Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $Im(\hat{a}) = \sigma(a)$. En particulier,*

$$\sup_{\phi \in \mathcal{M}} |\phi(a)| = \rho(a).$$

Preuve :

$\lambda \in \sigma(a)$ équivaut à $a - \lambda\mathbf{1}$ n'est pas inversible, c'est à dire il existe $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tel que $\phi(a) = \lambda$, i.e. $\lambda \in Im(\hat{a})$. ■

On va maintenant munir $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ d'une topologie qui rende continue la transformé de Gelfand. Il s'agit de la topologie faible* qui est la topologie la moins fine rendant les évaluations continues. Une base de cette topologie est donnée par

$$\bigcap_{i=1}^{n} \hat{a}_i^{-1}(U_i),$$

où les U_i sont des ouverts de $\mathbb{C}$. Dés lors le théorème de Banach-Alaoglu et l'exercice 6.4.1 nous assure que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ est relativement compact. En fait on a mieux.

Proposition 6.4.2 *$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ est compact pour la topologie faible*. Si $\mathcal{A}$ est unitaire, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ est compact .*

Par contre en générale cette application n'est pas surjective, voir l'exercice 6.5.2.

Preuve :

Il suffit de montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ est fermé. Or il s'agit de l'ensemble des applications linéaire continue f de la boules unités qui vérifie $f(1) = 1$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ or c'est conditions sont clairement fermées vis-à-vis à la topologie faible*. □

Dans le cas d'une algèbre on unitaire comme $L^1(G)$ on peut seulement dire que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ est relativement compact, car apriori non-fermé. A priori on peut trouver une suite de caractère qui converge vers 0, comme $f \mapsto \hat{f}(n)$.

Théorème 6.4.3 *La transformation de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ est un homomorphisme d'algèbre continue.*

Preuve :
Le caractère marphisme est évident. Pour la continuité, il suffit de remarquer que

$$\|\hat{a}\| = \sup_{\phi \in \mathcal{M}} |\phi(a)| = \rho(a) \leq \|a\|,$$

ici on a utiliser le théorème 6.4.2. ■

On rappelle que la topologie compact-ouvert sur $C(X, \mathbb{C})$, où X est un espace localement compact, est engendrée voisinage suivante

$$V(K, U) = \{f \mid f(K) \subset U\},$$

où K est un compact de X et U un ouvert de $\mathbb{C}$. On vérifie facilement que cette topologie est séparée et qu'en fait la converge d'une suite de fonction est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact.

Exercise 6.4.3 Soit G un groupe ALC et on munit $\hat{G}$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Montrer que $\hat{G}$ est un groupe topologique.

Exercise 6.4.4 Soit G un groupe ALC et on munit $\hat{G}$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Montrer que l'application $\chi \mapsto m_\chi$ de $\widehat{G}$ dans $\mathcal{M}_{L^1(G)}$ défini par $m_\chi(f) = \hat{f}(\xi)$ est un homéomorphisme. En déduire que $\widehat{G}$ est localement compact. On peut en déduire également un équivalent du théorème de Riemann-Lebesgue : $\hat{f}$ s'annule à l'infini.

6.5 Exemples d'applications de la théorie de Gelfand

Théorème 6.5.1 *Les caractères de l'algèbre de Wiener sont exactement les* $e_z : W \to \mathbb{C}$ *définis par*

$$e_z(f) = f(z),$$

avec $z \in \overline{\mathbb{T}}$.

Preuve :
Soit ϕ un caractère, $I : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ définie par

$$I(e^{i\theta}) = e^{i\theta},$$

et on pose $u = \phi(I)$. Alors $u \in \mathbb{T}$ car $|u| = |\phi(I)| \leq \|I\| = 1$ et de même $|u^{-1}| = |\phi^{-1}(I)| \leq \|\overline{I}\| = 1$. D'autre part on vérifie que chaque élément de W est limite uniforme de sa série de Fourier, en effet

$$\|f - S_N\| \leq \sum_{|n|>N} |\hat{f}(n)|,$$

où $S_N = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n) I^n$. D'ou

$$\phi(f) = f(u),$$

ce qui achève la preuve. ■

Exercice 6.5.1 *En utilisant le fait que les applications polynomiales sont denses dans l'algèbre du disque, en déduire que les caractères de cette algèbre sont exactement les $e_z : A \to \mathbb{C}$ définis par*

$$e_z(f) = f(z),$$

avec $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

On obtient comme conséquence immédiate du théorème précédent le résultat non-trivial suivant.

Corollaire 6.5.1 (Lemme de Wiener) *Si $f \in W$ ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$, alors $\frac{1}{f} \in W$.*

On pourra se convaincre de la puissance de la théorie de Gelfand, en consultant une preuve du lemme de Wiener basée uniquement sur l'utilisation de série de Neumann, voir [CQ] 3.8 chapitre II.

Attention, les caractères de toutes les algèbres de fonctions ne sont pas forcément réduit au évaluation, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 6.5.2 *Soit H^∞ l'ensemble des fonction holomorphe borné sur $\mathbb{D}$.*

i) Montrer que c'est une algèbre de Banach pour la norme sup.

On note I l'application l'identité sur $\mathbb{D}$ et N l'ensemble des applications de H^∞ telles que

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

ii) *Montrer qu'il existe* $\phi \in \mathcal{M}_{H^\infty}$ *tel que* $\phi(f) = 0$ *pour tout* $f \in N$ *et* $\phi(I) = 1$.

iii) *Montrer que* ϕ *n'est pas une évaluation.*

Par contre le théorème de la couronne de Carleson affirme que les évaluations sont denses dans $\mathcal{M}_{H^\infty}$ *voir [CQ].*

6.6 Théorème de Levy-Wiener

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative unitaire. A l'aide du chapitre précédent, on a la formule de Cauchy suivante :

Soit $x \in \mathcal{A}$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contentant $\sigma(x)$, $\gamma \subset \Omega$ un contour fermé contenu dans Ω tel que tout élément de $\sigma(x)$ soit d'indice 1 par rapport à γ, alors pour tout f holomorphe sur Ω on pose

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta e - x)^{-1}\, d\zeta.$$

Théorème 6.6.1 *Soient* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Banach commutative unitaire ,* $x \in \mathcal{A}$ *et* f *une fonction holomorphe sur un voisinage de* $\sigma(x)$ *alors* $f \circ \hat{x} = \widehat{f(x)}$.

Dans le cas de l'algèbre de Wiener où chaque élément de W peut s'identifier à sa transformée de Gelfand on a que $f(x) \in W$ pour toute fonction holomorphe définie sur un voisinage du spectre de x. On parle de calcul fonctionnel holomorphe.

Chapitre 7

Opérateur sur un espace de Hilbert et C^*-algèbre

Dans cette section H désignera un espace de Hilbert et $\langle\, ,\, \rangle$ son produit scalaire, linéaire en la première variable et antilinéaire en la seconde, on parle de forme sesquilinéaire.

Un outil fondamental pour l'étude des espaces de Hilbert est le lemme de Riesz, voir [Rud80] 4.12.

Lemme 7.0.1 (Riesz) *Soit l une forme continue sesquilinéaire sur H alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que*

$$l(x, y) = \langle A(x), y\rangle \text{ pour tout } x, y \in H.$$

Définition 7.0.1 *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{B}(H)$ tel que*

$$\langle A^*(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle \text{ pour tout } x, y \in H.$$

A^* est appelé l'adjoint de A.

Dorénavant, on notera aussi λ^* pour le conjugué d'un nombre complexe λ.

Exercise 7.0.1 Montrer que

i) $A^{**} = A$,

ii) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha^* A^* + \beta^* B^*$,

iii) $(AB)^* = B^*A^*$,

iv) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

Indication : pour le iv) montrer que si $A = A^*$ alors $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle|$.

Définition 7.0.2 *On dit que $A \in \mathcal{B}(H)$ est auto-adjoint si $A = A^*$, normal si $AA^* = A^*A$ et unitaire si $AA^* = A^*A = Id$. On dit que $A \in \mathcal{B}(H)$ est positif si pour tout $x \in H$ on a $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.*

Exercise 7.0.2 Montrer que, si H est complexe, tout opérateur positif $A \in \mathcal{B}(H)$ est nécessairement auto-adjoint [1]. Montrer que tout opérateur positif $A \in \mathcal{B}(H)$, tel que $\|A\| \leq 1$, vérifie $\|Id - A\| \leq 1$. Conclure qu'il existe un unique opérateur positif $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $B^2 = A$.

Théorème 7.0.1 (Décomposition polaire) *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, il existe une une isométrie partielle* [2] *$U \in \mathcal{B}(H)$ telle que $A = UR$, où R est l'unique opérateur positif tel que $R^2 = A^*A$. De plus U est complètement déterminé par la condition $KerU = KerA$.*

Preuve :

Soit B positif tel que $B^2 = A^*A$, on définit $U \in \mathcal{B}(ImB, ImA)$ par $U(B(x)) = A(x)$. Vu qu'on a

$$\|B(x)\|^2 = \langle x, A^*A(x)\rangle = \|A(x)\|^2,$$

U est bien défini et c'est une isométrie. On peut donc l'étendre à $\overline{ImB}$ par continuité, puis à H tout entier en posant $U_{|(\overline{Im(B)})^\perp} = 0$. Enfin on a $KerA = KerB = (ImB)^\perp = KerU$. L'unicité suit facilement. $\square$

Définition 7.0.3 (C^*-algèbre) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach munie d'une application $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, si*

i) $*$ vérifie i),ii) et iii) de l'exercice 7.0.1, on dit que $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre.

ii) Si de plus $*$ vérifie iv) de l'exercice 7.0.1, on dit que $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre.

iii) Enfin si c'est une sous-algèbre fermée $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ telle que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, alors on dit que $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre d'opérateurs.

1. le reste de l'exercice est vrai dans le cas réel lorsque l'opérateur est supposé auto-adjoint.

2. $U_{|(KerU)^\perp}$ est une isométrie.

Dans cette définition on ne suppose pas que $\mathcal{A}$ possède une unité. Mais en regardant $\mathcal{A}$ comme une sous algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, comme au théorème 6.2.1, on peut la munir d'une unité sans modifier sa structure de C^*-algèbre. Voir paragraphe 2.9 [Arv02] pour une preuve du résultat suivant.

Théorème 7.0.2 *Soit $\mathcal{A}$ une C^* algèbre et $\mathcal{A}^e = \{L_a + \lambda\mathbf{1} \,|\, a \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ alors c'est une C^*-algèbre pour l'involution $(L_a + \lambda Id)^* = L_{a^*} + \lambda^* Id$ et la norme d'opérateur. De plus la représentation $a \mapsto L_a$ est une isométrie et un $*$-isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur un idéal maximale de $\mathcal{A}^e$.*

Exercise 7.0.3 Montrer que dans une C^*-algèbre on a nécessairement $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ et $\|a\| = \|a^*\|$.

Exemples :

i) $C(X, \mathbb{C})$ avec X compact est une C^*-algèbre avec la conjugaison complexe comme involution.

ii) Par contre l'algèbre du disque n'est pas une C^*-algèbre pour l'involution $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, car si on considère $f(z) = z + i$, on a $\|f^* f\| = 2 \neq 4$.

Exercice 7.0.1 *Soit G un groupe localement compact et $\mathcal{A} = L^1(G)$ que l'on munit de l'involution $f^*(x) = \Delta_G(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$, où Δ_G est la fonction modulaire de G. Montrer que G est une C^*-algèbre si et seulement si G est trivial.*

Définition 7.0.4 *Soit $a \in \mathcal{A}$ on dit que a est auto-adjoint si $a^* = a$, normal si $aa^* = a^*a$ et unitaire si $aa^* = a^*a = \mathbf{1}$.*

Exercise 7.0.4 Vérifier que si a est auto-adjoint alors $\|a\| = \|a^*\| = \rho(a)$. Montrer également que pour tout $a \in \mathcal{A}$ on an $\sigma(a^*) = \sigma(a)^*$.

Proposition 7.0.1 *Soit $a \in \mathcal{A}$ auto-adjoint et $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ alors $\phi(a) \in \mathbb{R}$.*

Preuve : On pose $\phi(a) = x + iy$, comme $\|\phi\| \leq 1$, on a d'une part, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + (y+t)^2 = |\phi(a + it\mathbf{1})|^2 \leq \|a + it\mathbf{1}\|^2.$$

D'autre part

$$\|a + it\mathbf{1}\|^2 = \|(a + it\mathbf{1})^*(a + it\mathbf{1})\| = \|a^2 + t^2\mathbf{1}\| \leq \|a^2\| + t^2.$$

D'ou

$$x^2 + y^2 + 2ty \leq \|a^2\| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne $y = 0$ et prouve la proposition. □

Corollaire 7.0.1 *Soit $a \in \mathcal{A}$ auto-adjoint alors $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*
Soit $a \in \mathcal{A}$ et $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ alors $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$.

Attention, ici $\mathcal{A}$ n'est pas commutative donc on peut utiliser directement que l'image de $\hat{a}$ est égale au spectre. Par contre on l'applique sur la sous-C^*-algèbre engendrée par a qui elle est commutative.

Preuve :
Soit $\mathcal{B}$ la sous-C^*-algèbre engendrée par a. Elle est commutative puisque a est auto-adjoint. D'après le théorème 6.4.2 et la proposition7.0.1 on a $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \subset \mathbb{R}$ et on conclut en utilisant l'exercice 6.3.2.

Soit $a = b + ic$, avec $b = \frac{a+a^*}{2}$ et $c = \frac{a-a^*}{2i}$. En remarquant que $a^* = b - ic$ et en tulisant la proposition 7.0.1, on prouve la deuxième assertion. □

Enfin pour conclure ce chapitre, on montre que tout morphisme de C^*-algèbre est automatiquement continue.

Théorème 7.0.3 *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux C^*-algèbre et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme de C^*-algèbre alors $\|f\| \leq 1$, en particulier f est automatiquement continue.*

Corollaire 7.0.2 *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux C^*-algèbre et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un isomorphisme de C^*-algèbre alors f est une isomérie.*

Preuve du théorème 7.0.3

Tout d'abord on remarque que si x est inversible alors $f(x)$ l'est. Dés lors on a $\sigma_{\mathcal{B}}(f(x)) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, d'où, d'après l'exercice 7.0.1,

$$\|f(x)\| = \rho_{\mathcal{B}}(f(x)) \leq \rho_{\mathcal{A}}(x) = \|x\| \text{ pour tout } x \in \mathcal{A} \text{ auto-adjoint.}$$

On en déduit que

$$\|f(a)\|^2 = \|f(aa^*)\|^2 \leq \|a^*a\| \text{ pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

Ce qui donne

$$\|f(x)\| \leq \|x\| \text{ pour tout } x \in \mathcal{A},$$

et prouve le théorème. ■

Chapitre 8

Théorèmes de Gelfand-Naimark

8.1 Théorème de Gelfand-Naimark(version commutative)

Théorème 8.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre commutative et $\mathcal{M}$ son ensemble de caractères. La transformation de Gelfand réalise un isomorphisme isométrique de C^*-algèbre de $\mathcal{A}$ sur $C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.*

Preuve du théorème 8.1.1 :

D'après l'exercice 6.4.3, on sait que Γ est un morphisme continue d'algèbre. D'autre part, en utilisant le théorème 6.4.2, on a

$$\|\hat{a}\|_\infty^2 = \sup_{\phi \in \mathcal{M}} |\phi(a)|^2 = \sup_{\phi \in \mathcal{M}} \overline{\phi(a)}\phi(a) = \sup_{\phi \in \mathcal{M}} \phi(a^*a) = \rho(a^*a),$$

de plus comme a^*a est auto-adjoint on a $\rho(a^*a) = \|a\|^2$ d'après l'exercice 7.0.1. On a donc bien montré que Γ était une isométrie, en particulier $\Gamma(\mathcal{A})$ est une sous algèbre fermé de $C(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est dense, ce qui est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass, puisque $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$, $\Gamma(\mathcal{A})$ est stable par conjugaison et sépare les points. $\square$

8.2 Calcul fonctionnelle continue

Soient $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre commutative et $a \in \mathcal{A}$. Si f est une fonction continue sur le spectre de a alors $f \circ \hat{a}$ est un élément de $C(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \cong \mathcal{A}$,

d'après le théorème 8.1.1. Donc on peut associé à f un élément $f(a) \in \mathcal{A}$. L'application $f \mapsto f(a)$ est appelée calcul fonctionnelle. Le but du théorème suivant est de généraliser ceux-ci à toute C^*-algèbre, non nécessairement commutative.

Théorème 8.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et $a \in \mathcal{A}$ un élément normal. Alors il existe un unique morphisme de C^*-algèbre $\Phi_a : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ tel que $\Phi_a(Id) = a$. On pose alors $f(a) = \Phi_a(f)$. De plus pour tout série $f(z) = \sum_n c_n z^n$ uniformément convergente sur $\sigma(a)$ on a*

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n \text{ dans } \mathcal{A}.$$

La preuve de ce théorème repose sur la proposition suivante, dite d'invariance du spectre.

Proposition 8.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et $\mathcal{B}$ une sous-C^*-algèbre fermée alors $\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.*

Preuve :

D'une part, on a déjà, d'après l'exercice 6.3.2, que $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(a)$. D'autre part, soit $a \in \mathcal{B}$, comme a^*a est auto-adjoint, on a $\sigma_{\mathcal{B}}(a^*a) \subset \mathbb{R}$, donc l'intérieur de $\sigma_{\mathcal{B}}(a^*a)$ est vide dans $\mathbb{C}$ et toujours d'après l'exercice 6.3.2 on a donc $\sigma_{\mathcal{B}}(a^*a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a^*a)$. Enfin si a est inversible, a^*a aussi et $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(a^*a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a^*a)$, donc a^*a est inversible dans $\mathcal{B}$ et donc a aussi. Ce qui prouve bien que tout élément de $\mathcal{B}$ inversible dans $\mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{B}$, ce qui achève la preuve. □

Preuve du théorème 8.2.1 :

Tout d'abord, on remarque l'on a nécessairement $\Phi_a(f) = \sum_{i,j=0}^{N} c_{ij} a^i (a^*)^j$ pour tout polynôme de la forme $f(z) = \sum_{i,j=0}^{N} c_{ij} z^i (z^*)^j$. Or l'ensemble des polynômes étant dense dans $C(\sigma(a))$, il suffit de montrer que Φ_a est continue pour avoir le théorème, puisque Φ_a admettra un prolongement unique à $C(\sigma(a))$.

Soit $\mathcal{B}$ la sous-C^*-algèbre engendrée par a. Comme a est normal cette algèbre est commutative, on a identifier $\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \hat{a}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$. Donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} C(\sigma_{\mathcal{B}}(a)) & \rightarrow & C(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \\ & \searrow^{\Phi_a} & \downarrow \Gamma^{-1} \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

montre que si Γ^{-1} est continue alors Φ_a. La continuité de ϕ_a est donc une conséquence du théorème (commutatif) de Gelfand-Naimark.

Enfin, la proposition précédente, nous permet de remplacer de $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ par $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$. ■

8.3 Etats, construction GNS

Tout au long de cette section, $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre unitaire normalisée, i.e. $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Définition 8.3.1 *Une forme linéaire $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ est dite positive si $\rho(x^*x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Un état est une forme linéaire positive vérifiant $\rho(\mathbf{1}) = 1$.*

Attention on n'a pas supposer que ρ était continue mais ça va devenir automatiquement le cas grâce à la proposition 8.3.1. Mais avant on a besoin du résultat préparatoire suivante.

Exercice 8.3.1 *Soit $a \in \mathcal{A}$ auto-adjoint tel que $\|a\| \leq 1$. Montrer que $\mathbf{1} - a$ admet une racine carré, plus précisément, il existe $y \in \mathcal{A}$, également auto-adjoint tel que $y^2 = \mathbf{1} - a$.*

Indication : Pour cela penser à utiliser une série.

Proposition 8.3.1 *Toute forme linéaire positive ρ vérifie l'inégalité de Schwarz suivante*

$$|\rho(y^*x)|^2 \leq \rho(x^*x)\rho(y^*y)$$

de plus $\|\rho\| = \rho(\mathbf{1})$ et donc tout état est de norme 1.

Preuve :
En posant $s(x, y) = \rho(y^*x)$ on définieune forme sesquilinéaire positive. La preuve classique de l'inégalité de Schwarz s'applique et donne l'inégalité souhaitée. Soit $x \in \mathcal{A}$ tel que $\|x\| \leq 1$, alors d'après l'exercice précédent il existe $y \in \mathcal{A}$ auto-adjoint tel que $y^2 = \mathbf{1} - x^*x$, d'ou

$$\rho(x^*x) \leq \rho(\mathbf{1}),$$

ce qui donne

$$|\rho(x)|^2 \leq \rho(\mathbf{1})\rho(x^*x) \leq \rho(\mathbf{1})^2.$$

L'autre inégalité étant immédiate, ceci achève la preuve. □

Exercice 8.3.2 *Montrer qu'une forme linéaire f qui vérifie $\|f\| = f(\mathbf{1}) = 1$ est un état.*

Définition 8.3.2 *Une représentations dune $*$-algèbre $\mathcal{A}$ est la donné d'un espace de Hilbert H et d'un homomorphisme d'$*$-algèbre $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$.*

Définition 8.3.3 *Soient ρ une forme linéaire positive sur $\mathcal{A}$, π une représentation de $\mathcal{A}$ dans un espace de Hilbert H et $\xi \in H$. On dit que (π, ξ) est une paire GNS*[1] *si*

i) $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi} = H$,

ii) $\rho(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$ *pour tout* $x \in \mathcal{A}$.

De plus on dit que deux paires GNS (π, ξ) et (π', ξ') sont équivalentes s'il existe un opérateur unitaire $W : H \to H'$ tel que $\xi' = W(\xi)$ et $W \circ \pi(x) = \pi'(x) \circ W$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Beaucoup de $*$-algèbre n'ont pas d'unité comme $L^1(G)$ où G est un groupe localement compact. Par contre elle possède une approximation de l'unité pour laquelle la construction de GNS se généralise, voir [Arv76].

Théorème 8.3.1 (Construction GNS) *Toute forme linéaire positive ρ sur $\mathcal{A}$ une $*$-algèbre unitaire admet une unique paire GNS, à équivalence près.*

Au cours de la preuve on utilisera l'exercice suivant.

Exercice 8.3.3 *Soit $a \in \mathcal{A}$, tel que $\|a\| \leq 1$, montrer que*

$$\rho(x^*a^*ax) \leq \rho(x^*x) \text{ pour toutx} \in \mathcal{A}.$$

1. Gelfand, Naimark et Segal : noms des auteurs de la construction qui suit.

Indication : Utiliser le fait que $\mathbf{1} - a^*a$ *admette une racine carré.*

Preuve du théorème 8.3.1 :

On pose

$$N = \{a \in \mathcal{A} \,|\, \rho(a^*a) = 0\}.$$

D'après la proposition 8.3.1, on voit que $a \in N$ est équivalent à $\rho(x^*a) = \rho(a^*x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. En particulier on voit que N est un idéal à gauche, on pose alors $G = \mathcal{A}/N$ et on définit la forme sesquilinéaire suivante

$$\langle x + N, y + N\rangle = \rho(y^*x) \text{ pour tout } x, y \in \mathcal{A}.$$

On définit alors H comme la complétion de G pour la norme définiepar le produit sesquilinéaire. Un candidat naturel pour être le vecteur cyclique est

$$\xi = \mathbf{1} + N.$$

On définit la représentation, comme suit

$$\pi(a)(x + N) = ax + N.$$

On remarque que pour tout $\eta, \zeta \in G$ et $a \in \mathcal{A}$ on a

$$\langle \pi(a)\eta, \zeta\rangle = \langle \eta, \pi(a^*)\zeta\rangle. \tag{8.1}$$

Soit $a \in \mathcal{A}$, alors

$$\langle \pi(a)(x + N), \pi(a)(x + N)\rangle = \langle ax + N, ax + N\rangle = \rho((ax)^*ax) = \rho(x^*a^*ax).$$

Or d'après l'exercice 8.3.3, on a

$$\rho(x^*a^*ax) \leq \rho(x^*x),$$

ce qui prouve que $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ et donc on peut étendre π à H tout entier. Enfin, (8.1) implique $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ et on a clairement $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ donc on a bien une représentation.

D'autre part

$$\pi(\mathcal{A})\xi = \{a + N \,|\, a \in \mathcal{A}\},$$

est dense dans H par définition.

Enfin on a bien

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle a + N, \mathbf{1} + N \rangle = \rho(a).$$

Soit une autre pair GNS (π', ξ') alors on peut définir l'application $W_0 : \pi(\mathcal{A})\xi \to \pi'(\mathcal{A})\xi'$ sur un sous-espace dense par

$$W_0 : \pi(a)\xi \mapsto \pi'(a)\xi'.$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit d'une application unitaire qui s'étend en $W : H \to H'$ de sorte que les deux paires soient équivalente via W. ■

8.4 Théorème de Gelfand-Naimark

Tout au long de cette section, $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre unitaire. On note $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$ dont le spectre est dans $[0, +\infty[$.

Le point clef de la preuve du théorème de Gelfand-Naimark est l'existence d'un état. Auparavant, nous donnons des lemmes que nous utiliserons pour la preuve de l'existence d'un état.

Lemme 8.4.1 *Soit $a \in \mathcal{A}$ un élément auto-adjoint tel que $\|\mathbf{1} - a\| \leq 1$ alors $a \in \mathcal{A}^+$. Réciproquement si $a \in \mathcal{A}^+$ et $\|a\| \leq 1$ alors $\|\mathbf{1} - a\| \leq 1$.*

Preuve :

Soit $a \in \mathcal{A}$ un élément auto-adjoint tel que $\|\mathbf{1} - a\| \leq 1$. On considère la sous-algèbre $\mathcal{B}$ engendrée par a. Comme $\|\mathbf{1} - a\| \leq 1$ et que la transformation de Gelfand est une isométrie sur $\mathcal{B}$, on a $|1 - \hat{a}(\phi)| \leq 1$ pour tout $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Comme $\mathcal{B}$ est commutative, on peut conclure que le spectre de a qui est l'image de $\hat{a}$ est dans $[0, +\infty[$.

Soit $a \in \mathcal{A}^+$ et $\|a\| \leq 1$ alors $\|\hat{a}\| \leq 1$ et donc

$$0 \leq \hat{a}(\phi) \leq 1 \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}},$$

où $\mathcal{B}$ est la sous-algèbre engendrée par a. Ce qui donne,

$$0 \leq 1 - \hat{a}(\phi) \leq 1 \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}},$$

d'ou $\|\mathbf{1} - \hat{a}\| = \|\mathbf{1} - a\| \leq 1$, ce qui achève la preuve. □

Lemme 8.4.2 *Soit $a \in \mathcal{A}$ un élément auto-adjoint tel que $\sigma(a) = \{0\}$, alors $a = 0$.*

Preuve :

D'après l'exercice 7.0.4, on a $\rho(x) = \|x\| = 0$. □

On remarquera que c'est faux si on ne suppose pas x auto-adjoint.

Lemme 8.4.3 *$\mathcal{A}^+$ est un cône convexe.*

Preuve :

Si $a \in \mathcal{A}^+$ il est clair que $\lambda a \in \mathcal{A}^+$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Soit $a, b \in \mathcal{A}^+$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda + \mu = 1$. Soit $a = b = 0$ et il n'y a rien à démontrer sinon on a

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{1} - \frac{\lambda a + \mu b}{\|a\| + \|b\|}\right\| &\leq \left\|\lambda\left(\mathbf{1} - \frac{a}{\|a\| + \|b\|}\right)\right\| + \left\|\mu\left(\mathbf{1} - \frac{b}{\|a\| + \|b\|}\right)\right\| \\ &\leq \lambda + \mu = 1.\end{aligned}$$

Ici on a utiliser la deuxième partie du lemme 8.4.1. Enfin, toujours d'après le lemme 8.4.1, on a $\frac{\lambda a + \mu b}{\|a\| + \|b\|} \in \mathcal{A}^+$, ce qui achève la preuve. □

Théorème 8.4.1 *Dans une C^*-algèbre unitaire tout élément de la forme a^*a est dans $\mathcal{A}^+$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe alors un état f_a telle que $f_a(a^*a) = \|a\|^2$.*

Preuve :
Soient $a \in \mathcal{A}$, $x = a^*a$, $\mathcal{B}$ la sous-algèbre unitaire engendrée par x et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{B}$. Puisque le spectre d'un élément auto-adjoint est réel, d'après l'exercice 7.0.1, on peut alors définir les deux fonctions f et g de $C(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}, \mathbb{C})$ comme suit

$$f(\phi) = \max(\hat{x}(\phi), 0) \text{ et } g(\phi) = -\min(\hat{x}(\phi), 0).$$

On a alors

$$\hat{x} = f - g \text{ et } fg = gf = 0.$$

D'après le théorème de Gelfand-Naimark(commutatif), il existe $y, z \in \mathcal{B}$ tels que $\hat{y} = f$ et $\hat{z} = g$. On a alors

$$x = a^*a = y - z \text{ et } yz = zy = 0,$$

de plus y et z sont dans $\mathcal{A}^+$ [2]. D'autre part

$$za^*(za^*)^* = za^*az = zyz - z^3 = -z^3 \in -\mathcal{A}^+.$$

Soit u et v la partie réel et imaginaire de za^*, c'est-à-dire

$$u = \frac{za^* + az^*}{2} \text{ et } v = \frac{za^* - az^*}{2i}.$$

On a

$$(za^*)^*(za^*) + za^*(za^*)^* = 2(u^2 + v^2)$$

d'ou

$$(za^*)^*(za^*) = 2(u^2 + v^2) + z^3 \in \mathcal{A}^+$$

comme $z \in \mathcal{A}^+$. D'après l'exercice 6.3.1, on en déduit que le spectre de $(za^*)^*(za^*)$ est nulle. Le lemme 8.4.2, nous assure que $(za^*)^*(za^*) = 0$, ce qui implique que le spectre de $-z^3$ est également nulle, or z est auto-adjoint donc finalement on a bien $z = 0$ et donc $a^*a = y^2$ et le spectre de $a^*a \in \mathcal{A}^+$, ce qui achève la preuve de la première partie du théorème.

Soient $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ et $\mathcal{B}$ la sous-algèbre engendrée par a. D'après ce qui précède et le lemme 8.4.2, on a $\rho(a^*a) \in \mathbb{R}_+^*$. Et comme $\mathcal{B}$ est commutative, il existe $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ tel que $\phi(a^*a) = \rho(a^*a) = \|a\|^2$, une simple application du théorème de Hahn-Banach, nous donne une extension f de ϕ telle que $\|f\| = \|\phi\| = 1$, et il suit de l'exercice 8.3.2 que f est un état. ■

Théorème 8.4.2 (Gelfand-Naimark-1943) *Toute C^*-algèbre unitaire admet une représentation isométrique et $*$-isomorphique dans la C^*-algèbre des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert.*

Preuve :

2. Ils sont auto-adjoint comme tout élément de $\mathcal{B}$ et leur spectre est inclus dans $[0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathcal{A}$, d'après le théorème précédent il existe un état f_x tel que $f_x(x^*x) \neq 0$. On peut alors, d'après le théorème 8.3.1, lui associer une représentation π_x de $\mathcal{A}$ sur un espace Hilbert H_x. On pose alors $H = \oplus_{x\in\mathcal{A}} H_x$ et

$$\pi(a) = \bigoplus_{x\in\mathcal{A}} \{\pi_x(a) \,|\, x \in \mathcal{A}\}.$$

Il est clair qu'il s'agit d'une représentation injective, puisque $\langle \pi_a(a^*a)\xi_a, \xi_a\rangle = \pi_a(a^*a) \neq 0$. Le fait que cette représentation est en fait une isométrie est une conséquence du corollaire 7.0.2. ■

Bien sûr, l'espace Hilbert ainsi construit n'a aucune raison d'être séparable. Un des aspect de la théorie des C^*-algèbre est de décrire ces représentations. Bien sûr, il faut supposer un peu plus de structure, ce qui donne naissance au concept d'algèbre de Von Neumann. On pourra consulter [**?**] pour un exposé détaillé de cette théorie.

Chapitre 9

Opérateurs bornés

Dans le chapitre précédent, on a vu que toute C^*-algèbre peut être représentée de manière fidèle comme une sous-algèbre d'opérateur d'un espace de Hilbert. A partir de maintenant nous allons nous intéresser uniquement au spectre d'opérateur soit d'un espace de Hilbert dans lui même soit plus généralement d'un espace de Banach dans lui même.

Le but de ce chapitre est de généraliser le théorème spectral en dimension infinie. Toutefois, il est clair qu'il va falloir revoir nos ambitions à la baisse dans le cas général. En effet nous allons démontrer que pour un opérateur compact comme en dimension finie il existe une base hilbertienne de vecteurs propres. Par contre, dans le cas général, la notion même de vecteur propre comme on la connait en dimension finie n'a plus vraiment lieu d'être. Par exemple, si on considère l'opérateur position [1] sur $L^2([0,1])$ défini par

$$X(\psi)(x) = x\psi(x).$$

Alors il n'existe aucun vecteur dans $L^2([0,1])$ telle que $X(\psi) = \lambda\psi$. En fait on peut trouver une telle fonction, plus précisément, une distribution, c'est $\delta(x-\lambda)$ mais il est clair qu'elle n'est pas dans $L^2([0,1])$.

Même s'il est manifeste que l'on ne peut pas trouver de base hilbertienne de vecteurs propres, on peut peut tout de même espérer conserver quelques conséquences de l'existence d'une telle base. En particulier, soit A un opérateur qui admet une base hilbertienne de vecteurs propres (e_i) associée aux valeurs propres (λ_i), alors on peut définir

1. voir le chapitre 11 pour des explications sur cette dénomination.

1. **Le calcul fonctionnelle.** Pour tout $f \in C(\mathbb{R})$, on peut définir $f(A)$ comme
$$f(A)e_i = f(\lambda_i)e_i.$$

2. **Une mesure spectrale.** Soit $E \subset \mathbb{R}$, on note V_E l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres dont les valeurs propres sont dans E et P_E le projecteur orthogonal sur V_E. Alors pour tout vecteur unitaire ψ, on définit
$$Prob_\psi(A \in E) = \langle \psi, P_E \psi \rangle.$$

Plus précisément notre objectif est, étant donné un opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint, de définir une mesure μ^A sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans les projections orthogonales sur les sous-espaces de H ayant les même propriétés que $E \mapsto P_E$ définie plus haut, c'est-à-dire

1. $P(\emptyset) = 0$ et $P(\mathbb{R}) = Id$,
2. Si les (E_n) sont disjoints alors pour tout $x \in H$, on a
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)x,$$
3. Pour tout borélien E_1 et E_2, $\mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) \circ \mu(E_2)$.

On peut alors définir une intégrale à valeurs dans $\mathcal{B}(H)$ pour laquelle on aura
$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu^A(\lambda) = A.$$

Exercice 9.0.1 *Montrer que cela coïncide avec la décomposition spectrale usuelle en dimension finie.*

Déslors on pourra définir le calcul fonctionnelle très naturellement par
$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\mu^A(\lambda).$$

9.1 Rappel sur les espaces de Hilbert complexes

Dans cette section on rappel quelques propriétés des espaces de Hilbert. On renvoie au chapitre 4 de [Rud80] pour les détails.

Théorème 9.1.1 (Projection orthogonal) *Soit H un espace Hilbert et F un sous-espace* **fermé**. *Alors pour tout $x \in H$ il existe un unique $y \in F$ tel que*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

De plus $x - y$ est orthogonal à F.

Corollaire 9.1.1 *Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace, on a*

$$\overline{F} = (F^{\perp})^{\perp}.$$

Théorème 9.1.2 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors*

$$Ker\, T = (Im\, T^*)^{\perp}$$

et

$$\overline{Im\, T^*} = (Ker\, T)^{\perp}.$$

Corollaire 9.1.2 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors*

$Ker\,(T - \lambda Id) \neq 0$ si et seulement si $Im\,(T^* - \lambda^*)$ n'est pas dense dans H.

Théorème 9.1.3 *Soit H un espace de Hilbert séparable, alors il existe une famille orthonormale (e_n) dont l'espace engendré est dense dans H. On dit que (e_n) est une base Hilbertienne.*

9.2 Généralités

Tout au long de cette section, E désignera un espace de Banach complexe. Un *opérateur* sera une application linéaire continue de E dans lui-même.

Définition 9.2.1 *Soit $T \in \mathcal{B}(E)$.*

i) Le spectre $\sigma(T)$ de T est l'ensemble des nombres complexe λ tels que $T - \lambda\mathbf{1}$ n'est pas inversible.

ii) La résolvante $\rho(T)$ de T est $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Exercice 9.2.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$ tels que $T(x) = \lambda x$, montrer que λ est un élément du spectre. Prouver que la réciproque est fausse en exhibant un contre-exemple.*

Comme cas particulier de la proposition 6.3.1, on rappel que

Proposition 9.2.1 *Le spectre d'un élément de $\mathcal{B}(E)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

En fait contrairement à la dimension finie, il peut y a avoir plusieurs raisons pour qu'un opérateur ne soit pas inversible.

i) $Ker(T - \lambda\mathbf{1}) \neq \{0\}$, dans ce cas on définit

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Ker(T - \lambda\mathbf{1}) \neq \{0\}\},$$

c'est le **spectre ponctuel** de T.

ii) $Ker(T - \lambda\mathbf{1}) = \{0\}$ mais $Im(T - \lambda\mathbf{1})$ n'est pas dense dans E, dans ce cas on définit

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Ker(T - \lambda\mathbf{1}) = \{0\} \text{ et } \overline{Im(T - \lambda\mathbf{1})} \neq E\},$$

c'est le **spectre résiduel** de T.

iii) Enfin si $Ker(T - \lambda\mathbf{1}) = \{0\}$ mais $Im(T - \lambda\mathbf{1})$ est dense dans E mais différent de E , dans ce cas on définit

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Ker(T - \lambda\mathbf{1}) = \{0\} \text{ et } Im(T - \lambda\mathbf{1}) \neq \overline{Im(T - \lambda\mathbf{1})} = E\},$$

c'est le **spectre continue** de T.

Exercice 9.2.2 *Soit H un espace de Hilbert complexe, montrer*[2] *que $\overline{Sp(A)} = Sp(A^*)$ pour tout $A \in \mathcal{H}$, en déduire que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est réel.*

2. Bien sûr c'est un cas particulier de ce qu'on vu pour les C^*-algèbres, mais on peut le redémontrer plus directement.

Exercise 9.2.1 [Le shift] Soit l^1 l'ensemble des suites complexes sommables. On définit $T \in \mathcal{B}(l^1)$ par

$$T(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots).$$

On rappel que le dual de l^1 est l^∞ l'ensemble des suites bornées.[3] Montrer que l'adjoint de T est $T' \in \mathcal{B}(l^\infty)$ défini par

$$T(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots).$$

Montrer que

	spectre	spectre ponctuel	spectre résiduel	spectre continus
T	$\overline{B(0,1)}$	$B(0,1)$	$\emptyset$	$\partial B(0,1)$
T'	$\overline{B(0,1)}$	$\emptyset$	$\overline{B(0,1)}$	$\emptyset$

Exercise 9.2.2 Soit H un espace de Hilbert, montrer que $Sp_r(A) = \emptyset$ pour tout opérateur normal de H.
Indication : Montrer que si T est normal alors $KerT = KerT^*$.

Donc le spectre d'un opérateur normal est composé de son spectre ponctuel et de son spectre continue.

Exercice 9.2.3 *Soit l^2 l'ensemble des suites de carrés sommables muni de sa base hilbertienne canonique (e_n). On définit l'opérateur T par $T(e_n) = \frac{1}{n}e_n$. Vérifier que le spectre de T est $\overline{\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}}$, on a donc $Spec_c = \{0\}$.*

Théorème 9.2.1 (Spectre d'un Opérateur auto-adjoint) *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint, alors*

i) $sp(T) \subset \mathbb{R}$

ii) Si $\lambda, \mu \in Sp_p(T)$ et $u, v \in H$ tels que $T(u) = \lambda u$ et $T(v) = \mu v$ alors si $\lambda \neq \mu$ on a $\langle u, v\rangle = 0$.

Preuve :
Le i) est une conséquence du corolaire 7.0.1. Si $\lambda, \mu \in Sp_p(T)$ et $u, v \in H$ tels que $T(u) = \lambda u$ et $T(v) = \mu v$ alors si $\lambda \neq \mu$, alors

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle = \mu\langle u, v\rangle,$$

d'ou le résultat. ■

3. Par contre le dual de l^∞ est plus grand que l^1.

9.3 Les opérateurs compacts

On peut facilement démontrer le théorème spectral pour des opérateurs dont l'image est de dimension finie. En effet, quitte à quotienter par le noyau, on se ramène à la dimension finie. Les opérateurs compacts viennent généraliser les opérateurs de rang fini comme limite de tels opérateurs.

Définition 9.3.1 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$, T est dit compact (resp. de rang fini) si $T(B(0,1))$ est relativement compact (resp. inclus dans sous espace de dimension finie). On note $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts.*

On remarque que tout opérateur de rang fini est compact.

Exercise 9.3.1 Montrer que si H est de dimension infinie alors $0 \in Sp(T)$ pour tout $T \in \mathcal{K}(H)$.

Exercise 9.3.2 Montrer que si T est compact alors T^* l'est aussi.

Théorème 9.3.1 *$\mathcal{K}(H)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(H)$.*

Preuve :

Soit (T_n) une suite d'opérateurs compacts qui converge vers T dans $\mathcal{B}(H)$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand $\|T - T_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, or il existe $x_1, \ldots, x_N$ tels que $T_n(B(0,1))$ est inclus dans $\cup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, donc $T(B(0,1))$ est inclus dans $\cup_{i=1}^N B\left(x_i, \varepsilon\right)$, ce qui prouve le théorème. ■

Tout opérateur qui est limite d'opérateur de rang fini est donc compact. Comme nous allons le voir la réciproque est également vraie dans le cas d'un espace de Hilbert séparable.

Exercise 9.3.3 Soit H un espace de Hilbert et (x_n) une suite d'éléments de H convergeant faiblement et $T \in \mathcal{K}(H)$, alors $T(x_n)$ converge fortement.

Théorème 9.3.2 *Soit H un espace de Hilbert séparable, alors l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{K}(H)$.*

Preuve :

Soient (e_n) une base hilbertienne de H et E_n l'espace engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Pour $T \in \mathcal{K}(H)$, on pose $T_n = T \circ P_n$, où $P_n : H \to E_n$ est la projection orthogonale. Clairement T_n est de rang fini et

$$\|T - T_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x) - T_n(x)\| = \sup_{x \in E_n^\perp, \|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Donc $\|T - T_n\|$ est décroissante et minoré, notons λ sa limite. Si $\lambda \neq 0$ alors il existe $x_n \in E_n^\perp$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\|T(x_n)\| \geq \frac{\lambda}{2}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que x_n converge faiblement, notons x sa limite. En fait pour tout $y \in H$, on a $\langle y, x_n \rangle = \langle P_n^\perp(y), x_n \rangle \leq \|P_n^\perp(y)\|$, or on montre facilement à l'aide de Parseval que la limite du dernier terme est nulle et donc $x = 0$. D'après l'exercice 9.3.3, on a $\|T(x_n)\| \to 0$ ce qui contredit le fait que $\lambda \neq 0$ et achève la preuve du théorème. ■

9.4 Alternative de Fredholm et spectre d'un opérateur compact

Comme on l'a vu plus haut un élément du spectre ne correspond pas forcément à une valeur propre. Toutefois pour les opérateurs compacts, c'est le cas pour tout élément non-nul du spectre, comme nous l'assure le théorème suivant.

Théorème 9.4.1 *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{K}(H)$. Alors*

i) $Ker(Id - T)$ est de dimension finie,

ii) $Im(Id - T)$ est fermée.

Corollaire 9.4.1 (Alternative de Fredholm) *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{K}(H)$. Alors $Id - T$ est injective si et seulement si $Id - T$ est surjective.*

Preuve :
Supposons que $Id - T$ est injective et considérons la suite de sous-espace $M_n = (Id - T)^n H$. D'après le théorème précédent M_n est une suite décroissante de sous-espace fermé invariant par T. Si $M_1 \neq H$ alors $M_{n+1} \neq M_n$ pour tout n. En effet, soit $x_0 \in H$ tel que $x_0 \notin M_1$, si $(Id - T)^n(x_0) \in M_{n+1}$ alors il existe

y_0 tel que $(Id-T)^n(x_0) = (Id-T)^{n+1}(y_0)$ ce qui implique, par injectivité de $Id-T$, que $x_0 = (Id-T)(y_0)$, ce qui est une contradiction. Il existe donc une suite de vecteurs unitaires $e_n \in M_n$ telle que $d(e_n, M_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ pour tout n. On a alors

$$\|T(e_n) - T(e_{n+k})\| = \|e_n - ((Id-T)(e_n) + T(e_{n+k}))\| \geq \frac{1}{2} \text{ pour tout } k \geq 1,$$

puisque $T(e_{n+k}) \in M_{n+k} \subset M_{n+1}$. Ce qui contredit la compacité de T et prouve la première implication du corollaire.

Réciproquement si $Id - T$ est surjective, alors $Ker(Id - T^*) = \{0\}$, comme T^* est compact, on a d'après ce qui précède et le théorème 9.4.1 que $Im(Id - T^*) = H$, d'ou $Ker(Id - T) = 0$ ce qui achève la preuve du corollaire. □

Preuve du théorème 9.4.1 :

Pour montrer que $Ker(Id-T)$ est de dimension finie il suffit de montrer que sa boule unité est relativement compact. Or comme $T(x) = x$ pour tout $x \in Ker(Id-T)$. On a

$$B(0,1) \cap Ker(Id-T) \subset T(B(0,1) \cap Ker(Id-T)) \subset T(B(0,1)),$$

ce prouve $i)$.

La preuve de $ii)$ s'effectue en plusieurs étapes. Soit (y_n) une suite de points de $Im(Id-T)$ qui converge vers y dans H.

Etape 1 : "bonnes" préimages de (y_n).

Soit $E_n = \{x_n \,|\, x_n - T(x_n) = y_n\}$, alors d'après $i)$, c'est un espace affine de dimension finie, on peut donc choisir un élément qui minimise la norme, que l'on note u_n. C'est la projection de 0 sur E_n donc en plus d'avoir

$$u_n - T(u_n) = y_n,$$

on a

$$u_n \in Ker(Id-T)^{\perp}.$$

Etape 2 : (u_n) est bornée.

Supposons que (u_n) ne soit pas bornée, on pose alors $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $v_n \rightharpoonup v$, à l'aide de l'exercice 9.3.3, on en déduit que

$$v_n = T(v_n) + \frac{y_n}{\|u_n\|} \to v$$

et que donc

$$v - T(v) = 0,$$

or $v \in Ker(Id - t)^{\perp}$ puisque cette espace est fermé d'après i). Donc $v = 0$, mais par convergence forte on doit avoir $\|v\| = 1$, ce qui donne la contradiction cherchée.

Etape 3 : Conclusion.

On peut extraite de (u_n) une sous-suite convergeant faiblement vers u, puis grâce à l'exercice 9.3.3, on a $u - T(u) = y$, ce qui achève la preuve. ■

Exercise 9.4.1 Montrer que si $T \in \mathcal{K}(H)$ est auto-adjoint alors $Sp(T) \setminus \{0\} = Sp_p(T) \setminus \{0\}$ et que le seul point d'accumulation de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est 0.

Théorème 9.4.2 *Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ alors $dimKer(Id - T) = dimH/(Id - T)(H)$.*

Preuve :
Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $Ker(Id - T)$ et $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m}$ une base de $H/(Id - T)(H)$.
Supposons que $n \leq m$, on considère alors $F \in \mathcal{B}(H)$ l'application définie par $F \equiv 0$ sur un complémentaire de $Ker(Id - T)$ et $F(e_k) = f_k$. Alors $\tilde{T} = T + F$ est une perturbation de T par un opérateur de rang fini donc il est compact. On affirme que $Id - \tilde{T}$ est injectif. Car sinon il existe x tel que $x - T(x) = F(x) \in (Id - T)(H) \cap Vect\{f_1, \ldots, f_m\} = \{0\}$, alors $x \in Ker(Id - T) \cap KerF = \{0\}$, ce qui prouve l'affirmation. On a donc, par l'alternative de Fredholm, que $Id - \tilde{T}$ est surjectif et donc $n = m$.

Supposons que $n \geq m$, on considère alors $G \in \mathcal{B}(H)$ l'application définie par $G \equiv 0$ sur un complémentaire de $Vect\{e_1, \ldots, e_m\}$ et $G(e_k) = e_k f_k$. Alors $\tilde{T} = T + G$ est une perturbation de T par un opérateur de rang fini donc il est compact. Il est clair que $\tilde{T}$ est surjectif. On a donc, par l'alternative de Fredholm, que $Id - \tilde{T}$ est injectif et ce qui impose $n = m$. ■

Remarque importante : L'alternative de Fredholm nous offre une méthode pour résoudre les équations de la forme

$$\lambda x - T(x) = y,$$

lorsque T est compact et $\lambda \neq 0$. Soit $\lambda Id - T$ est inversible et alors il y a une unique solution. Sinon, notre équation a une solution si et seulement si $y \in Im(\lambda Id - T)$. Or $Im(\lambda Id - T) = Ker(\lambda^* Id - T^*)^\perp$. On considère alors $f_1, \ldots, f_n$ une base de $Ker(\lambda^* Id - T^*)$. Notre équation a une solution si et seulement si

$$\langle f_i, y \rangle = 0 \text{ pour tout } i.$$

Théorème 9.4.3 *Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(H)$. Alors*

i) soit $Sp(T) = \{0\}$,

ii) soit $Sp(T) \setminus \{0\}$ est fini,

iii) soit $Sp(T) \setminus \{0\}$ est une séquence de nombres réels qui tend vers 0.

Preuve :

Utiliser l'exercice 9.4.1. ■

Théorème 9.4.4 (Décomposition spectral d'un opérateur compact) *Soient H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjoint. Alors il existe une base hilbertienne de H composée de vecteurs propres de T.*

En fait séparable n'est pas essentiel dans le sens où le théorème reste vrai si on se restreint aux sous espace-fermés $\overline{Im\, T} = (Ker\, T)^\perp$.

Preuve :

Soit (λ_n) les valeurs propres non nulles de T et $E_n = Ker(\lambda_n Id - T)$. Chaque E_n étant de dimension finie, il admet une base orthogonal, puis en remarquant, grâce au théorème 9.2.1, que les E_n sont deux à deux orthogonaux, on obtient finalement (e_n) une base hilbertienne de $\overline{F}$, où $F = Vect\{E_1, E_2, \ldots\}$.
On pose alors $E = \overline{F}^{\perp}$ et remarque que si $S = T_{|E}$ alors $Sp(E) = \{0\}$. En particulier $\rho(S) = 0$, mais S est auto-adjoint donc $S = 0$, et donc $E \subset KerT$. finalement on peut adjoindre une base hilbertienne de $KerT$ à (e_n), puisque $KerT \subset H$ est séparable. Ce qui achève la preuve. ■

9.5 Un exemple : le laplacien

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $W^{1,2}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des distributions admettant des dérivées partielles dans $L^2(\Omega)$. On notera $W_0^{1,2}(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,2}(\Omega)$.

On définit le laplacien **positif** comme suit

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

On rappel l'existence de solutions au problème de Dirichlet, voir chapitre 6 de [Eva10].

Théorème 9.5.1 *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que u vérifie*

$$\Delta u + u = f \text{ (au sens faible).}$$

Exercice 9.5.1 *Vérifier que $R(f) = u$ défini un opérateur linéaire borné de $L^2(\Omega)$ auto-adjoint. A l'aide du théorème de Rellich-Kondrakov, montrer qu'il est même compact.*

Nous sommes donc en mesure d'appliquer la décomposition spectral : il existe une base hilbertienne (ϕ_n) de $L^2(\Omega)$ composée de vecteurs propres de $(\Delta + Id)^{-1}$. On admettra que les ϕ_n sont C^∞ jusqu'au bord, voir chapitre 6 de [Eva10] ou encore [HL97] pour les détails sur la régularité des solutions d'équations elliptiques.

Exercice 9.5.2 *Montrer que les valeurs propres λ_n, associées aux e_n, sont dans* $(0,1)$.

En fait (e_n) est aussi une base hilbertienne de vecteurs propres pour le laplacien, puisque

$$(\Delta + Id)^{-1} e_n = \lambda_n e_n, ,$$

ce qui donne

$$\Delta e_n = \mu_n e_n,$$

avec $\mu_n = \frac{1}{\mu_n} - 1$.

Exercice 9.5.3 *à l'aide de cette base donnée une solution de l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \ sur \ \mathbb{R} \times \Omega \\ u = 0 \ sur \ \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} .$$

Plus généralement on peut étudier les opérateurs de Schrödinger $P = \Delta + V$ sur $\mathbb{R}^d$ où $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ à laide de la même méthode. On suppose que V est borné par en dessous [4], c'est à dire qu'il existe C telle que $V + C \geq 0$. On pose alors

$$H_P = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) \,|\, (V + C)^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

Exercice 9.5.4 *Montrer que si $V(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$ alors l'injection de H_P dans $L^2(\mathbb{R})$ est compacte.*

Si l'injection de H_P dans $L^2(\mathbb{R})$ est compacte, alors on montre sans problème que la résolvante de P, i.e. $(Id - P)^{-1}$, est compacte. En particulier on peut appliquer ceci à l'oscillateur harmonique,

$$P = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2,$$

et déduire l'existence d'une base hilbertienne de vecteurs propres pour P.

On pourra consulter [Tes09], pour une étude plus systématique.

4. C'est une hypothèse raisonnable d'un point de vue physique, voir XXX

9.5.1 Harmoniques sphériques et représentation de SO(3)

On désigne par S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, i.e.

$$S^2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Tout d'abord, on remarque que $SO(3)$ admet une représentation dans l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\pi(g)(f)(x) = f(g^{-1}(x)) \text{ pour tout } g \in SO(3).$$

Définition 9.5.1 *Une fonction f de $\mathbb{R}^3$ est dite harmonique si elle est C^2 et vérifie $\Delta f = 0$. On note H^l l'espace des polynômes homogènes harmoniques de degré égale à l.*

Exercise 9.5.1 Montrer que H^l est un espace vectoriel de dimension $2l+1$. *Indication : Montrer que $\Delta : P^l \to P^{l-2}$ est surjective, où P^l est l'ensemble des polynômes homogènes de degré l.*

On rappelle l'identité d'Euler,

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z} = lP \text{ pour tout } P \in P^l.$$

Proposition 9.5.1 *Pour tout $l \geq 2$, on a*

$$P^l = H^l \oplus r^2 P^{l-2}.$$

Preuve :

D'après l'exercice précédent la somme des dimensions de H^l et P^{l-2} est égale à P^l. Il suffit alors de montrer que l'intersection est nulle. Or à l'aide l'identité d'Euler, on obtient

$$\Delta(r^{2k}P) = 2k(l + 2k + 1)r^{2k-2}P + r^{2k}\Delta P.$$

Alors, soit $P \in H^l$ et k le plus grand entier tel que $r^{-2k}P \in P^{l-2k}$. Si $k \neq 0$, l'identité précédente donne une contradiction, ce qui prouve la proposition. ■

En particulier on a

$$P^l = \bigoplus_{2k \leq l} r^{2k} H^{l-2k}. \tag{9.1}$$

Théorème 9.5.2 *H^l est invariant par $SO(3)$.*

Preuve :

Soit P un polynôme homogène de degré l et $g \in SO(3)$, alors

$$\frac{\partial P \circ g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial P}{\partial x_j} g_{ij},$$

d'ou

$$\Delta(P \circ g) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_k} g_{ik} \right) g_{ij},$$

enfin en réordonnant la somme et en utilisant le fait que ${}^t gg = Id$, on prouve le résultat. ■

En restreignant π à H^l on obtient une représentation de $SO(3)$ de dimension $2l + 1$.

En fait un polynôme homogène de $\mathbb{R}^3$ est entièrement déterminé par sa restriction à S^2. Ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 9.5.2 *La restriction d'un polynôme harmonique à S^2 s'appelle une harmonique sphérique. On note $\mathcal{H}^l$ la restriction des polynôme harmonique de degré l.*

On munit $L^2(S^2)$ du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_{S^2} f \bar{g} \, d\sigma_{S^2}$. π restreint à $\mathcal{H}^l$ est une représentation de $SO(3)$ de dimension finie. De plus elle est unitaire par invariance de la mesure de S^2 par action de $SO(3)$.

Exercice 9.5.5 *Montrer que $\mathcal{H}^l$ est orthogonal à $\mathcal{H}^k$ dés que $k \neq l$.*

Indication : Utiliser l'identité d'Euler et une intégration par partie

D'après (9.1), la restriction des polynômes homogènes sur S^2 est égale aux harmoniques sphérique donc par Stone-Weirstrass, les harmoniques sphériques sont denses dans $L^2(S^2)$. Finalement on a

$$L^2(S^2) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}^l.$$

On note N le pole nord et G_N son stabilisateur dans $SO(3)$. Si H est un sous-espace invariant de $L^2(S^2)$, alors on note H_N l'ensemble des éléments de H fixé par G_N. On a alors le lemme suivant

Lemme 9.5.1 *Soit H un sous-espace invariant de $L^2(S^2)$ de dimension finie, alors $H_N \neq \{Id\}$ et si $dim(H_N) = 1$ alors H est irréductible.*

Preuve :

Soit $f_1, \ldots, f_n$ une base hilbertienne de H, on pose alors

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\overline{f_i(y)}.$$

On a alors pour $f \in H$,

$$f(y) = \int_{S^2} G(x, y) f(x)\, d\sigma_{S^2}. \tag{9.2}$$

On vérifie aisément que la définition de G est indépendante de la base choisie, en particulier on a

$$G(g.x, g.y) = G(x, y) \text{ pour tout } g \in SO(3).$$

Alors l'application $x \mapsto G(x, N)$ est dans H_N et est clairement non nulle.

D'autre part si $dim(H_N) = 1$ alors si on a un sous-espace invariant K, on peut également lui associé un noyau G'. Par hypothèse il sera proportionnelle à G . Soit il est nulle et alors c'est que K l'est aussi, sinon on peut décomposer tout élément de H en somme de fonction de K à l'aide de (9.2) et donc $H = K$. Ce qui achève la preuve. ■

Exercise 9.5.2 Si P est un polynôme homogène de degré l invariant par G_N alors il s'écrit

$$P = \sum_{2k \leq l} a_k r^{2k} z^{l-2k}.$$

Théorème 9.5.3 *Les représentations de $SO(3)$ dans $\mathcal{H}^l$ sont irréductibles.*

Preuve :

Pour cela il suffit de prouver que $dim(\mathcal{H}_N^l) = 1$. D'après ce qui précède on a $P = \sum_{k \leq l} a_k z^k$. On orthonormalise les z^k à l'aide de Gramm-Schmidt, et on obtient une nouvelle base p_k telle que

$$P = \sum_{k \leq l} b_k p_k.$$

Mais chaque p_k est dans $\mathcal{H}^k$ or $\mathcal{H}^k$ et $\mathcal{H}^l$ sont orthogonaux, donc

$$P = b_l p^l,$$

ce qui prouve le théorème. ■

Au final on a "cassé" la représentation de $SO(3)$ dans $L^2(S^2)$ en une somme de représentations de dimension finie, unitaires et irréductibles. En fait cette décomposition n'est rien d'autre que la décomposition spectrale du Laplacien de Beltrami sur S^2. En effet en écrivant le laplacien de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées sphériques, on a

$$\Delta f = -\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2 \tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

on remarque alors, que pour tout $P \in \mathcal{H}^l$, on a

$$\Delta_{S^2} P = l(l+1)P.$$

Pour plus de détail sur les harmoniques sphériques et faire le lien avec les représentation de $SU(2)$ on pourra consulter [KS10].

9.6 Operateur de Fredholm

Tout d'abord on peut remarquer que l'ensemble des opérateurs compacts forment un idéal de $\mathcal{B}(H)$. On peut donc considérer l'espace quotient, parfois appelé algèbre de Calkin. On va s'intéresser notamment au rôle particulier joué par les opérateurs inversibles de ce quotient.

Définition 9.6.1 *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$. On dit que T est un opérateur de Fredholm si $Ker(T)$ est de dimension finie et si $Im(T)$*

est fermé et de codimension finie. On note $\mathcal{F}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm. On définit l'indice d'un opérateur de Fredholm comme suit,

$$Ind(T) = \dim Ker\, T - \dim coKer\, T,$$

où $coKer\, T = H/T(H)$.

On remarque que l'alternative de Fredholm nous assure que toute perturbation de l'identité par un opérateur compact est d'indice 0.

Exercise 9.6.1 Vérifier que l'hypothèse que l'image soit fermée est en fait superflue.

Exercice 9.6.1 *Montrer qu'un opérateur de Fredholm auto-adjoint est d'indice* 0.

Théorème 9.6.1 *$T \in \mathcal{F}(H)$ si et seulement si $\overline{T}$ est inversible dans $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$.*

Preuve :

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\overline{T}$ soit inversible, d'inverse $\bar{S}$. Alors il existe $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(H)$ tels que

$$Id - ST = K_1 \text{ et } Id - TS = K_2.$$

On a alors $Ker(T) \subset Ker(Id - K_1)$ et $Im(Id - K_2) \subset Im(T)$, ce qui prouve que T est un opérateur de Fredholm.

Réciproquement soit $T \in \mathcal{F}(H)$, P la projection orthogonale sur le noyau et Q la projection orthogonale sur l'image. Alors P et $Id - Q$ sont compacts. Soit C un complémentaire du noyau alors $S = T_{|C}$ est un opérateur inversible sur l'image de T par le graphe fermé. On pose alors $R = S^{-1} \circ Q$, et on remarque que

$$RT = Id - P \text{ et } TR = Id - (Id - Q).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Remarque : Si $T \in \mathcal{F}(H)$ et $S \in \mathcal{B}(H)$ tel que $ST - Id \in \mathcal{K}(H)$ ou $TS - Id \in \mathcal{K}(H)$ alors $S \in \mathcal{F}(H)$.

Définition 9.6.2 *le spectre essentiel d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est le spectre de $\overline{T}$ dans $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$, on le note $\sigma_e(T)$.*

Exercise 9.6.2 Montrer que $\sigma_e(T)$ est un compact non vide de $\sigma(T)$.

Exercise 9.6.3 Quelle est le spectre essentiel du shift dans l^2.

Exercice 9.6.2 *Soient $p, q, f \in C^0([0,1])$ et $a, b \in \mathbb{R}$.*

i) Montrer que l'équation

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = f \\ u(0) = a \text{ et } u(0) = b \end{cases},$$

est équivalente à

$$u - K(u) = g$$

où $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ est un opérateur intégrale définie par

$$T(u)(x) = u(x) + \int_0^1 G(x,y)u(x)\,dy.$$

et $G \in L^2([0,1] \times [0,1])$ vérifie

$$G(x,y) = \begin{cases} y(q(x)(1-x) - p(x)) & \text{si } y \leq x \\ (1-y)(q(x)x + p(x)) & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$g = ph' + qh - f,$$

où $h(x) = a(1-x) + bx$.

Indication : Montrer que si u est une solution du premier problème alors u'' est une solution du second. Et montrer que si v est une solution du second problème alors

$$u(x) = \int_0^1 k(x,y)v(y)\,dy$$

est une solution du premier problème pour

$$k(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

ii) A l'aide l'alternative de Fredholm, en déduire que soit

$$u - K(u) = g$$

a une unique solution dans $C^0([0,1])$ *pour tout* $g \in C^0([0,1])$*, soit*

$$u - K(u) = 0$$

a une solution non-triviale.

Cette exercice est une initiation à la théorie de Sturm-Liouville, voir [Zet05] pour un exposé plus détaillé.

On remarque que le produit de deux opérateurs de Fredholm est un opérateur de Fredholm, mais alors quel est l'indice du nouvel opérateur ?

Théorème 9.6.2 *Soit* $T, S \in \mathcal{F}(H)$*, alors* $TS \in \mathcal{F}(H)$ *et*

$$Ind(TS) = Ind(T) + Ind(S).$$

Preuve :

La preuve repose sur les deux formules suivantes

$$dimKerT + dimKerS = dimKerTS + dim(KerT/(ImS \cap KerT))$$

et

$$dim\, coKerT + dim\, coKerS = dim\, coKerTS + dim((ImS + KerT)/(ImS)).$$

En effet, on alors

$$dimKerTS \leq dimKerT + dimKerS$$

et

$$dimcoKerTS \leq dimcoKerT + dimcoKerS.$$

Enfin on obtient la formule en remarquant que

$$KerT/(ImS \cap KerT) \cong (KerT + ImS)/(ImS).$$

■

Exercise 9.6.4 Montre que si $T \in \mathcal{F}(H)$ et $K \in \mathcal{K}(H)$ alors $Ind(T+K) = Ind(T)$.

Théorème 9.6.3 (Continuité de l'indice) *Soit (T_n) une suite d'opérateur de $\mathcal{B}(H)$ qui converge vers $T \in \mathcal{F}(H)$, alors à partir d'un certain rang $T_n \in \mathcal{F}(H)$ et $Ind(T_n) = Ind(T)$.*

Preuve :

D'après le théorème 9.6.1, $\mathcal{F}(H)$ est ouvert donc $T_n \in \mathcal{F}(H)$ pour n assez grand. De plus, il existe $S \in \mathcal{B}(H)$ tel que $TS - Id = K \in \mathcal{K}(H)$. Enfin on écrit $T_n = T + R_n$ avec $\|R_n\| \to 0$. On a donc que $Id + R_nS$ est inversible pour n assez grand, ce qui donne

$$Ind(T_n) + ind(S) = Ind((T + R_n)S) = Ind(Id + R_nS + K) = 0$$

d'autre part

$$Ind(T) + ind(S) = 0,$$

ce qui achève la preuve. ■

9.7 Les opérateurs à trace, les opérateurs de Hilbert-Schmidt et les opérateurs à noyau

Tout d'abord on généralise la notion de trace au opérateur positif.

Théorème 9.7.1 *Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne (e_n), pour tout opérateur positif $T \in \mathcal{B}(H)$, on définit*

$$Tr(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, T(e_n) \rangle. \tag{9.3}$$

C'est la trace de T et on a

i) $Tr(T_1 + T_2) = Tr(T_1) + Tr(T_2)$,

ii) $Tr(\lambda T) = \lambda Tr(T)$ *pour tout* $\lambda \geq 0$,

iii) $Tr(U^{-1}TU) = Tr(T)$ *pour tout opérateur unitaire* $U \in \mathcal{B}(H)$,

iv) Si $0 \leq T_1 \leq T_2$ *alors* $Tr(T_1) \leq Tr(T_2)$.

Preuve :
Il suffit simplement de vérifier que la définition ne dépend pas de la base choisie et le iii), le reste est évident. Soit (f_n) une autre base hilbertienne. Or on sait qu'il existe S également positif, tel que $S^2 = T$, ce qui donne

$$\begin{aligned} Tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, T(e_n)\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \|S(e_n)\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle S(e_n), f_m\rangle^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle S(f_m), e_n\rangle^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \langle S(f_m), e_n\rangle^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \|S(f_m)\|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle f_m, T(f_m)\rangle. \end{aligned}$$

On montre le iii) en remarquant que $(U(e_n))$ est une nouvelle base hilbertienne. ■

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, on peut lui associé une "valeur absolue" en prenant la racine carré de T^*T, plus précisément on définit $|T|$ comme l'unique opérateur positif tel que $|T|^2 = T^*T$, d'ou la définition suivante.

Définition 9.7.1 *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit à trace si $Tr(|T|) < \infty$. On note $\mathcal{I}_1(H)$ l'ensemble des opérateurs à trace.*

Lemme 9.7.1 *Tout opérateur est combinaison d'opérateur unitaire.*

Preuve :
Soit $A \in \mathcal{B}(H)$, on commence par écrire A comme somme d'opérateur auto-adjoint :

$$A = \frac{A^* + A}{2} + \frac{1}{2i}\frac{A - A^*}{2i}.$$

Soit $B \in \mathcal{B}(H)$ auto adjoint, quite à multiplier par un scalaire, on peut supposer que $\|B\| \leq 1$ on verifie que $B = \frac{B+i\sqrt{Id-B^2}}{2} + \frac{B-i\sqrt{Id-B^2}}{2}$ fourni la décomposition cherchée. □

Exercise 9.7.1 Montrer que $\mathcal{I}_1(H)$ est un $*$-idéal [5], et que $Tr(AB) = Tr(BA)$ pour tout $A, B \in \mathcal{I}_1(H)$.
Indication : Utiliser la décomposition polaire et le lemme précédent.

On munit $\mathcal{I}_1(H)$ de la norme $Tr(|T|)$. On remarquera que la série (9.3) converge absolument pour tout élément $T \in \mathcal{I}_1(H)$, et que la limite ne dépend pas du choix de la base, on note cette limite également $Tr(T)$. On peut également définit le déterminant d'un opérateur, mais pour cela il faut définir le produit tensorielle d'opérateur, on préfère renvoyer le lecteur intéressé à [Sim05] chapitre 1 à 3.

Exercice 9.7.1 *Soit $K \in C^0([0,1] \times [0,1])$, et $H = L^2([0,1])$, on pose alors*

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 f(y)K(x,y)\,dy,$$

montrer que

$$Tr(T_K) = \int_0^1 K(x,x)\,dx.$$

Définition 9.7.2 *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit de Hilbert-Schmidt si $Tr(T^*T) < \infty$. On notera $\mathcal{I}_2(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.*

Exercice 9.7.2 *Montrer que $\mathcal{I}_2(H)$ est un $*$-idéal.*

On munit alors $\mathcal{I}_2(H)$ de la forme sesquilinéaire $\langle S, T\rangle = Tr(T^*S)$. On vérifie facilement à l'aide de Cauchy-Schwarz que cela à bien un sens.

Théorème 9.7.2 *$\mathcal{I}_2(H)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve :

5. Un idéal bilatère stable par $*$.

Montrons tout d'abord que c'est un espace vectoriel. Soit $T, S \in \mathcal{I}_2(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et une base hilbertienne (e_n), alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, (T+\lambda S)^*(T+\lambda S)(e_n)\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \|(T+\lambda S)(e_n)\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle e_m, (T+\lambda S)(e_n)\rangle^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle e_m, (T+\lambda S)(e_n)\rangle^2 \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle e_m, T(e_n)\rangle^2 + |\lambda|^2\langle e_m, S(e_n)\rangle^2 \\
&\leq 2(Tr(T^*T) + |\lambda|^2 Tr(S^*S)).
\end{aligned}$$

Reste à vérifier la complétude. Pour cela on considère une suite de Cauchy (T_n). On remarque $T_n(e_m)$ est de Cauchy pour tout m. Un procédé d'extraction diagonale permet alors de conclure. ■

Dans ce qui suit (X, μ) désigne un espace mesuré et $H = L^2(X, \mu)$. Pour tout $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ on définit $T_K : H \to H$ par

$$T_K(f)(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y) \text{ pour presque tout } x \in X.$$

Exercice 9.7.3 *A l'aide de Fubini et Cauchy-Schwarz, montrer que $T_K \in \mathcal{B}(H)$.*

Dans ce cas on dit que K est le noyau de T_K.

Théorème 9.7.3 *Tout opérateur de la forme T_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Et réciproquement tout opérateur T de Hilbert-Schmidt sur H peut s'écrire comme un opérateur à noyau, c'est-à-dire il existe $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ tel que*

$$T(f)(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y) \text{ pour presque tout } x \in X.$$

De plus

$$Tr(T^*T) = \int |K(x,y)|^2\,d\mu(x)d\mu(y).$$

Preuve :

Soit T_K un opérateur à noyau. Comme L^2 est séparable, on peut le munir, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, d'une base hilbertienne que l'on note (e_n). On a alors

$$\begin{aligned}\langle e_n, T_K(e_m)\rangle &= \int_X e_n \overline{\int_X K(x,y)e_m(y)\,d\mu(y)}\,d\mu(x)\\ &= \int_{X\times X} e_n(x)\overline{K(x,y)e_m(y)}d\mu\otimes\mu(x,y)\\ = \langle e_m\otimes\overline{e_m}, K\rangle.\end{aligned}$$

D'ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T_K(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle e_m\otimes\overline{e_n}, K\rangle^2 = \|K\|_2^2.$$

Ici on a utiliser le fait que $(e_m\otimes\overline{e_n})$ forme une base hilbertienne de $L^2(X\times X, \mu\otimes\mu)$. Ce qui prouve la première et la dernière assertion. En fait on a précisément que l'application

$$\begin{array}{ccc} L^2(X\times X,\mu\otimes\mu) & \to & \mathcal{I}_2(H)\\ K & \mapsto & T_K\end{array}$$

est une isométrie sur son image. Pour conclure, il suffit de montrer que l'image est dense. Pour cela on vérifier que si $T\in\mathcal{I}_2(H)$, alors T_n définie par

$$T_n(f) = \sum_{k=1}^{n}\langle e_k, T(f)\rangle e_k,$$

converge bien vers T dans $\mathcal{I}_2(H)$. Ce qui achèvera la preuve. ■

9.8 Théorème de décomposition spectrale

9.8.1 Mesures spectrales

On rappel le théorème suivant comme conséquence du calcul fonctionnel continue pour les opérateurs normaux.

Théorème 9.8.1 *Soient H un espace de Hilbert et $T\in\mathcal{B}(H)$ auto-adjoint. Alors il existe un unique morphisme de C^*-algèbre*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_T : & C(\sigma(T),\mathbb{C}) & \to & \mathcal{B}(H) \\ & f & \mapsto & \Phi_T(f) \end{array},$$

tel que $\Phi_T(X) = T$. *De plus,* Φ_T *est une isométrie sur son image et si* $f \geq 0$ *alors* $\Phi_T(f)$ *est un opérateur positif.*

On peut alors associé une mesure à un opérateur auto-adjoint, puisqu'en projetant son calcul fonctionnelle on obtient une forme linéaire positive, d'après le théorème précédent.

Définition 9.8.1 *Soient* H *un espace de Hilbert et* $T \in \mathcal{B}(H)$ *auto-adjoint. A tout vecteur* $x \in H$ *on associe la forme linéaire positive* $l_x : C^0(\sigma(T),\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *définiepar*

$$l_x(f) = \langle x, f(T)x\rangle.$$

Le théorème 4.1.1 nous donne alors une mesure de Radon[6] μ_x^T *sur* $\sigma(T)$. *On dit que* μ_x *est la mesure spectrale associée à* x.

9.8.2 Le théorème spectral

On démontre d'abord le théorème dans le cas où il existe un vecteur cyclique, c'est-à-dire $x \in H$ tel que $\{P(T)(x) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$ soit dense dans H.

Théorème 9.8.2 *Soient* H *un espace de Hilbert et* $T \in \mathcal{B}(H)$ *auto-adjoint. On suppose de plus qu'il existe un vecteur cyclique pour* T. *Alors il existe une mesure de Radon finie sur* $\sigma(T)$ *et une application unitaire*

$$U : H \to L^2(\sigma(T),\mu),$$

tel que

$$UTU^{-1} = M_X,$$

où $M_X(f)(x) = xf(x)$ *pour tout* $f \in L^2(\sigma(T),\mu)$.

Plus généralement pour toute fonction $g \in L^\infty(\sigma(T))$ on peut définir l'opérateur $M_g : L^2(\sigma(T),\mu) \to L^2(\sigma(T),\mu)$ par $M_g(f) = gf$. Ces opérateurs vont jouer le rôle des matrices diagonales.

6. En fait une mesure régulière puisque le spectre est un espace polonais.

Preuve :

Soient $x \in H$ un vecteur cyclique et μ_x^T sa mesure spectrale. On définit alors $V : \mathbb{C}[X] \to H$ comme suit

$$V(p) = p(T)(x).$$

On remarque V est une isométrie de $(\mathbb{C}[X], \| \, . \, \|_2)$ dans $\{P(T)(x) \,|\, P \in \mathbb{C}[X]\} \subset H$, puisque

$$\begin{aligned} \|V(p)\|^2 = \|p(T)(x)\|^2 &= \langle x, p(T)^*(p(T)(x))\rangle = \langle x, \overline{p}(T)(p(T)(x))\rangle \\ &= \langle x, |p|^2(T)(x)\rangle = \int_{\sigma(T)} |p|^2 \, d\mu_x^T = \|p\|_2^2. \end{aligned}$$

De plus, par hypothèse, l'image de V est dense dans H. Par densité de $\mathbb{C}[X]$ dans $C^0(\sigma(T), \mathbb{C})$, qui lui même est dense dans $L^2(\sigma(T), \mu_x^T)$, on étend V en une isométrie $\overline{V}$ de $L^2(\sigma(T), \mu_x^T)$ sur H, et on notera alors U son inverse. Finalement, pour tout $p \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$U^{-1}(p) = p(T)x,$$

ce qui donne,

$$TU^{-1}(p) = (Tp(T))x,$$

et donc,

$$UTU^{-1}(p) = Xp(X),$$

puis par densité on vérifie qu'on a le résultat voulu. ■

La preuve dans le cas général nécessite le lemme suivant.

Lemme 9.8.1 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint. Alors il existe un ensemble de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ tel que si $i \neq j$ on a $\{P(T)(x_i) \,|\, P \in \mathbb{C}[X]\} \perp \{P(T)(x_j) \,|\, P \in \mathbb{C}[X]\}$ et*

$$H = \overline{\oplus_{i \in I} \{P(T)(x_i) \,|\, P \in \mathbb{C}[X]\}}.$$

Preuve :

On pose pour $x \in H$,

$$H_x = \{P(T)(x) \,|\, P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

Tout d'abord on remarque, puisque T est auto-adjoint, que si $y \perp H_x$ alors $H_y \perp H_x$. Puis, on pose $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ et

$$\mathcal{D} := \{D \subset S \mid \forall x, y \in D, x \neq y \Rightarrow H_x \perp H_y\}.$$

On remarque que $(\mathcal{D}, \subset)$ est partiellement ordonné et inductif, donc le lemme de Zorn, nous donne un élément maximal $\overline{D}$. On a alors

$$H = \overline{\oplus_{x \in \overline{D}} H_x}.$$

Sinon il existerait $x_0 \in S$ tel que $x_0 \perp H_x$ pour tout $x \in \overline{D}$ et alors $\overline{D} \cup \{x_0\} \in \mathcal{D}$, ce qui serait une contradiction avec le fait que $\overline{D}$ est maximal . $\square$

Ce qui nous donne dans le cas séparable le théorème suivant.

Théorème 9.8.3 *Soient H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint. Alors il existe une suite de mesures de Radon finie(μ_n) (finie ou dénombrable) sur $\sigma(T)$ et une application unitaire*

$$U : H \to \overline{\bigoplus_n L^2(\sigma(T), \mu_n)},$$

tels que si on note (f_n) la décomposition de $f \in \overline{\bigoplus_n L^2(\sigma(T), \mu_n)}$ alors

$$(UTU^{-1}f)_n = M_X(f_n) \text{ pour tout } n.$$

9.8.3 Applications

Le calcul fonctionnel borélien

Dans le paragraphe précédent, on a défini une mesure spectrale comme une forme linéaire positive sur les fonctions continues du spectre, en s'appuyant sur le calcul fonctionnelle continue que l'on a défini à l'aide du théorème de Gelfand-Naimark. Ici on va étendre le calcul fonctionnelle aux fonctions boréliennes. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint et f une fonction mesurable bornée sur $\sigma(T)$, on définit

$$Q_f(x) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_x^T(\lambda).$$

Proposition 9.8.1 *Q_f est une forme quadratique continue.*

Preuve :

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur $\sigma(T)$ telle que Q_f soit continue. D'une part, $\mathcal{F}$ contient les fonctions continues, d'autre part, à l'aide du théorème de Lusin[7], on peut approcher toute fonction borélienne bornée par une suite de fonctions continues uniformément bornées qui converge presque partout. Une application du théorème de convergence dominée nous assure que $\mathcal{F}$ contient toutes les fonctions borélienne bornées, ce qui achève la preuve. □

Le lemme de Riesz 7.0.1 nous assure qu'il existe un unique opérateur $S \in \mathcal{B}(H)$ tel que

$$\langle S(x), x\rangle = Q_f(x),$$

bien sûr, on pose $S = f(T)$. De plus on remarque $f(T)$ est auto-adjoint dés que f est réel, puisque dans ce cas $Q_f \in \mathbb{R}$ et donc L_f est bine une forme sesquilinéaire.

Proposition 9.8.2 *Soient f, g deux fonctions boréliennes bornées et $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint, alors*

$$(fg)(T) = f(T)g(T).$$

Preuve :

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur $\sigma(T)$ telles que $(fg)(T) = f(T)g(T)$ pour tout $g \in C^0(\sigma(T))$. D'une part, $\mathcal{F}$ contient les fonction continue, d'autre part, comme on l'a vu plus haut, Q_f est continue, par rapport à f, pour la convergence ponctuelle des suites de fonctions uniformément bornées, donc il en est de même, par polarisation, de la forme sesquilinéaire L_f à laquelle elle est associée. En particulier, si $(f_n) \in \mathcal{F}$, $f_n \to f$ et $\|f_n\|_\infty < +\infty$, alors

$$\begin{aligned}
\langle x, (fg)(T)(x)\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle x, (f_n g)(T)(x)\rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \langle x, f_n(T)g(T)(x)\rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} L_{f_n}(x, g(T)(x)) \\
&= L_f(x, g(T)(x)) = \langle x, f(T)g(T)(x)\rangle \text{ pour tout } x \in H.
\end{aligned}$$

7. On peut appliquer Lusin, car la mesure est régulière par les théorème de régularité 2.5.1 et 2.5.2.

Ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est fermé pour la convergence ponctuelle de suite de fonctions uniformément bornée. En appliquant le théorème de Lusin comme dans la preuve de la proposition précédente, on conclut que $\mathcal{F}$ contient toutes les fonctions boréliennes bornées. Enfin en considérant, $\mathcal{F}'$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur $\sigma(T)$ telles que $(fg)(T) = f(T)g(T)$ pour tout g fonction borélienne bornée sur $\sigma(T)$. Alors d'après ce qui précède $\mathcal{F}'$ contient $C^0(\sigma(T))$ et est fermé pour la convergence ponctuelle des suite sde fonctions uniformément bornées. On conclut comme précédemment que $\mathcal{F}'$ contient toutes les fonctions boréliennes bornées, ce qui achève la preuve. □

Nous somme en mesure de définir une mesure spectrale à valeurs dans les projections.

Théorème 9.8.4 *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint, pour tout borélien E de $\sigma(T)$, on pose*

$$\mu^T(E) = \mathbf{1}_E(T).$$

Alors μ^T vérifie

i) $\mu^T(E)$ est une projection orthogonale,

ii) $\mu^T(\emptyset) = 0$ et $\mu^T(\sigma(T)) = Id$,

iii) Si les (E_n) sont des boréliens disjoints alors pour tout $x \in H$, on a

$$\mu^T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^T(E_n)x,$$

iv) Pour tous boréliens E_1 et E_2, $\mu^T(E_1 \cap E_2) = \mu^T(E_1) \circ \mu^T(E_2)$.

v) Enfin,

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu^T(\lambda).$$

Preuve :
Comme $\mathbf{1}_E$ est réel et vérifie $\mathbf{1}_E\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_E$, on vérifie sans peine que $\mu^T(E)$ est une projection orthogonale. Le ii) est évident et iii) et iv) sont des conséquences de la proposition précédente. Pour le v) on remarque

$$\langle x, T(x)\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\mu_x^T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \langle x, d\mu^T x\rangle,$$

et on conclut en utilisant la linéarité de l'intégrale de bochner. ■

Corollaire 9.8.1 *$\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si $\mathbf{1}_V(T) \neq 0$ pour tout voisinage de λ.*

preuve :
Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{1}_{]}\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[(T) = 0$; On pose $V_\varepsilon =]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ et $g_\varepsilon(t) = \frac{1}{t-\lambda}$ si $t \notin V_\varepsilon$ et 0 sinon. On a alors

$$(T - \lambda Id)g_\varepsilon(T) = \int_{\sigma(T)\setminus V_\varepsilon} 1 \, d\mu_T = \int_{\sigma(T)} 1 \, d\mu_T = Id,$$

de même pour $(T - \lambda Id)g_\varepsilon(T)$. La réciproque est immédiate. □

Exercise 9.8.1 Soit $S, T \in \mathcal{B}(H)$, si S et T commutent et T est auto-adjoint alors montrer que S commute avec $f(T)$ pour toute fonction borélienne bornée.

Exercise 9.8.2 [lemme de Schur] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint, on peut aussi associer à T des espaces spectraux, $V_E = \mu^T(E)(H)$.

1. Montrer que V_E est invariant par T.

   On dit qu'un sous-ensemble $A \subset \mathcal{B}(H)$ est irréductible si il est stable par adjoint et que ces seuls sous-espaces invariants sont $\{0\}$ et H.

2. Montrer que si T commute avec un ensemble irréductible alors $T \in \mathbb{C}Id$.
   Indication : Utiliser le corollaire 9.8.1.

Exercise 9.8.3 Montrer que si $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi i y T} \, dy.$$

Indication : Utiliser les propriétés de l'intégrale de Bochner.

On va donner une second version du théorème 81 où l'on "concaténe" les $L^2(\sigma(T), \mu_n)$, mais avant on besoin du lemme suivant

Lemme 9.8.2 *Soit H un espace Hilbert séparable et $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint et μ^T la mesure spectrale définie plus haut. Il existe μ une mesure positive sur $\sigma(T)$ telle que pour tout borélien $E \subset \sigma(T)$ on a $\mu^T(E) = 0$ si et seulement si $\mu(E) = 0$.*

Preuve :

Soit (e_n) une base hilbertienne et μ_n la mesure spectrale associée à e_n, on a en particulier $\mu_n(E) = \langle e_n, \mu^T(E)(e_n)\rangle$. On pose

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mu_n.$$

Soit E un borélien de $\sigma(T)$ tel que $\mu^T(E) = 0$ alors $\mu_n(E) = 0$ pour tout n et $\mu(E) = 0$. Réciproquement si $\mu(E) = 0$, alors alors $\mu_n(E) = 0$ pour tout n, en particulier

$$\langle e_n, \mu^T(E)e_n\rangle = \langle \mu^T(E)(e_n), \mu^T(E)(e_n)\rangle \text{ pour tout } n,$$

et donc $\mu^T(E)e_n = 0$ pour tout n, donc $\mu^T(E) = 0$, ce qui achève la preuve. □

Théorème 9.8.5 *Soient H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint. Alors il existe un espace mesuré (X, μ) fini et une application unitaire*

$$U : H \to L^2(X, \mu),$$

et une fonction borélienne bornée g de (X, μ), telles que

$$UTU^{-1}(f) = M_g(f).$$

Preuve :
On prend H_n une décomposition de H en sous-espace cyclique. On choisit $x_n \in H_n$ un vecteur cyclique et on note μ_n sa mesure spectrale et on l'étend par 0 en dehors de $\sigma(T_{|H_n})$. Enfin on prend la mesure μ donnée par le lemme précédent. Alors μ_n ne charge aucun ensemble de mesure nulle pour μ donc d'après le théorème de Radon-Nykodim, il existe une fonction mesurable positive h_n telle que $\mu_n = h_n\mu$. Alors

$$\begin{array}{rccc} U_n : & L^2(\sigma(T_{|H_n}), \mu_n) & \to & L^2(\sigma(T_{|H_n}), \mu) \\ & f & \mapsto & \sqrt{h_n}f \end{array}$$

définie une suite d'applications unitaires. On pose X l'union disjointe des $\sigma(T_{|H_n})$ alors $L^2(X, \mu)$ est égale à la somme direct orthogonale des $L^2(\sigma(T_{|H_n}), \mu_{|\sigma(T_{|H_n})})$. Si on définit U comme la concaténation des U_n et g comme égale à $\lambda \mapsto \lambda$

sur chaque $\sigma(T_{|H_n})$ on a le résultat cherché. ■

Afin de conclure ce paragraphe, on donne une version du théorème spectral pour les opérateurs normaux. Comme on l'a déjà remarqué, tout opérateur peut se décomposer sous la forme

$$T = A + iB,$$

où A et B sont auto-adjoints. De plus comme T est normal, un simple calcul montre que A et B commutent. Alors la C^*-algèbre engendrée par A et B est commutative et on peut appliquer Gelfand-Naimark et on obtient un calcul fonctionnelle continue sur cette algèbre et donc une mesure spectral. On peut alors appliquer le théorème précédent pour obtenir un théorème spectrale pour les opérateurs normaux.

Théorème 9.8.6 *Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal. Alors il existe un espace mesure de masse finie(X, μ), une fonction mesurable bornée $f : X \to \mathbb{C}$ et une isométrie $U : H \to L^2(X, \mu)$ tels que $UTU^{-1} = M_f$.*

Le théorème de Peter-Weyl

On a vu à la section 9.5.1 que $SO(3)$ admet une représentation unitaire dans $L^2(S^2)$ qui se décompose en sous-représentations irréductibles de dimension finie deux à deux orthogonales. Le théorème de Peter-Weyl vient généraliser ceci à tout groupe compact.

Soit G un groupe compact muni de sa mesure de Haar μ, comme on l'a vu à la section 4.1.3, l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi : & G & \to & GL_c\,(L^2(G)) \\ & g & \mapsto & L_g \end{array}$$

est une représentation unitaire de G. Nous allons décomposer $H = L^2(G)$ en sous-espace invariant à l'aide du théorème spectrale.

Un outil fondamentale dans l'étude des représentation est le lemme Schur dont voici une des nombreuse versions.

Lemme 9.8.3 (Lemme de Schur) *Soient $\pi_V : G \to U(V)$ et $\pi_W : G \to U(W)$ deux représentations unitaires irréductibles. Si $T : V \to W$ est équivariante, c'est-à-dire telle que $T \circ \pi_V(g) = \pi_W(g) \circ T$ pour tout $g \in G$, alors*

T est soit nulle soit un multiple d'une isométrie. Plus particulièrement, si $V = W$ alors $T \in \mathbb{C}Id$.

Preuve :

Soit T^* l'adjoint de T, alors on a aussi $T^* \circ \pi_W(g) = \pi_V(g) \circ T^*$ pour tout $g \in G$. Comme T^*T est un opérateur auto-adjoint sur V, on peut lui appliquer le théorème spectral et plus particulièrement l'exercice 9.8.2. Mais comme la représentation est irréductible ses seuls sous-espaces invariants sont V et $\{0\}$, donc $T^*T \in \mathbb{C}Id$. De même pour TT^*, donc T est bien le multiple d'une isométrie. □

Si G est abélien, alors en posant $T = \pi(x)$ on voit que $\pi(x) = \lambda(x)Id$ et que $\lambda \in \hat{G}$. Donc toute représentation irréductible unitaire d'un groupe abélien est de dimension 1. De plus il y a une correspondances entre les caractères et les représentations irréductibles. Comme nous allons le voir dans le cas non-abélien le rôle des caractères est joué par les représentations irréductibles unitaires de dimension finie. Notons $\hat{G}$ les classes d'équivalence de ces représentations, on l'appelle le *dual unitaire*. On choisit une énumération de $\hat{G}$ par des indices notés ξ et les élément de $\hat{G}$ sont notés $\rho_\xi : G \to U(V_\xi)$.

En appliquant le lemme de Schur à la projection orthogonal $\pi : W \to V$ entre deux sous-espaces de H, on obtient le corolaire suivant.

Corollaire 9.8.2 *Soient $\pi_V : G \to U(V)$ et $\pi_W : G \to U(W)$ deux sous-représentations irréductibles d'une représentation $\pi : G \to U(H)$. Alors soit π_V et π_W sont équivalentes ou V et W sont orthogonaux.*

Une autre conséquence du lemme de Schur, est donnée par le corollaire suivant

Corollaire 9.8.3 *Soit $\pi_V : G \to U(V)$ une représentation irréductible unitaire de dimension finie, alors pour tout $T \in End(V)$ on a*

$$\frac{Tr(T)}{dim(V)} Id = \int_G \pi_V(g) T \pi_V(g)^* \, d\mu(g).$$

Soit $\rho_\xi : G \to U(V_\xi)$ un élément de $\hat{G}$, on définie H_ξ le sous-espace de H engendré par les $f_{\xi,v,w}(g) = \langle v, \rho_\xi(g)(w) \rangle_{V_\xi}$ où $v, w \in V_\xi$. C'est clairement un

sous-espace invariant de $L^2(G)$. On a alors la conséquence suivante du lemme de Schur.

Proposition 9.8.3 *Toute sous-représentation irréductible $\pi : G \to U(V)$ de $\pi : G \to U(H)$ qui est isomorphe à un ρ_ξ est une sous représentation de H_ξ. De plus H_ξ est isomorphe à $\oplus^{dim(V_\xi)} V_\xi$. En particulier $dim(H_\xi) = (dim(V_\xi))^2$.*

Preuve :
Soit une sous-représentation irréductible $\pi_V : G \to U(V)$ de $\pi : G \to U(H)$ qui est isomorphe à un ρ_ξ. Il existe alors une application équivariante $T : V_\xi \to V$. Soit $v \in V_\xi$ et $K \in L^2(G)$, alors on a

$$\begin{aligned}
(T(v) * K)(g) &= \int_G T(v)(h) K(h^{-1}g)\, d\mu(h) \\
&= \int_G L_{g^{-1}} T(v)(h) K(h^{-1})\, d\mu(h) \\
&= \langle L_{g^{-1}} T(v), \overline{\tilde{K}} \rangle \\
&= \langle T(\rho_\xi(g^{-1})(v)), \overline{\tilde{K}} \rangle \\
&= \langle \rho_\xi(g^{-1})(v), T^*(\overline{\tilde{K}}) \rangle \\
&= \langle v, \rho_\xi(g)(T^*(\overline{\tilde{K}})) \rangle,
\end{aligned}$$

où $\tilde{K}(h) = \overline{K(h^{-1})}$. Donc $T(v) * K \in H_\xi$ pour tout $K \in L^2(G)$. A l'aide d'une approximation de l'unité on a $T(v) \in H_\xi$ et donc $V \subset H_\xi$, ce qui prouve la première assertion.

D'autre part, soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base hilbertienne de V_ξ alors

$$H_\xi = \oplus_{i=1}^n H_i$$

avec $H_i = Vect\{f_{\xi,v,e_i} \,|\, v \in V_\xi\}$, ce qui prouve la deuxième assertion. □

Comme deux représentations non-isomorphes sont orthogonales, d'après le corollaire 9.8.2, alors $\oplus_{\xi \in \hat{G}} H_\xi$ est un sous espace invariant qui contient toute les sous-représentations irréductibles de dimension finie. Reste à montrer qu'il s'agit de $L^2(G)$, ce que nous donne la proposition suivante.

Proposition 9.8.4 $L^2(G) = \oplus_{\xi \in \hat{G}} H_\xi$

Preuve :
Si ce n'est pas le cas alors il existe $f \not\equiv 0$ orthogonal à chaque H_ξ, en particulier il sera dans l'orthogonal de toute sous-représentation finie de $G :\to U(H)$.

Soit alors $K \in L^2(G)$ telle que $K(g^{-1}) = \overline{K(g)}$. Comme le noyau est symétrique et G est compact, alors l'opérateur de convolution

$$\begin{array}{rccc} T: & L^2(G) & \to & L^2(G) \\ & f & \mapsto & f * K \end{array}$$

est un opérateur auto-adjoint compact. D'après le théorème spectrale l'orthogonal du noyau de cet opérateur se décompose en sous-espace propre de dimension finie. Comme T est équivariante, par invariance de la mesure de Haar, chaque sous espace propre est est une représentation de dimension finie, f est donc orthogonal à chaque sous-espace propre et donc dans le noyau de T. D'ou $f * K \equiv 0$ pour tout noyau symétrique, à l'aide d'une approximation de l'unité, on conclut que $f \equiv 0$, ce qui donne une contradiction et prouve la proposition. □

Théorème 9.8.7 (Théorème de Peter-Weyl) *La représentation*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G & \to & GL_c(L^2(G)) \\ & g & \mapsto & L_g \end{array},$$

est isomorphe à une somme direct de représentation irréductible de dimension finie. En fait

$$\pi = \bigoplus_{\xi \in \hat{G}} \rho_\xi.$$

Preuve du théorème :
Il s'agit d'une conséquence des propositions 9.8.3 et 9.8.4. ■

Le théorème de Peter Weyl est la première étape dans l'analyse de Fourrier sur les groupes non-abélien, voir [Tao] ou encore [DS09] chapitre 7 et 8, pour plus de détails.

Le théorème min-max

Chapitre 10

Opérateurs non-bornés

Soit $H = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ des opérateurs comme

$$(\hat{x^i} f)(x) = x^i f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^3,$$

$$(\hat{p^i} f)(x) = i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^3,$$

jouent un rôle fondamental en physique quantique, mais on ne peut les définir que sur des sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ comme $C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. De plus il ne sont pas continues sur ces sous-espaces, donc il n'y a aucune chance de pourvoir les prolonger à l'espace tout entier. On est donc contraint d'étudier ces opérateurs sur leur domaine de définition. Le but de ce chapitre est de donner une version du théorème spectral pour de tels opérateurs.

10.1 Définitions et généralités

Définition 10.1.1 *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur non-borné est la donné d'une paire (D, T) où D est un sous-espace de H et T un opérateur linéaire de D dans H.*

On notera souvent T pour (D, T) et le domaine d'un opérateur T fixé sera noté $D(T)$.

Définition 10.1.2 *On dit que T est une extension de S et on le note $S \subset T$ si $D(S) \subset D(T)$ et $T = S$ sur $D(S)$.*

Exercise 10.1.1 Soit (X, μ) un espace mesuré et $g : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On considère l'opérateur de multiplication par g sur $L^2(X, \mu)$. Quel est son domaine de définition ? Montrer qu'il est dense.

Définition 10.1.3 *Un opérateur est dit fermé si son graphe est fermé. On dit qu'un opérateur est fermable s'il admet une extension fermée.*

Exercise 10.1.2 Montrer que tout opérateur fermable admet une (unique) plus petite extension fermée, on la notera $\overline{T}$.

Exercise 10.1.3 Montrer que la fermeture de $\left(i\frac{d}{dx}, C_c^\infty(\mathbb{R})\right)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est $\left(i\frac{d}{dx}, H^1(\mathbb{R})\right)$(ici la dérivée est au sens des distribution).

Exercise 10.1.4 Soit $L^2(\mathbb{R})$ on définit pour tout $f \in L^1 \cap L^2$ l'opérateur de Frourier

$$U(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi xt}\, dt.$$

Montrer que si $f \in D(\frac{d}{dx}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ alors $U(f) \in D(M_x)$ et que l'on a

$$\frac{d}{dx} \subset U^{-1} M_{2i\pi x} U.$$

Définition 10.1.4 *Soit T un opérateur non-borné sur H un espace de Hilbert. Le domaine adjoint $D(T)^*$ est l'ensemble des vecteur $x \in H$ tel que la forme linéaire*

$$\begin{array}{rccc} l_x : & D(T) & \to & \mathbb{C} \\ & y & \mapsto & \langle x, T(y)\rangle \end{array}$$

soit continue. Un adjoint de T est un opérateur T^* défini sur $D(T)^*$ tel que

$$\langle x, T(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle \text{ pour tout } x \in D(T)^* \text{ et } y \in D(T).$$

Exercise 10.1.5 Montrer qu'il existe toujours un adjoint et qu'il est unique si $D(T)$ est dense dans H.

Exercise 10.1.6 Construire un opérateur non-borné de domaine dense dont le domaine de l'adjoint est réduit à $\{0\}$.
Indication : On pourra commencer par construire un opérateur non fermable.

A la vu de ces eux exercices, on s'intéressera dans la suite essentiellement aux opérateurs de domaine dense et fermables.

Proposition 10.1.1 *Soit deux opérateurs non-bornés T et S sur H, on a*

i) $T \subset S \Rightarrow S^* \subset T^*$,

de plus si $D(T)$ est dense,

ii) T^* *est fermé,*

iii) T *est fermable si et seulement si* $D(T)^*$ *est dense et dans ce cas* $\overline{T} = T^{**}$,

iv) si T *est fermable alors* $\overline{T}^* = T^*$.

Preuve :

En fait l'ensemble des proposition sont une conséquence du fait que le graphe de T^* est l'orthogonal de $\{(T(x), -x) \,|\, x \in D(T)\}$ dans $H \times H$. En effet soit $(a, b) \in H \times H$, on a alors

$$\begin{aligned}
&\langle (a,b), (T(x), -x)\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in D(T)\\
\Leftrightarrow &\langle a, T(x)\rangle = \langle b, x\rangle \text{ pour tout } x \in D(T)\\
\Leftrightarrow &x \mapsto \langle a, T(x)\rangle \text{ est continue sur } D(T) \text{ et coïncide avec } x \mapsto \langle b, x\rangle\\
\Leftrightarrow &a \in D(T^*) \text{ et } b = T^*(a).
\end{aligned}$$

La proposition est alors une conséquence des relations d'orthogonalité dans un Hilbert. En effet le fait que $E \subset F \Rightarrow F^\perp \subset E^\perp$ donne i).

Maintenant supposons que $D(T)$ est dense, alors T^* est bien défini.

Le fait que $E^\perp$ soit toujours fermé assure que le graphe de T^* est fermé et donc ii).

Supposons que T est fermable et soit $v \in (D(T)^*)^\perp$ alors d'après le remarque ci-dessus $(v, 0) \in \overline{\{(T(x), -x) \,|\, x \in D(T)\}}$ mais comme $\overline{T}$ est un opérateur ceci implique que $v = 0$ et donc $D(T)^*$ est dense.
Réciproquement si $D(T)^*$ est dense alors T^{**} est bien défini et son graphe est clairement l'adhérence de celui de $\overline{T}$ puisque $(E^\perp)^\perp = \overline{E}$, ce qui prouve iii).

Enfin si T est fermable alors $D(T)^*$ est dense, donc on peut définir T^{**}, on peut également définir T^{***} puisque T^* est fermé donc $D(T^*)^*$ est dense, puis en appliquant ii) et iii) on a $T^* = \overline{T}^*$. $\square$

Définition 10.1.5 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné de domaine dense dans H, on dit que T est symétrique si $T \subset T^*$ et auto-adjoint si $T = T^*$*

Exercice 10.1.1 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné. On a*

i) si T est symétrique alors T est fermable,

ii) si T est symétrique alors $T \subset T^{**} \subset T^*$,

iii) si T est fermé et symétrique $T = T^{**} \subset T^*$,

iv) si T est auto-adjoint $T = T^{**} = T^*$.

Une remarque importante est que tout opérateur symétrique et défini sur H est automatiquement continue, c'est le théorème de Hellinger-toeplitz, que l'on peut obtenir ici comme une simple conséquence du graphe fermé.

Exercise 10.1.7 Montrer que M_x est auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 10.1.6 *Un opérateur est dit essentiellement auto-adjoint si il est symétrique et si sa fermeture est auto-adjointe.*

Exercice 10.1.2 *Montrer que $(i\frac{d}{dx}, C_c^\infty(\mathbb{R}))$ est essentiellement auto-dajoint. Indication : On pourra soit le montrer à "la main" ou utiliser la définition des espace deSoboloev par l'analyse de Fourrier et simplement remarquer en raffinant l'exercice 10.1.4 que cet opérateur est unitairement équivalent à $M_{2\pi x}$.*

Dans ce qui suit on s'intéresse au opérateur auto-adjoint mais tout peut se transposer au opérateur essentiellement auto-adjoint en passant à la fermeture.

Afin de mieux comprendre le comportement d'un opérateur symétrique T, nous allons étudier sa résolvante $(T - zId)^{-1}$, que l'on note $R(z)$. On remarque tout d'abord que si T est symétrique et fermé, alors pour tout $x \in D(T)$ on a $\langle x, T(x)\rangle = \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$, en particulier

$$\Im(\langle (T - zId)(x), x\rangle) = -\Im(z)\|x\|^2,$$

d'ou d'après Cauchy-Schwarz,

$$\|(T - zId)(x)\| \geq |\Im(z)|\|x\|. \tag{10.1}$$

En particulier $T - zId$ est injectif dés que $\Im(z) \neq 0$. De plus on remarque si $x_n \in D(T)$ est telle que $(T - zId)(x_n)$ est convergente , alors d'après (10.1), x_n est convergente. On en déduit que $Im(T - zId)$ est fermé car T est fermé. On peut alors définir $R(z)$ sur $Im(T - zId)$ et toujours grâce à (10.1) on remarque que $R(z)$ est borné et que $\|R(z)\| \leq \frac{1}{|\Im(z)|}$. Tout ceci nous amène au théorème suivant qui caractérise le fait d'être auto-adjoint en fonction du comportement de la résolvante.

Théorème 10.1.1 *Soit H un espace de Hillbert et T un opérateur non-borné symétrique, fermé et T^* son adjoint. Alors, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a*

1. *$R(z)$ est défini sur H si et seulement si $T^* - z^*Id$ est injectif,*
2. *si T est auto-adjoint alors $R(z)$ est défini sur H,*
3. *et réciproquement si $R(z)$ et $R(z^*)$ sont définis sur H alors T est auto-adjoint.*

La preuve de ce théorème utilise l'exercice suivant

Exercise 10.1.8 Montrer que si T est symétrique, fermé et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et que $R(z)$ et $R(z^*)$ sont définis sur H alors $R(z^*) = R(z)^*$.

Preuve du théorème 10.1.1 :

En utilisant le fait que l'image de $T - zId$ est fermée, on a

$Im(T - zId) \neq H$
$\Leftrightarrow Im(T - zId)$ n'est pas dense
$\Leftrightarrow$ il existe $y \in (Im(T - zId))^\perp \setminus \{0\}$,
$\Leftrightarrow$ il existe $y \neq 0$ tel que $|\langle y, T(x)\rangle| = |z|\langle y, x\rangle| \leq |z|\|x\|\|y\|$ pour tout $x \in D(T)$,
$\Leftrightarrow y \in D(T)^* \setminus \{0\}$ et $\langle x, (T^* - z^*Id)(y)\rangle = \langle (T - zId)(x), y\rangle = 0$ pour tout $x \in D(T)$,
$\Leftrightarrow y \in D(T)^* \setminus \{0\}$ et $(T^* - z^*Id)(y) = 0$.

Dans la dernière équivalence on utilise le fait que $D(T)$ soit dense.

Pour le ii) on remarque que si T est auto-adjoint alors, d'après (10.1), $T - z^* Id = (T - zId)^*$ est injectif et donc d'après i) $R(z)$ est défini sur H.

Enfin, si $R(z)$ et $R(z^*)$ sont définis sur H alors pour tout $x \in D(T)$

$$\langle x, R(z^*)(T^* - z^* Id)(y)\rangle = \langle x, R(z)^*(T^* - z^* Id)(y)\rangle =$$
$$\langle R(z)(x), (T^* - z^* Id)(y)\rangle = \langle (T - zId)R(z)(x), (y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

on alors $R(z^*)(T^* - z^* Id)(y) = y$ pour tout $y \in D(T)^*$, or l'image de $R(z^*)$ est inclus dans $D(T)$, donc T est auto-adjoint.

■

Exercise 10.1.9 [Caractérisation des opérateurs essentiellement auto-adjoints] Soit T un opérateur non-borné symétrique. Montrer que T est essentiellement auto-adjoint si et seulement si $Im(T + iId)$ et $Im(T - iId)$ sont denses.

Définition 10.1.7 *Soit T un opérateur non-borné fermé*[1] *de domaine dense, le spectre de T,noté $\sigma(T)$, est constitué des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda Id : D(T) \to H$ est inversible et d'inverse borné*[2].

Exercise 10.1.10 [Identité de la résolvante] Soit $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que $R(z)$ et $R(w)$ soient définis sur H alors

$$(z - w)R(z)R(w) = R(z) - R(w).$$

En particulier les résolvantes commutent.
Indication : Multiplier l'équation par $(T - zId)(T - wId)$.

Théorème 10.1.2 (Caractérisation du spectre d'un opérateur auto-adjoint) *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint de H alors $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si il existe une suite $x_n \in D(T)$ telle que*

1. $\|x_n\| = 1$,
2. $\lim_{n\to+\infty} \|(T - \lambda)(x_n)\| = 0$.

1. On pourrait définir le spectre pour des opérateur simplement fermable, en remplaçant T par $\overline{T}$.
2. Cette condition est superflue par le graphe fermé.

Preuve :
Supposons tout d'abord qu'une telle suite existe et que $\lambda \notin \sigma(T)$, on a alors

$$1 = \|x_n\| = \|R(\lambda)(T - \lambda Id)x_n\| \leq \|R(\lambda)\| \, \|(T - \lambda Id)x_n\|,$$

ce qui aboutit à une contradiction.

Réciproquement, supposons qu'une telle suite n'existe pas. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|x\| \leq C\|(T - \lambda Id)(x)\| \text{ pour tout } x \in D(T). \tag{10.2}$$

En effet, sinon il existe $x_n \in D(T)$ tel que

$$\frac{\|x_n\|}{\|(T - \lambda Id)(x_n)\|} \to \infty,$$

alors la suite $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ donne la contradiction souhaitée. En particulier, $T - \lambda Id$ est injective, donc son adjoint qui n'est rien d'autre qu'elle même, car $\lambda \in \mathbb{R}$, l'est aussi, donc, d'après le théorème 10.1.1 [3], $T - \lambda Id$ est surjective, ce qui achève la preuve par contraposé. ■

Exercise 10.1.11 Montrer que $T(f) = i\frac{df}{dx}$ de domaine $C_c^\infty((0,1))$ est symétrique mais n'est pas essentiellement auto-adjoint dans $L^2([0,1])$. Décrire les extensions auto-adjointes de T dans T^*.

10.2 Le calcul fonctionnel borélien

Nous allons définir le calcul fonctionnel à l'aide du théorème suivant que l'on peut voir comme le pendant holomorphe du théorème de Riesz.

Théorème 10.2.1 (Théorème de représentation de Herglotz) *Soit $F : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{H}}$ une fonction holomorphe du demi-plan supérieur dans son adhérence telle que*

$$|F(z)| \leq \frac{C}{\Im(z)},$$

3. Dans le théorème on suppose que $z \notin \mathbb{R}$ mais ici on a déjà (10.2), donc le résultat est valable.

pour $C > 0$. Alors il existe une unique mesure de Radon positive finie μ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z}\, d\mu(x).$$

De plus, on a $-iyF(iy) \to \mu(\mathbb{R})$ quand $y \to +\infty$.

Preuve :

Soit $F_\varepsilon(x) = F(x + i\varepsilon)$. On va montrer que $F_{\varepsilon+t} = F_\varepsilon * P_t$ où P_t est le noyau de Poisson $P_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2+x^2)}$. Pour cela on remarque que $F_{\varepsilon+t} - F_\varepsilon * P_t$ est harmonique en (x,t) et vaut sur 0 sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ puis en prenant le symétrique et en appliquant le théorème de Liouville à l'aide de nos hypothèses, on conclut que $F_{\varepsilon+t} = F_\varepsilon * P_t$.

Donc, en utilisant les propriétés de la convolution, on remarque que la masse de la mesure $ImF_\varepsilon(x)dx$ est indépendante de ε. En particulier, si on regarde l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ comme le dual de $C_0(\mathbb{R})$ à l'aide du théorème de Riesz, alors, à extraction près, $\mu_\varepsilon = ImF_\varepsilon(x)dx$ converge faiblement * vers une mesure de Radon finie μ.

On trouve alors la formule de représentation à l'aide de la formule de Cauchy et un contour bien adapté. L'unicité est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass qui nous affirme l'algèbre engendrée par les $t \mapsto \frac{1}{t-z}$, où $z \in \mathbb{H}$ est dense dans $C^0(K)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$.

Enfin, on remarque que

$$-iyF(iy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{iy}{t-iy}\, d\mu,$$

et dans ce cas le théorème de convergence dominée permet de conclure. ■

Soit $T : D(T) \to H$ un opérateur auto-adjoint de domaine dense et $x \in H$, on définit $F : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{H}}$ par

$$F(z) = \langle R(z)x, x\rangle.$$

On remarque tout d'abord que F est holomorphe. En effet, soit $z \in \mathbb{H}$

fixé et $w \in H$ tel que $|w - z| < Im(z)$, comme $\|R(z)\| \leq \frac{1}{\Im(z)}$, on a

$$R(w) = (T - wId)^{-1} = ((T - zId) - (w - z)Id)^{-1} = R(z)(Id - (w - z)R(z))^{-1}$$
$$= R(z)\sum_{k=0}^{+\infty}(R(z)(w - z))^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(R(z))^{k+1}(w - z)^k,$$

donc F est $\mathbb{C}$-analytique autour de chaque point de $\mathbb{H}$ donc holomorphe. De plus, d'après (10.1), on a

$$|F(z)| \leq \frac{\|x\|^2}{\Im(z)}.$$

Exercise 10.2.1 En reprenant l'argument qui a servi à montrer que la résultante est holomorphe sur $\mathbb{H}$, montrer qu'elle est analytique sur le complémentaire du spectre et en déduire que le spectre d'un opérateur symétrique et fermé est fermé.

Reste à montrer que $\Im(F(z)) \geq 0$ pour appliquer le théorème de Herglotz. Ceci repose sur le fait que comme T est auto-adjoint $R(z)^* = R(z^*)$ et la formule de la résolvante. En effet, on a

$$\Im(F(z)) = \frac{\langle R(z)(x), x\rangle - \langle x, R(z)(x)\rangle}{2i} = \frac{\langle R(z)(x), x\rangle - \langle R(z^*)(x), x\rangle}{2i}$$
$$= \frac{\langle (R(z) - R(z^*))(x), x\rangle}{2i} = Im(z)\langle R(z^*)(R(z)(x)), x\rangle = Im(z)\|R(z)(x)\|^2.$$

Il existe donc une mesure de Radon finie μ_x^T telle que

$$\langle R(z)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z}\, d\mu_x^T(t).$$

On peut alors, pour tout $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions boréliennes bornées, définir la forme quadratique suivante sur H

$$Q_f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_x^T(t).$$

Reste à montrer qu'elle est continue pour définir le calcul fonctionnel à l'aide du lemme de Riesz. Pour cela il suffit dévaluer la masse de μ_x^T, c'est-à-dire la limite de $iyF(iy)$ lorsque $y \to +\infty$. On va supposer que $x \in Im(R(i))$ dans un premier temps, alors il existe $x' \in H$ tel que

$$-iyF(iy) = -iy\langle R(iy)R(i)x', R(i)x'\rangle = -iy\langle \frac{R(iy) - R(i)}{(y - 1)i}x', R(i)x'\rangle,$$

ce qui donne

$$\lim_{y\to+\infty} -iyF(iy) = \|x\|^2.$$

Dés lors, la densité du domaine de T achève la preuve de la continuité de Q_f.

Enfin en appliquant le lemme de Riesz, on trouve que pour tout $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, il existe $f(T)$ tel que

$$\langle f(T)x, x\rangle = Q_f(x).$$

On a alors le théorème suivant

Théorème 10.2.2 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint de domaine dense. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_T : & \mathcal{B}_b(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{B}(H) \\ & f & \mapsto & f(T) \end{array}$$

vérifie

i) Φ_T *est un* $*$*-morphisme,*

ii) pour tout $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ *on a* $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$*,*

iii) si $f \geq 0$ *alors* $f(T) \geq 0$*,*

iv) pour tout borelien borné E*,* $\mathbf{1}_E(T)(H) \subset D(T)$ *et* $\mathbf{1}_E(T)T = T\mathbf{1}_E(T)$*,*

v) $D(T) = \{x \in H \mid \int |t|^2 d\mu_x(t) < +\infty\}$*, en particulier pour tout* $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ *on a* $f(T)(D(T)) \subset D(T)$*.*

vi) pour tout $f, g \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ *telle que* $g(x) = xf(x)$ *on a* $g(T) = f(T)T$ *sur* $D(T)$ *et* $g(T) = Tf(T)$ *sur* H*,*

Preuve :

i)Tout d'abord on vérifie que $f(T)$ est borné par définition puisque le lemme de Riez produit un opérateur borné. D'autre part, l'application est clairement linéaire et pour tout $x \in H$ on a

$$\langle \bar{f}(T)(x), x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}\, d\mu_x^T = \overline{\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_x^T} = \overline{\langle f(T)(x), x\rangle} = \langle f(T)^*(x), x\rangle,$$

d'ou $\bar{f}(T) = f(T)^*$. Reste à prouver la multiplicativité, pour cela notons $\mu_{x,y}^T$ la mesure obtenue par polarisation de μ_x^T, on a alors

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_{x,y}^T(t),$$

De plus c'est l'unique mesure telle que pour tout $z \in \mathbb{H}$, on ait

$$\langle R(z)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, d\mu^T_{x,y}(t). \tag{10.3}$$

Il suffit donc de démontrer que

$$f(t)d\mu^T_{x,y}(t) = d\mu^T_{f(T)x,y}(t). \tag{10.4}$$

Or, on a, pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu_{f(T)x,y} &= \langle R(z)f(T)(x), y\rangle = \langle x, f(T)^* R(z^*)(y)\rangle \\ &= \overline{\langle \bar{f}(T)R(z^*)(y), x\rangle} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{d\mu_{R(z^*)(y),x}}.\end{aligned} \tag{10.5}$$

Donc notre problème se ramène à démontrer que

$$\overline{d\mu_{R(z^*)(y),x}} = d\mu_{x,R(z^*)(y)} = d\mu_{R(z)(x),y} = \frac{1}{t-z} d\mu_{x,y}. \tag{10.6}$$

Plus généralement, en appliquant l'identité de la résolvante, on a, pour $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fixé et tout $z \in \mathbb{H} \setminus \{w\}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu_{R(w)(x),y}(t) &= \langle R(z)R(w)(x), y\rangle = \langle \frac{R(z)-R(w)}{z-w}(x), y\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\frac{1}{t-w} d\mu_{x,y}(t).\end{aligned} \tag{10.7}$$

Ce qui prouve le résultat souhaité, par unicité de la mesure polarisée.

ii) est simplement une conséquence du fait que $|\mu_x| = \|x\|^2$ et du fait que $\|TT^*\| = \|T\|$ pour un opérateur continue.

iii) est immédiat.

iv) Soit $z \in \mathbb{H}$ on pose $S_E(z) = ((t-z)\mathbf{1}_E)(T)$, on montre à laide de 10.4 que

$$\mathbf{1}_E(T)(x) = R(z)S_E(z)(x) \text{ pour tout } x \in H, \tag{10.8}$$

ce qui prouve la première partie. Puis on remarque que la second partie est équivalente à

$$R(z)\mathbf{1}_E(T) = \mathbf{1}_E(T)R(z),$$

que l'on peut prouver simplement à l'aide de (10.4), (10.3) et (10.6).

v) Tout d'abord on va montrer que si $x \in H$ et $y \in D(T)$ alors

$$d\mu_{T(x),y}(t) = t d\mu_{x,y}(t). \tag{10.9}$$

Pour cela on considère un borélien E borné, d'après (10.8) et iv), on a

$$\mathbf{1}_E(T)T = T\mathbf{1}_E(T) = (t\mathbf{1}_E)(T).$$

Soit alors x$\in H$ et $y \in D(T)$ alors

$$\int_E t d\mu_{x,y} = \langle (t\mathbf{1}_E)(T)(x), y\rangle = \langle \mathbf{1}_E(T)T(x), y\rangle = \int_E d\mu_{T(x),y}.$$

Ceci étant vrai quelque soit E, on l'égalité cherchée.

Soit alors $x \in D$, et $E = [-R, R]$, on a

$$\|T(x)\|^2 \geq \|\mathbf{1}_E(T)T(x)\|^2 = \int_E t^2 d\mu_x^T(t),$$

On a donc $D(T) \subset \{x \in H \mid \int |t|^2 d\mu_x(t) < +\infty\}$. Réciproquement si $x \in \{x \in H \mid \int |t|^2 d\mu_x(t) < +\infty\}$ et $n > 0$ on a, d'après (10.8),

$$\mathbf{1}_{[-n,n]}(T)(x) = R(z)S_{[-n,n]}(z)(x),$$

où $S_E(z) = ((t-z)\mathbf{1}_E)(T)$. On vérifie que par hypothèse $S_{[-n,n]}(z)(x)$ est de Cauchy et donc converge, on obtient le résultat par passage à la limite.

vi) est une simple conséquence de (10.9). ■

10.3 Théorème spectral

10.3.1 Première version

Muni d'un calcul fonctionnelle borélien on peut définir une mesure spectrale. Toutefois, à ce stade, le calcul borélien est défini pour des fonctions

boréliennes de $\mathbb{R}$. Mais comme on sait que le spectre est fermé on peut prolonger toute fonction borélienne du spectre par 0 sur le complémentaire, la fonction ainsi obtenue est toujours une fonction borélienne bornée. Par contre il faut vérifier que les identités obtenues précédemment restent vraies, autrement dit que le support des mesures spectrales construites précédemment est bien inclus dans le spectre.

Exercise 10.3.1 Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint. Montrer que $\cup_{x\in D(T)} supp\mu_x^T \subset \sigma(T)$.

Théorème 10.3.1 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint. On définit pour tout borélien E de $\sigma(T)$ la mesure spectrale*

$$\mu^T(E) = \mathbf{1}_E(T).$$

Alors

i) $\mu^T(E)$ est une projection orthogonale,

ii) Si les (E_n) sont des boréliens disjoints alors pour tout $x \in H$, on a

$$\mu^T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^T(E_n)x,$$

iii) $\mu^T(\emptyset) = 0$ et $\mu^T(\sigma(T)) = Id$.

Soit D_c l'union des images des $\mu^T(\mathbf{1}_{[-N,N]})$ où $N \in \mathbb{N}$.

iv) D_c est dense dans H et $T(D_c) \subset D_c$.

Preuve :

i), ii) et iii) se montrent exactement de la même manière que dans le cas borné.

iv) Soit $x \in H$ alors, d'après ii), $x = \lim_n \mathbf{1}_{[-n,n]}(T)(x)$, ce qui prouve la densité. Soit $x \in D_c$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $y \in H$ tel que $x = \mu^T(\mathbf{1}_{[-n,n]})(y)$ alors

$$T(x) = T(\mu^T(\mathbf{1}_{[-n,n]})(y)) = \mu^T(\mathbf{1}_{[-n,n]})(T(y)) \in D_c$$

d'après iv) du théorème 10.2.2.

■

Exercise 10.3.2 Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint . Montrer que $Ker(T - \lambda Id) = \mu^T(\mathbf{1}_{\{\lambda\}})(H)$.

Le spectre n'étant pas borné, *a priori* on ne peut pas intégrer la fonction identité contre la mesure spectrale pour retrouver l'opérateur. Pour cela on va étendre le calcul borélien à $\mathcal{B}_{loc}(\sigma(T))$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur tout borélien borné. On pose pour tout $f \in \mathcal{B}_{loc}(\sigma(T))$

$$\begin{array}{rccc} f(T): & D_c(T) & \to & D_c(T) \\ & x & \mapsto & \lim\limits_{N\to+\infty}(f\mathbf{1}_{[-N,N]})(T)(x) \end{array}$$

On remarque, à l'aide du théorème de convergence dominée, que si f est bornée alors cette définitions est compatible avec la précédente sur D_c. On a le théorème suivant

Théorème 10.3.2 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint de domaine dense. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_T: & \mathcal{B}_{loc}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(D_c) \\ & f & \mapsto & f(T) \end{array}$$

vérifie est un $*$-morphisme vérifiant $T = \Phi_T(t \mapsto t)$.

Preuve :

Montrons tout d'abord que la définition est cohérente avec le calcul fonctionnel borné. Soit f une fonction borélienne bornée et $x, y \in D_c$ alors

$$\begin{aligned} \langle f(T)x, y\rangle &= \lim_{N\to+\infty}\langle(\mathbf{1}_{[-N,N]}f)(T)x, y\rangle \\ &= \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} f(t)\, d\mu^T_{x,y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\mu^T_{x,y} = \langle f(T)x, y\rangle, \end{aligned}$$

le passage à la limite est justifié par le théorème de convergence dominée puis que tous les $\mu^T_{x,y}$ sont de mesure finie.

D'autre part, Soit f une fonction borélienne localement bornée pour $x, y \in D_c$ on a

$$\begin{aligned} \langle \overline{f}(T)x, y\rangle &= \lim_{N\to+\infty}\langle(\overline{\mathbf{1}_{[-N,N]}f})(T)x, y\rangle \\ &= \lim_{N\to+\infty}\langle(\mathbf{1}_{[-N,N]}f)(T)^*x, y\rangle \\ &= \lim_{N\to+\infty}\langle x, (\mathbf{1}_{[-N,N]}f)(T)y\rangle = \langle x, f(T)y\rangle, \end{aligned}$$

donc Φ_T est compatible avec l'adjoint. Soit f, g deux fonction borélienne localement bornées et $x \in D_c$, on a

$$\begin{aligned}(fg)(T)(x) &= \lim_{N\to+\infty}(fg\mathbf{1}_{[-N,N]})(T)(x)\\ &= \lim_{N\to+\infty}((f\mathbf{1}_{[-N,N]})(g\mathbf{1}_{[-N,N]}))(T)(x)\\ &= \lim_{N\to+\infty}((f\mathbf{1}_{[-N,N]})(T)(g\mathbf{1}_{[-N,N]}))(T)(x)\\ & f(T)(g(T)(x)),\end{aligned}$$

on peux bien passer à la limite car la suite est constante à partir d'un certain rang. Ce qui prouve que Φ_T est un $*$-morphisme.

Enfin

$$\Phi_T(t \mapsto t)(x) = \lim_{N\to+\infty}(t\mathbf{1}_{[-N,N]})(T)(x) = \lim_{N\to+\infty}(\mathbf{1}_{[-N,N]}(T))(T(x)) = T(x),$$

ici on a utilisé le fait que $T(x) \in D_c$ pour passer à la limite. ■

Exercise 10.3.3 Donner un sens à la formule

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\mu^T(\lambda).$$

Exercise 10.3.4 A l'aide de la mesure spectral démontrer qu'il existe une mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que T est équivalent à la $f \mapsto gf$ de $\{f \in L^2(\mathbb{R}, \mu) \,|\, gf \in L^2(\mathbb{R}, \mu)\}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, c'est-à-dire le théorème 10.3.3.

Exercise 10.3.5 Montrer qu'un opérateur T auto-adjoint est borné si et seulement si son spectre est borné.

10.3.2 Deuxième version

On conclut ce chapitre en donnant une deuxième approche du théorème spectral qui s'appuie sur le théorème spectrale pour les opérateurs normaux bornés. Ici la mesure spectrale est construite *a posteriori*.

On démontre déjà un résultat préliminaire sur la résolvante d'un opérateur auto-adjoint.

Proposition 10.3.1 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint. On a*

i) $(T+i)^{-1}$ *et* $(T-i)^{-1}$ *commutent,*

ii) $(T-i)^{-1}$ *est l'adjoint de* $(T+i)^{-1}$ *et réciproquement.*

Preuve :

i) C'est une conséquence immédiate de la formule de la résolvante.

ii)C'est une simple conséquence de l'exercice 10.1.8. □

On vient donc de démontrer que $R(i)$ est un opérateur normal. D'après le théorème 9.8.6, il existe un espace mesuré fini (X,μ), une application unitaire $U : H \to L^2(X,\mu)$ et $g \in \mathcal{B}(X,\mu)$ bornée tels que

$$UR(i)U^{-1} = M_g$$

On remarque que $\{x \,|\, g(x) = 0\}$ est μ-négligeable car $R(i)$ est injective. On peut donc définir $f \in \mathcal{B}(X,\mu)$ par

$$f = \frac{1}{g} + i.$$

Ce qui nous donne l'opérateur (non-borné)M_h de domaine $\{f \in L^2(X,\mu) \,|\, gf \in L^2(X,\mu)\}$, tel que

$$U^{-1}TU = M_f.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 10.3.3 (Théorème spectral) *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint de H. Alors il existe un espace mesuré fini (X,μ), une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ et une isométrie $U : H \to L^2(X,\mu)$ tels que $UTU^{-1} = M_f$.*

Exercice 10.3.1 *Ecrire les détails de la preuve du théorème 10.3.3.*

Exercice 10.3.2 *Définir un calcul fonctionnelle borélien à l'aide du théorème 10.3.3 de manière à retrouver le théorème 10.2.2 .*

10.4 Un exemple : l'équation de Schrödinger 1D

10.4.1 L'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$

Théorème 10.4.1 *L'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec le domaine $H^2(\mathbb{R})$ est un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mathbb{R})$.*

Preuve :
En fait on peut ramener l'étude de cet opérateur à celle de $i\frac{d}{dx}$. Or d'après l'exercice 10.1.2 on sait que cet opérateur avec le domaine $H^1(\mathbb{R})$ est auto-adjoint. On a le résultat en passant au carré. ■

Théorème 10.4.2 *L'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec le domaine $H^2(\mathbb{R})$ a pour spectre $[0, \infty[$ et n'a pas de valeur propre.*

Preuve :
On montre facilement en résolvant l'équation $-f'' = \lambda f$ que cet opérateur n'a pas de valeur propre. D'autre part comme il est de la forme TT^*, il est clair qu'il est positif et que son spectre est inclus dans $[0, \infty[$. Maintenant on va utiliser le théorème 10.1.2 pour montrer que le spectre est exactement $[0, +\infty[$. Il faut donc construire pour tout λ une suite de fonction f_n telle que $\|f_n\|_2 = 1$ et tel que $\|f_n'' + \lambda f_n\| \to 0$. On vérifie facilement que

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{-x^2}{n^2} + i\sqrt{\lambda}x},$$

convient. ■

10.4.2 L'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + q$

Soit q une fonction définiesur $\mathbb{R}$, on pose $D(Q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \,|\, qf \in L^2(\mathbb{R})\}$, on définit l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} Q: & D(Q) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & \text{f} & \mapsto & qf \end{array}$$

Exercice 10.4.1 *L'opérateur Q de domaine $D(Q)$ est auto-adjoint.*

Théorème 10.4.3 *Si $q \in L^2(\mathbb{R})$ alors $H^2(\mathbb{R}) \subset D(Q)$ et le spectre essentielle de $-\frac{d^2}{dx^2} + q$ est $[0, \infty[$.*

Preuve :
On remarque que d'après les injection de Sobolev on $H^2(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ d'ou l'inclusion des domaine. D'autre part Rellich-Kondrakov nous assure que l'on peut extraire de toute suite bornée dans $H^2(\mathbb{R})$ une suite qui converge dans $L^\infty(\mathbb{R})$, d'où la compacité de Q, le spectre essentiel est donc égal au spectre de $-\frac{d^2}{dx^2}$, c'est à dire $[0, \infty)$. ■

Exercise 10.4.1 Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans L^∞_{loc} telle que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$, Montrer que $\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint et son spectre est discret. En particulier il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de $\Delta + H$.

10.5 Application au flot d'opérateur

On peut alors comme pour les opérateurs bornés définir une mesure spectrale à valeurs dans les projections orthogonales en posant

$$\mu^T(E) = \mathbf{1}_E(T).$$

Mais on peut aussi définir l'exponentiation e^{iT} pour un opérateur non-borné auto-adjoint alors que la méthode standard en passant par les séries ne peut avoir de sens étant donné qu'on ne peut même pas définir la norme de l'opérateur. Si on suppose de plus que T est positif, on peut également définir e^{-tT} et $e^{it\sqrt{T}}$ pour t. Les paragraphes suivants proposent une études de ces opérateurs.

10.5.1 Equation de la chaleur

Théorème 10.5.1 *Soit T un opérateur auto-adjoint positif alors pour tout $t \geq 0$ on pose $C(t) = e^{-tT}$. On a alors*

i) $C(t)$ est un opérateur borné auto-adjoint de norme au plus 1,

ii) $C(0) = Id$ *et* $C(t+s) = C(t)C(s)$ *pour tout* $t, s \geq 0$,

iii) $t \mapsto C(t)$ *est continue pour la norme d'opérateur,*

iv) Pour tout $x \in D(T)$ *on a* $\lim_{t \to 0} \dfrac{C(t)x - x}{t} = -T(x)$.

Preuve :

i) est une simple conséquence du faite que le spectre de T est dans $\mathbb{R}^+$ et que la norme sup de l'exponentielle vaut 1 sur $\mathbb{R}^+$.

ii) est une conséquence du fait le calcul fonctionnelle soit un morphisme d'algèbre.

iii) Il suffit de démontrer la continuité en 0 d'après la propriété de semi groupe. Or c'est une conséquence du théorème de convergence dominé.

iv) Soit $x \in D(T)$ et $y \in D(T)$, on a

$$\left\langle y, \frac{C(t)x - x}{t} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-t\lambda} - 1}{t} d\mu_{y,x}(\lambda).$$

C'est donc également une conséquence du théorème de convergence dominé mais il faut utiliser le v) du théorème 10.2.2 pour s'assurer la condition de domination. ■

On va maintenant établir la réciproque.

Théorème 10.5.2 *Soit* H *un espace de Hilbert et* $t \mapsto C(t)$ *une famille d'opérateur vérifiant i)-iii) du théorème précédent. Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint et positif* T *tel que* $C(t) = e^{-tT}$.

Preuve :

L'unicité est une conséquence du iv) du théorème précédent.

En s'inspirant de l'identité

$$\frac{1}{1+x} = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-tx} e^{-t}\, dt,$$

on pose

$$R = \int_{\mathbb{R}^+} C(t)e^{-t}\,dt.$$

Alors on vérifie que R est un opérateur borné, positif, auto-adjoint de norme au plus 1 qui commute avec tous les $C(t)$. On remarque facilement que R est injectif, et donc puisqu'il est auto-adjoint, son image est nécessairement dense. Alors $T = R^{-1} - Id$ définit un opérateur non-borné auto-adjoint qui commute avec les $C(t)$. Soit $x \in D(T) = ImR$, $x = R(y)$, on a alors

$$\langle T(x), x\rangle = \langle y, R(y)\rangle - \langle R(y), R(y)\rangle = \langle R(y) - R^2(y), y\rangle.$$

Comme le spectre de R est inclus dans $[0,1]$, $R(Id - R) = (t(1-t))(R)$ est positif puisque la fonction $t(1-t)$ est positive sur le spectre de R. Finalement T est bien positif. On peut donc définir $D(t) = e^{-tT}$.

Enfin, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}C(t)R(x) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty C(t+s)e^{-s}\,ds\right)(x) = \frac{d}{dt}\left(e^t\int_t^\infty C(s)e^{-s}\,ds\right)(x)\\ &= (C(t)R - C(t))(x) = -TC(t)R(x).\end{aligned}$$

Donc D et C vérifient les même équations sur $D(T)$, on conclut que $D = C$ sur $D(T)$ en calculant simplement $\frac{d}{dt}\|C(t)x - D(t)x\|^2$, puis on conclut que $C = D$ par continuité et densité de $D(T)$. ■

Le théorème précédent nous fournit un critère, très utile en pratique, pour savoir quand un opérateur est auto-adjoint.

Théorème 10.5.3 *Soit T un opérateur symétrique positif et défini. Si l'équation*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Tu \ \ sur\ \mathbb{R}^+ \\ u(0) = x \end{cases},$$

admet une solution C^1 à valeurs dans $D(T)$ pour tout $x \in D(T)$, alors T est essentiellement auto-adjoint.

Preuve :

Tout d'abord on remarque que chaque u est unique. En effet si u_1 et u_2 vérifient la même équation alors $v = u_1 - u_2$ vérifie

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -Tv \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ v(0) = 0 \end{cases}.$$

Or comme T est positif on a

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 \leq 0 \tag{10.10}$$

et donc $v = 0$.

On peut alors définir $S(t)x = u(t)$ sur $D(T)$. Tout d'abord on remarque $\|S(t)\| \leq 1$ d'après (10.10). On peut donc étendre $S(t)$ en un opérateur borné. Reste à vérifier qu'il est auto-adjoint pour appliquer le théorème précédent, or pour tout $x, y \in D(T)$ on

$$\frac{d}{dt}\left(\langle S(t)x, y\rangle - \langle x, S(t)y\rangle\right) = 0,$$

car T est symétrique. Donc par continuité de $S(t)$ et densité de $D(T)$, on a le résultat attendu. Il existe donc T' auto-adjoint positif tel que $S(t) = e^{-tT'}$ et de plus $T \subset T$'. Reste à montrer que $T' = \overline{T}$. Il suffit de montrer que $D(T)$ est dense dans $D(T')$ pour le produit scalaire $\langle x, y\rangle + \langle T'x, T'y\rangle$. Dans le cas contraire soit y un vecteur orthogonal à $D(T)$ non trivial, on a pour tout $x \in D(T)$,

$$\langle x, y\rangle + \langle Tx, T'y\rangle = 0$$

donc on a pour tout $t \geq 0$,

$$\langle x, S(t)y\rangle = -\langle Tx, T'S(t)y\rangle = -\langle x, (T')^2 S(t)y\rangle,$$

c'est à dire $y(t) = \langle x, S(t)y\rangle$ vérifie

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y(t).$$

Or on a $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, d'où

$$\langle x, y\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in D(T),$$

ce qui est une contradiction avec la densité de $D(T)$ et achève la preuve du théorème. ■

10.5.2 Equation de Schrödinger

En fait l'exponentielle définit même un semi-groupe comme dans le cas borné, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 10.5.4 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur non-borné auto-adjoint. On pose $U(t) = e^{itT}$, alors on a*

i) $U(t)$ *est unitaire pout tout* t.

ii) $t \mapsto U(t)$ *est continue pour la norme d'opérateur.*

iii) $U(0) = Id$ *et pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$ *on a* $U(t+s) = U(t)U(s)$,

iv) pour tout $x \in D(T)$ *on a* $\lim_{t\to 0} \dfrac{U(t)(x) - x}{t} = iT(x)$,

Preuve :

Reprendre la preuve pour le flot de la chaleur . ■

Ce théorème admet également une réciproque. La preuve de la réciproque repose sur le théorème suivant, dont on trouvera une preuve dans [Tao11a]

Théorème 10.5.5 (Théorème de Bochner) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ positive et semi-définie, c'est-à-dire $f(x) = \overline{f(-x)}$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\nu(x) d\overline{\nu}(y) \geq 0,$$

pour toute mesure complexe ν. Alors il existe une mesure finie μ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\xi}\, d\mu(\xi) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 10.5.6 (théorème de Stone) *Soit $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d'opérateurs vérifiant les assertions i)-iii) du théorème 10.5.4, alors il existe un unique opérateur non-borné auto-adjoint T tel que $U(t) = e^{itT}$.*

Idée de la preuve :

On remarque tout d'abord que le iv) du théorème 10.5.4 donne l'unicité.

On pose pour tout $x \in H$,

$$F(t) = \langle U(t)x, x\rangle,$$

d'après le théorème de Bochner il existe une mesure finie telle que

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu_x(t).$$

On note alors $\mu_{x,y}$ la mesure dépolarisée. On définit une mesure spectrale comme suit : soit E un borélien de $\mathbb{R}$ on définit $\mu(E)$ l'application de H tel que

$$\langle x, \mu(E)(y)\rangle = \int_E d\mu_{x,y}.$$

On vérifie que c'est une mesure à valeur dans les projections orthogonales. On pose alors $D = \{x \in H \mid \int t^2 d\mu_x < \infty\}$ et on définit $T : D \to H$ par

$$T = \int_{\mathbb{R}} t\, d\mu(t),$$

et on vérifie que T est bien l'opérateur auto-adjoint cherché. ■

Exercice 10.5.1 *Soit $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ et $U_x(t)$ l'opérateur de translation défini par*

$$U_x(t)(\phi)(y) = \phi(y + tx).$$

Vérifier que cette famille d'opérateurs vérifie les hypothèses du théorème de Stone. Montrer que $U_a(t) = e^{itA}$ avec

$$A(\phi) = -i \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

10.5.3 L'equation des ondes

On considère un opérateur non-borné $T : D \to H$ auto-adjoint positif. On cherche à résoudre l'équation suivante

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -T(u).$$

En fait on peut réécrire l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\Omega^2(u),$$

où $\Omega = \sqrt{T}$. Alors les solution sont données par $u(t) = e^{it\Omega}$ et $v(t) = e^{-it\Omega}$, plus précisément on a :

Théorème 10.5.7 *Soit T un opérateur auto-adjoint positif. Pour tout $x \in D(T)$ et $y \in D(\sqrt{T}) \subset D(T)$, alors*

$$u(t) = \cos\left(t\sqrt{T}\right)x + \frac{\sin\left(t\sqrt{T}\right)}{\sqrt{T}}y$$

est l'unique solution C^2 de l'équation suivante

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = Tu \\ u(0) = x \\ u'(0) = y \end{cases}.$$

Preuve :
On commence par prouver l'unicité. Pour cela on pose $E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|^2 + \|\sqrt{T}u(t)\|^2\right)$. et on remarque $E'(t) = 0$ si $\frac{d}{dt}\sqrt{T}u(t)$ existe.
Soit $R > 0$ alors on pose $P_R = \mathbf{1}_{[-R,R]}(T)$ alors pour tout $x \in D(T)$ $P_R(x) \in D(\sqrt{T})$. On pose alors $U_R(t) = P_R u(t)$ où u est une solution de l'équation avec les conditions initiales nulles. Alors u_R est C^2, pour tout t on a $u_R(t) \in D(\sqrt{T})$ et $\frac{d}{dt}\sqrt{T}u_R(t)$ existe. Enfin u_R vérifie

$$\frac{d^2u_R}{dt^2} = P_R\frac{d^2u}{dt^2} = Tu_R.$$

Donc on peut appliquer la conservation de l'énergie et donc $\frac{du_R}{dt} = 0$ d'ou $u_R \equiv 0$, en passant à la limit quand R tend vers l'infinie on a le résultat souhaité.

Pour l'existence, il faut calculer les dérivées à l'aide du taux d'accroissement et des formules classiques de trigonométrie. Les passage à la limite sont assuré par le théorème de convergence dominée. ■

Comme dans le cas classique on peut ramener cette équation à une équation d'ordre 1 quitte à complexifier un peu l'espace ambiant. Pour simplifier, on suppose que $Null(\Omega) = \{0\}$. Pour cela on pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \frac{du}{dt}(t) \end{pmatrix}.$$

Alors X doit verifier $\frac{dX}{dt} = SX$, où

$$S = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Formellement on obtient

$$e^{tS} = \begin{pmatrix} cos(\Omega t) & \frac{sin(\Omega t)}{\Omega} \\ -\Omega sin(\Omega t) & cos(\Omega t) \end{pmatrix}.$$

On pose alors $K = D(\Omega) \oplus H$ muni du produit scalaire $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle \Omega x_1, \Omega x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$. Alors on obtient un espace de Hilbert et e^{tS} est une transformation unitaire. Dés lors $\frac{d}{dt} e^{tS}(x, y)$ existe si et seulement si $x \in D(\Omega^2) = D(T)$ et $y \in D(\Omega)$. On pose alors $D(S) = D(T) \oplus D(\Omega)$ et

$$S = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

est alors le générateur du semi groupe unitaire e^{tS} il est donc anti-adjoint : $S = iR$ avec R auto-adjoint d'après le théorème de Stone, et on a bien

$$\frac{dX}{dt} = iRX \text{ pour tout } t.$$

10.6 Le laplacien suite et fin

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $H = L^2(\Omega)$ et le laplacien

$$\Delta f = -\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

avec $C_c^\infty(\Omega)$ comme domaine.

10.6.1 Deux exemples

On va s'intéresser à deux cas particulier $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\Omega : (0, 1)^n$. Dans le premier cas on a la description suivante.

Théorème 10.6.1 *la fermeture du Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ est unitairement équivalente à $M_{(2\pi)^2 \|x\|^2}$. En particulier il est essentiellement auto-adjoint, son spectre est continu et égal à $[0, \infty[$.*

Dans le cas du cube la situation est tout autre puisque le spectre est discret. En fait il y a plusieurs extension possible de Δ en un opérateur essentiellement auto-adjoint, ici on présente l'extension de Dirichlet.

Théorème 10.6.2 *Soit* $D_d = \{f_{|(0,1)^n} \mid f \in C^\infty([0,1]^n)$ *et* $f = 0$ *sur* $\partial(0,1)^n\}$, *alors* (D_d, Δ) *est essentiellement auto-adjoint, son spectre est ponctuel et égal à*

$$\{4\pi^2(k_1^2 + \cdots + k_n^2 \mid k_i \in \mathbb{Z}\}.$$

De plus la multiplicité de $\lambda = 4\pi^2(k_1^2 + \cdots + k_n^2$ *est égale à* $\#\{(k_1, \ldots, k_n) \mid 4\pi^2(k_1^2 + \cdots + k_n^2 = \lambda\}$.

Exercice 10.6.1 *Déduire de ce qui précède, l'estimé suivante pour n-ième valeur propre du laplacien sur le cube avec la condition de Dirichlet,*

$$\frac{1}{C} C k^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_k \leq C k^{\frac{2}{n}}, \tag{10.11}$$

pour $C > 0$.

Exercice 10.6.2 *A l'aide de l'exercice précédent et du principe du min-max en déduire une estimé semblable pour tout ouvert borné* Ω.

10.6.2 Fonction de Green et Noyau de la chaleur

Dans cette section on suppose que $H = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$. Soit L un opérateur différentiel de domaine $D(L) \subset H$. On cherche un opérateur $K \in \mathcal{B}(H)$ tel que

$$L \circ K = K \circ L = Id.$$

On va chercher K sous la forme d'un opérateur à noyau T_G. Alors G doit nécessairement vérifier

$$\begin{aligned} L_x G(x,y) &= \delta(x-y) Id, \\ L_y^* G(x,y) &= \delta(x-y) Id. \end{aligned}$$

Une telle fonction s'appellera fonction de Green de L. On pourra trouver des exemples de détermination explicite de G pour des opérateurs définis

sur $\mathbb{R}$, [Sim05]. Ici nous donnons une expression de la fonction de Green du laplacien et de l'équation de la chaleur en fonction des fonctions propres et des valeurs propres du laplacien.

Le laplacien étant auto-adjoint, il suffit de trouver $G \in L^2_0(\Omega \times \Omega)$, symétrique, telle que

$$\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y)$$

Or d'après la section 9.5, le laplacien possède une base hilbertienne de vecteur propre (ϕ_k). On notera λ_k les valeurs propres associées. On a alors nécessairement

$$\langle G(x, y), \phi_k(x) \rangle = \frac{\phi_k(y)}{\lambda_k}$$

Ce qui nous amène à poser (formellement)

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}}{\lambda_k}.$$

Malheureusement au vu de (10.11), il n'est pas possible d'obtenir une convergence forte de cette série dés que $d > 1$.

Exercice 10.6.3 *Montrer que pour le noyau de la chaleur on a formellement*

$$P(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x)\phi_k(y).$$

On a dans le cas du noyau de la chaleur convergence forte de la série.

Théorème 10.6.3

$$p(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)},$$

où la convergence est uniforme sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [\varepsilon, +\infty[$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

Chapitre 11

La physique quantique, une théorie d'opérateurs...

Dans ce dernier chapitre, notre but est de donner une très brève introduction au formalisme mathématique de la physique quantique. Pour aller plus loin, on pourra consulter [Hal13].

Chapitre en construction, lecture fortement déconseillée.

11.1 Opérateurs position et moment

On considère une particule se déplaçant sur la droite réel. Elle est alors représentée par sa fonction d'onde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (pour commencer on se place dans le cas stationnaire). Le réel $|\psi(x)|^2$ représente alors la probabilité que la particule se situe en x, on a donc naturellement

$$\int |\psi(x)|^2 \, dx = 1.$$

On définit donc l'espérance de la position comme

$$E(x) = \int x|\psi(x)|^2 \, dx.$$

L'idée centrale de la théorie quantique (mathématique) est d'exprimer des quantités comme la position, la vitesse, l'énergie... comme le produit scalaire de la fonction d'onde et de son image par un opérateur. L'espace naturel sur

lequel on souhaite se placer est alors $L^2(\mathbb{R})$, et si on note X la multiplication par x, alors on a

$$E(x) = \langle X\psi, \psi \rangle.$$

On remarquera que X est un opérateur non-borné.

Maintenant, on aimerait définir le moment d'une particule. De Broglie pour expliquer le spectre de l'atome d'hydrogène fait l'hypothèse suivante : si la fonction d'onde a une fréquence spatiale égale à k alors son moment est $\hbar k$. Ce qu'on pourrait traduire mathématiquement par la fonction $x \mapsto e^{ikx}$ a pour moment $\hbar k$. Bien sûr $x \mapsto e^{ikx}$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$, mais pour simplifier on va supposer momentanément que notre particule se déplace sur le cercle S^1. On considère alors les $\left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ qui forment une base hilbertienne de $L^2(S^1)$. Soit $\psi \in L^2(S^1)$ telle que

$$\int |\psi(x)|^2 \, dx = 1,$$

elle se décompose comme suit,

$$\psi = \sum_k a_k e^{ikx},$$

et on définit alors son moment comme

$$\sum_k \hbar k |a_k|^2.$$

On voit alors qu'un bon choix d'opérateur semble être $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$.

Si on revient au cas de la droite réel, soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'espace de Schwartz, alors on a

$$\langle P(\psi), \psi \rangle = \int \hbar \xi \hat{\psi}(\xi) \, d\xi.$$

Définition 11.1.1 *Sur $L^2(\mathbb{R})$, on définit les opérateurs* **position** *et* **moment** *X et P comme deux opérateurs non-bornés dont le domaine est $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et qui vérifient*

$$X(\psi)(x) = x\psi(x) \text{ et } P(\psi)(x) = -i\hbar \frac{d\psi}{dx}.$$

Exercice 11.1.1 *Vérifier que X et P sont symétriques .*

En fait en théorie quantique les opérateurs joue le rôle d'observable et donc sont forcément (essentiellement) auto-adjoints puisque l'on n'observe que des quantités réels.

Exercice 11.1.2 *Vérifier que $XP - PX = i\hbar Id$.*

Plus généralement dans $\mathbb{R}^n$, les coordonnées des opérateurs positon et moment sont

$$X_j\psi = x_j\psi,$$

et

$$P_j\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\psi}.$$

Il vérifie alors les relations de commutations suivantes

$$[X_j, X_k] = 0,$$

$$[P_j, P_k] = 0,$$

et

$$[X_j, P_k] = \delta_{ik} i\hbar Id,$$

où si A et B sont deux opérateurs $[A, B] = AB - BA$ est leur commutateur. Enfin on définit une troisième famille d'opérateur

$$J_{ik} = X_j P_k - X_k P_j,$$

appelé **moment angulaire**.

11.2 Les axiomes de base de la théorie quantique

Axiome 1 : L'état du système est représenté par un vecteur unitaire d'un espace de Hilbert H. Deux états représentés par des vecteurs colinéaires représentent le même état physique.

Axiome 2 : A chaque fonction f de l'espace des phases classique, on associe un opérateur auto-adjoint $\hat{f}$ qui agit sur H.

Axiome 3 : Si le système se situe dans un état décrit par un vecteur unité ψ dans H, alors la mesure de f est donnée par

$$\langle \psi, \hat{f}\psi \rangle.$$

C'est ici qu'on remarque que deux vecteurs unitaires qui sont proportionnels ne sont pas distincts du point de vue des quantités observables.

Notation : On notera

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \langle A \rangle_\psi.$$

Enfin supposons que $\hat{f}$ admette une base hilbertienne de vecteurs propres $\{e_i\}$ associés aux valeurs propres $\{\lambda_i\}$ et que ψ est un vecteur unitaire de H qui se décompose comme

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

Alors l'observation de f, sera toujours un λ_i que l'on observera avec une probabilité $|a_i|^2$.

Exercice 11.2.1 *Montrer que pour tout opérateur auto-adjoint A le théorème spectrale nous assure de l'existence d'une mesure μ_ψ^A sur $\mathbb{R}$ qui est la probabilité de mesuré $\langle A \rangle_\psi$.*

Axiome 4 (Effondrement de la fonction d'onde) : Supposons qu'un système soit dans un état ψ et que l'on mesure f et que le résultat est λ alors le système se positionne immédiatement dans un état ψ' de sorte que

$$\hat{f}(\psi') = \lambda\psi'.$$

On peut penser la fonction d'onde comme ne représentant pas le système mais plutôt comme la probabilité que le système soit dans un état donné. Et alors l'effondrement de la fonction d'onde peut être vu comme une simple probabilité conditionnelle. En d'autre terme toute future mesure doit être consistante avec le résultat d'une mesure passé. Ce n'est donc pas la particule qui possède un état discontinue mais notre information qui est discontinue.

11.3 L'équation de Schrödinger

Jusqu'à présent nous avons considéré un état stationnaire, dans ce qui suit le temps rentre en jeu. Dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, l'évolution du système est régie par l'énergie hamiltonienne, donnée par

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}\sum_j p_i^2 + V(x).$$

En effet la troisième loi de Newton s'écrit alors

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j},$$
$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

En définissant le crochet de Poisson de deux fonctions f et g définis sur l'espace des phases par

$$\{f,g\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right),$$

on peut reformuler la troisième loi de Newton, comme suit : pour toute fonction f définie sur l'espace des phases, le long d'une trajectoire on a

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\}.$$

D'après l'axiome 2, il existe un opérateur $\hat{H}$ correspondant à H.Typiquement, si $H = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2 + V(x)$ alors

$$\hat{H} = \sum_j \frac{P_j^2}{2m} + V(X)$$

où P_j est la j-ième coordonnées de l'opérateur moment : $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$, et $V(X)$ la multiplication par $V(x)$.

En s'inspirant de l'hypothèse de de Broglie, qui nous dit que l'énergie d'une particule dont la fréquence spatial est k est $\hbar k$. On peut faire l'hypothèse que l'énergie d'une particule de fréquence temporel ω sera $\hbar\omega$, ce qui donne

$$\psi(t) = e^{i\omega t}\psi_0 = e^{-\frac{E}{\hbar}}\psi_0.$$

L'équation différentielle vérifiée par ψ est alors

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{E}{i\hbar}\psi.$$

De cette heuristique on déduit notre dernier axiome.

Axiome 5 : L'évolution de la fonction d'onde du système est régie par l'équation de Schrödinger

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\psi.$$

Plus généralement, les quantités observables vérifient

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi = \left\langle \frac{1}{i\hbar}[A, \hat{H}]\right\rangle_\psi,$$

où A est un opérateur auto-adjoint.

On remarque qu'une quantité physique est constante le long d'une trajectoire dés qu'elle commute avec l'hamiltonien.

Une solution de l'équation de Schrödinger pour une condition initiale ψ_0 est donné par $e^{\frac{-it\hat{H}}{\hbar}}\psi_0$. Toutefois, le sens du calcul fonctionnelle de $\hat{H}$ n'étant pas très explicite, on s'intéressera alors au vecteur propre de $\hat{H}$, c'est à dire au solution de

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

que l'on appellera **l'équation de Schrödinger stationnaire.**

11.4 L'interprétation d'Heisenberg

On a vu avec l'axiome 4 sur l'effondrement de la fonction d'onde que, d'une certaine manière, on peut considérer que l'état de la particule n'est pas modifié par l'observation mais que c'est notre information qui est modifiée. Lorsque l'on regarde la particule évoluer, on peut adopter un point de vue similaire en supposant que la fonction d'onde est fixe et que c'est l'observable qui évolue, donc l'opérateur auto-adjoint. Dans ce cas l'équation d'évolution est

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, \hat{H}].$$

Si on applique ce point de vue à l'opérateur position et moment on a

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \frac{P}{m},\\ \frac{dP}{dt} &= -V'(X).\end{aligned}$$

Si, en plus, on suppose que la particule est libre, i.e. $V \equiv 0$, alors on retrouve les trajectoires classiques

$$\langle X(t)\rangle_{\psi_0} = \langle X\rangle_{\psi_0} + t\langle P\rangle_{\psi_0}.$$

11.5 Solution de l'équation de Schrödinger libre sur $\mathbb{R}$

L'équation de Schrödinger libre sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

On commencer chercher une solution sous la forme

$$\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega(k)t)},$$

où k est la fréquence spatial et ω la fréquence temporel. D'après (11.5), on a forcément

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Dès lors, à l'aide de la transformé de Fourier, on peut construire une solution pour toute condition initial assez décroissante, par exemple dans l'espace de Schwartz.

Exercice 11.5.1 *Démontrer que si $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors*

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_0(k) e^{ik\left(x-\frac{\hbar k}{2m}t\right)}\,dk$$

est une solution de (11.5).

$\frac{\hbar k}{2m}$ est la vitesse de phase.

11.6 L'oscillateur harmonique

On considéré l'opérateur hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}X^2 = \frac{1}{2m}(P^2 + (m\omega X)^2),$$

où k est une constante positive et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On pose alors

$$A = \frac{m\omega X + iP}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

l'opérateur d'incrément et son adjoint

$$A^* = \frac{m\omega X + iP}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

l'opérateur de décrément. On a alors

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(A^*A + \frac{1}{2}Id\right).$$

Le terme $\frac{1}{2}Id$ est une conséquence du fait que les opérateurs ne commutent pas : c'est la correction quantique. D'autre part on pourra déduire les propriétés spectrale de $\hat{H}$ de celle de A^*A.

A l'aide manipulation algébrique, on va montrer qu'un vecteur du noyau de A donne naissance à une base hilbertienne de vecteurs propres.

Attention : Ce qui suit n'est pas complètement rigoureux dans le sens où les domaines des opérateurs ne sont pas spécifiés. Il s'agit de calcul algébrique que l'on justifiera *a posteriori*.

Exercice 11.6.1 *Soit A et A^* défini plus haut. On supposera que les domaines des opérateurs seront compatibles à chaise étapes.*

1. *Montrer que*

$$[A, A^*] = Id,$$

$$[A, A^*A] = A$$

et

$$[A^*, A^*A] = -A^*.$$

2. *Soit ψ un vecteur propre de A^*A associé à la valeur propre λ. Montrer que*
$$A^*A(A\psi) = (\lambda - 1)A\psi,$$
et
$$A^*A(A^*\psi) = (\lambda + 1)A^*\psi.$$
3. *Montrer qu'il existe n tel que $A(A^n\psi) = 0$.*
4. *Soit $\psi_0 \in KerA$ tel que $\|\psi_0\| = 1$, on pose, pour $n \geq 0$,*
$$\psi_n = (A^*)^n\psi_0.$$
Alors pour tout $n, m \geq 0$, on a
$$\begin{aligned} &A^*\psi_n = \psi_{n+1}, \\ &A^*A\psi_n = n\psi_n, \\ &\langle \psi_n, \psi_m \rangle = n!\delta_{n,m}, \\ &A\psi_{n+1} = (n+1)\psi_n. \end{aligned}$$
5. *Montrer que si $dim(Ker\, A) = 1$ alors les $Vect(\{\psi_n\}_n)$ est dense dans H.*

Il suffit donc de trouver un élément du noyau de A pour décomposer $\hat{H}$.

On se place désormais en dimension 1. On a alors
$$A = \frac{m\omega x + \hbar\frac{d}{dx}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$
Un élément du noyau de A est donné par,
$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\pi m\omega}{\hbar}} e^{\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)}.$$
De plus, il est clair que le noyau est de dimension 1 et donc en appliquant A^*, on obtient une base hilbertienne de solutions.

Pour justifier ce qui vient d'être fait il faut vérifier que les opérateurs A et A^* sont bien définis tout au long du calcul. En fait si on considère que le domaine de A et A^* est l'espace de Schwartz, alors il est clair que cela reste stable en composant par A ou A^*. Il suffit alors de vérifier que l'élément du noyau est également dans l'espace de Schwartz, ce qui est également clair.

Exercice 11.6.2 *Déduire de tout ce qui précède que les fonctions*

$$\psi_n(x) = H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}exp^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x},$$

où H_n est la suite des polynôme de Hermite défini par

$$H_0(x) = 1$$

et

$$H_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2xH_n(x) - \frac{dH_n(x)}{dx}\right).$$

11.7 Le moment angulaire en mécanique quantique et la notion de spin

De l'importance de l'étude des représentations

Supposons qu'un hamiltonien soit invariant sous l'action d'un certain groupe. Dès lors les représentations unitaires de ce groupe dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ commutent avec l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$. En particulier les espaces propres de $\hat{H}$ sont invariants par la représentation. Si on peut par exemple décomposer notre espace en sous-représentation irréductible, on pourra considérablement simplifier la recherche des états propres.

Un des premier objet d'étude de la mécanique quantique étant les atomes, l'invariance par rotation intervient tout naturellement dans l'étude de telles configurations. Donc si le système est invariant par rotation alors, en décomposant $L^2(\mathbb{R}^3)$ en sous-représentation irréductible de $SO(3)$, on est ramené à chercher les états propres dans des sous-espace de la forme $L^2_r(\mathbb{R}^3) \times V_l$ où $L^2_r(\mathbb{R}^3)$ représente les fonctions radiales de $\mathbb{R}^3$ et V_l un espace de dimension finie, plus précisément les harmonique sphérique de degré l.

Avant d'aller plus loin, nous rappelons le principe fondamental du à Noether qui nous assure que toute invariance du système donne naissance à une quantité conservée. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Invariance et loi de conservation : le théorème de Noether

Théorème 11.7.1 (Noether) *voir Helein*

Par exemple l'invariance par translation (en espace) donne la lois de conservation du moment cinétique, l'invariance par translation (en temps) donne la conservation de l'énergie et l'invariance par rotation donne le moment angulaire.

Ces lois de conservation ont leur pendant quantique. En particulier si l'hamiltotien $\hat{H}$ est invariant par rotation alors $\hat{H}$ commute avec les opérateurs de moment angulaire, définis au XX.

Si $\hat{H}$ commute avec chaque composante du moment angulaire, alors chaque espace propre de $\hat{H}$ est invariant sous l'action du moment angulaire et donc donne une représentation de l'algèbre de Lie de $SO(3)$, notée $so(3)$. Donc la connaissance des représentations irréductibles de $so(3)$ permet de déterminer complètement la dépendance de la fonction d'onde et de ramener notre problème initial à résoudre une équation différentielle ordinaire.

On rappelle que le moment angulaire (classique) d'une particule de $\mathbb{R}^3$ est $J = x \wedge p$. Ce qui donne dans le cas quantique

$$\hat{J} = X \wedge P.$$

Bien sûr il s'agit d'un opérateur non borné. On remarque que si on pose

$$\tilde{J}_i = \frac{1}{\hbar} J_i,$$

alors on les relations de commutation suivantes

$$[\tilde{J}_1, \tilde{J}_2] = \tilde{J}_3, [\tilde{J}_2, \tilde{J}_3] = \tilde{J}_1, [\tilde{J}_3, \tilde{J}_1] = \tilde{J}_2.$$

On définit une représentation de $SO(3)$, $R \in SO(3)$ on associe un opérateur unitaire de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^3))$ par

$$\Pi(R)(\psi)(x) = \psi(R^{-1}x).$$

Or l'algèbre de Lie de $SO(3)$ est constitué des matrice antisymétrique dont voici une base

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans peine les relations de commutation suivantes

$$[F_1, F_2] = F_3,\ [F_2, F_3] = F_1,\ [F_3, F_1] = F_2.$$

De plus l'exponentielle réalise un morphisme injectif de $so(3)$ dans $SO(3)$. On a donc pour tout élément $f \in so(3)$ une famille à 1-paramètre d'opérateur, $t \mapsto \pi(e^{tF})$ qui vérifie les hypothèse du théorème de Stone. Il existe donc un opérateur non-broné anti-adjoint, noté $\pi(F)$, tel que

$$\pi(e^{tF}) = e^{t\pi(F)}.$$

De plus on remarque que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \subset D(\pi(F_k))$ et que

$$\tilde{J}_k = i\hbar\pi(F_k).$$

11.8 La Quantification

Le second axiome de la théorie dit que l'on doit pouvoir associer à toute fonction sur l'espace des phases un opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Une telle procédure est désignée sous le nom de *quantification*. Simplement en considérant l'opérateur position et moment en dimension 1, on voit où se situe la difficulté. En effet les fonctions position et moment commutent mais pas les opérateurs. Comment définir $\widehat{xp}$? Une idée naturel(mais pas canonique [1]) est de symétriser, en posant

$$\widehat{xp} = \frac{XP + PX}{2}.$$

Plus généralement, on peut définir la quantification de Weyl de toute fonction polynomiale en x et p par

$$\widehat{x^k p^l} = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sigma(X, \ldots, X, P, \ldots, P).$$

A continuer....

1. Le théorème de Groenewold suggère qu'il n'existe pas de quantification naturel, voir [Hal13] chapitre 13

Chapitre 12

Problèmes

Problème 12.0.1 (Fonction maximale de Hardy-Littlewood) *Dans cet exercice on ne considère que la mesure de Lebesgue.*

Pour toute fonction localement intégrable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on définit sa fonction maximale **centrée** *comme suit*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}(f): & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \sup\limits_{r>0} \dfrac{1}{|B(x,r)|} \displaystyle\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy, \end{array}$$

où $B(x,r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r et $|E|$ la mesure de l'ensemble E.

1. *Montrer que, pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\|\mathcal{M}(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

2. *Soit $d = 1$, $a < b$ et $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, calculer $\mathcal{M}(f)$ et tracer son graphe.*
3. *Montrer que si $\mathcal{M}(f)(x_0) = 0$, pour un $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors $f = 0$ presque partout.*

   Pour toute fonction localement intégrable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on définiesa fonction maximale **décentrée** *comme suit*

$$\begin{array}{rccl} M(f): & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \sup\limits_{x \in B(z,r)} \dfrac{1}{|B(z,r)|} \displaystyle\int_{B(z,r)} |f(y)|\, dy, \end{array} ,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des boules contenant x.

4. *Montrer que pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathcal{M}(f) \leq M(f)$.*
5. *Soit $d = 1$, $a < b$ et $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, calculer $M(f)$ et tracer son graphe.*
6. *Rappeler le théorème de recouvrement de Vitali.*
7. *Montrer qu'il existe une constante positive C_d, qui ne dépend que de la dimension, telle que*

$$|\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, M(f)(x) > t\}| \leq \frac{C_d}{t} \int_{|f| > \frac{t}{2}} |f(x)|\, dx,$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$.

8. *Montrer que M est sous-linéaire, c'est-à-dire que, pour tout $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

$$M(f + \lambda g) \leq M(f) + |\lambda| M(g).$$

9. *Soit $R > 0$ montrer qu'il existe $c_d > 0$ telle que*

$$\frac{R^d}{c_d(|x| + R)^d} \leq M(\mathbf{1}_{B(0,R)})(x) \leq \frac{c_d R^d}{(|x| + R)^d}$$

10. *En déduire que M n'est pas un opérateur borné de $L^1(\mathbb{R}^d)$.*
11. *En utilisant 7. et le fait que*

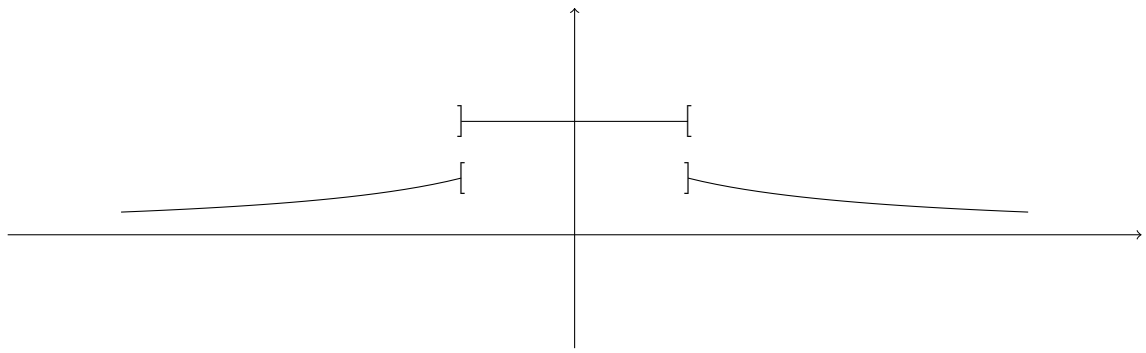
$$\|M(f)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{M(f)(x)} p t^{p-1}\, dt\, dx,$$

Montrer que, pour $p > 1$, M est un opérateur borné de L^p.

Solution 12.0.1

1. *Conséquence immédiate des propriétés de l'intégrale.*
2. *Si $x \in (a, b)$ alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ et donc $M(f)(x) \geq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} 1\, dt = 1$. D'autre part le 1) nous assure que cette inégalité est en fait une égalité. Si $x < a$ on a*

$$\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, dt = \begin{cases} 0 \ \ si\ r \leq a - x \\ \frac{r-a}{2r} \ \ si\ a - x \leq r \leq b - x \\ \frac{b-a}{2r} \ \ si\ r \geq b - x \end{cases}.$$



On vérifie aisément que le maximum de la fonction est atteint en $r = b - x$ *et que donc* $M(f)(x) = \frac{b-a}{2(b-x)}$ *si* $x < a$*. Par un raisonnent symétrique on montre que* $M(f)(x) = \frac{b-a}{2(a-x)}$ *si* $x > b$*. D'ou le graphe*

3. *Si* $\mathcal{M}(f)(x_0) = 0$ *pour un* $x_0 \in \mathbb{R}^d$*, alors pour tout* $r > 0$ *on a* $\int_{B(x_0,r)} |(f(y)|\, dy = 0$*. A l'aide du théorème de convergence monotone on peut passer à la limite et on a* $\int_{\mathbb{R}^d} |(f(y)|\, dy = 0$*, d'ou* $f = 0$ *presque partout .*
4. *On remarque simplement que* $\{B(x,r) \,|\, r > 0\} \subset \{B(y,r) \,|\, r > 0$ *et* $x \in B(y,r)\}$*. On obtient l'inégalité en passant au sup.*
5. *Si* $x \in (a,b)$ *alors pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit on a* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$ *et donc* $M(f)(x) \geq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} 1\, dt = 1$*. D'autre part, on remarque, comme au 1), que* $M(f) \leq \|f\|_\infty$*, ce qui nous assure que l'inégalité précédente est en fait une égalité.*

   Si $x < a$ *on a, soit* $r > 0$ *fixé, alors il est clair que*

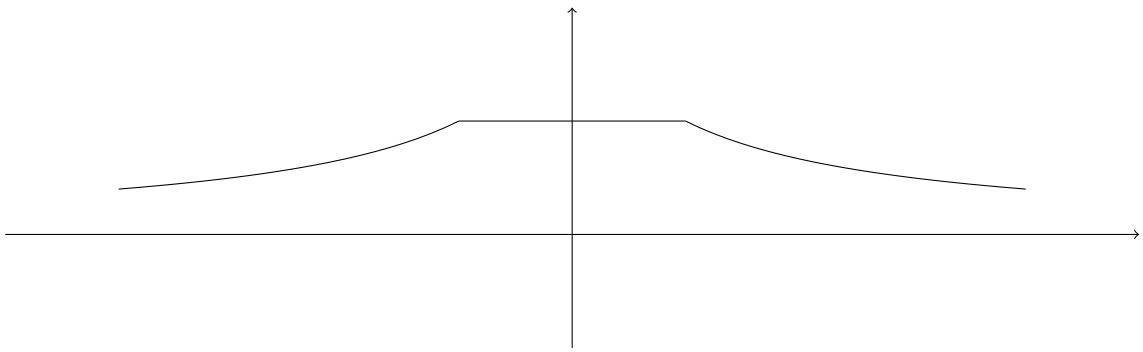
$$\sup_{y,\, x \in]y-r, y+r[} \int_{]y-r,y+r[} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, dt = \int_{]x,x+2r[} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, dt.$$

   Donc il suffit de calculer le sup sur r *de la quantité de droite.*

$$\frac{1}{2r}\int_x^{x+2r} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, dt = \begin{cases} 0 \text{ si } r \leq \frac{a-x}{2} \\ 1 + \frac{x-a}{2r} \text{ si } \frac{a-x}{2} \leq r \leq \frac{b-x}{2} \\ \frac{b-a}{2r} \text{ si } r \geq b-x \end{cases}.$$

   On vérifie aisément que le maximum de la fonction est atteint en $r = \frac{b-x}{2}$ *et que donc* $M(f)(x) = 1 + \frac{x-a}{b-x}$ *si* $x < a$*. Par un raisonnent*

symétrique on montre que $M(f)(x) = 1 + \frac{b-x}{x-a}$ *si* $x > b$. *D'ou le graphe*



6. *Recopier les notes de cours.*
7. *On adapte simplement la preuve du cours. Soit* $t > 0$ *et* $E_t = \{x \in U \mid M(f)(x) > t\}$. *Pour tout* $x \in E_t$ *il existe* $r_x > 0$ *tel que*

$$\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int_{B(x,r_x)} |f(y)| \, d\lambda(y) > t.$$

De plus, on a

$$|B(x, r_x)| < \frac{\int_{B(x,r_x)} |f(y)| \, d\lambda(y)}{t}.$$

Différence avec le cours : Il faut remplacer $\int_{B(x,r_x)} |f(y)| \, d\lambda(y)$ **par** $\int_{B(x,r_x)\cap\{y \mid |f(y)|>\frac{t}{2}\}} |f(y)| \, d\lambda(y)$**. Or**

$$\int_{B(x,r_x)} |f(y)| \, d\lambda(y) \leq \int_{B(x,r_x)\cap\{y \mid |f(y)|>\frac{t}{2}\}} |f(y)| \, d\lambda(y) + \frac{t}{2}|B(x, r_x)|,$$

d'ou

$$|B(x, r_x)| < \frac{\int_{B(x,r_x)} |f(y)| \, d\lambda(y)}{t} \leq \frac{\int_{B(x,r_x)\cap\{y \mid |f(y)|>\frac{t}{2}\}} |f(y)| \, d\lambda(y)}{t} + \frac{1}{2}|B(x, r_x)|.$$

Ce qui donne

$$|B(x, r_x)| \leq 2\frac{\int_{B(x,r_x)\cap\{y \mid |f(y)|>\frac{t}{2}\}} |f(y)| \, d\lambda(y)}{t}.$$

Soit K un compact de E_t, alors K est recouvert par un nombre finiede boules $(B(x_i, r_{x_i}))_{i=1}^N$. On applique le théorème de recouvrement de Vitali aux $(B(x_i, r_{x_i}))_{i=1}^N$. On a donc une famille de boules disjointes $(B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}))_{j=1}^M$, telle que

$$\begin{aligned}
|K| \leq \left|\bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_{x_i})\right| &\leq 3^d \left|\bigcup_{j=1}^M B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})\right| \\
&\leq 3^d \sum_{j=1}^M \left|B\left(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}\right)\right| \\
&\leq \frac{23^d}{t} \sum_{j=1}^M \int_{B\left(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}\right) \cap \{y \,|\, |f(y)| > \frac{t}{2}\}} |f(y)| \, d\lambda(y) \\
&\leq \frac{23^d}{t} \int_{\{y \,|\, |f(y)| > \frac{t}{2}\}} |f(y)| \, d\lambda(y),
\end{aligned} \tag{12.1}$$

ce qui achève la preuve, par régularité de la mesure de Lebesgue.

8. *Conséquence immédiate des propriétés de l'intégrale.*
9. *Tout d'abord on a*

$$\frac{1}{|B(x, R+|x|)|} \int_{B(x, R+|x|)} \mathbf{1}_{B(0,R)}(y) \, dy = \frac{R^d}{(R+|x|)^d},$$

d'ou la minoration par passage au sup. Pour la majoration on procède par cas. Si $|x| \geq 3R$ alors le rayon d'une boule contentant x et intersectant $B(0, R)$ est au moins égale à $|x| - R \geq \frac{R+|x|}{2}$, d'ou

$$\frac{1}{|B(y, r)|} \int_{B(y,r)} \mathbf{1}_{B(0,R)}(y) \, dy \leq \frac{R^d}{r^d} \leq \frac{2^d R^d}{(R+|x|)^d}.$$

Si $|x| < 3R$ alors

$$M(f)(x) \leq 1 \leq \frac{4^d R^d}{(|x| + R)^d},$$

ce qui prouve la question avec $c_d = 4^d$.

10. *Il suffit de remarquer que $\frac{1}{|x|^d} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout d.*

11. A l'aide de l'indication et du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\|M(f)\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{M(f)(x)} pt^{p-1}\, dt\, dx = \int_0^{+\infty} \int_{\{M(f)(x)>t\}} pt^{p-1}\, dx\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} |\{x \mid M(f)(x) > t\}| pt^{p-1}\, dt \leq C_d \int_0^{+\infty} \int_{\{x \mid |f(x)|>\frac{t}{2}\}} |f(y)|\, dy\, pt^{p-2}\, dt \\
&= C_d \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{2|f(y)|} |f(y)|\, pt^{p-2}\, dt\, dy = C_d \frac{p}{p-1} 2^{p-1} \|f\|_p^p,
\end{aligned} \tag{12.2}$$

ce qui prouve bien que M est un opérateur borné de L^p.

Problème 12.0.2 (Théorème de Rademacher) *Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant*

Théorème 12.0.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction localement lipschitzienne alors f est différentiable presque partout.*

1. *Montrer que l'on peut supposer que f est lipschitzienne et que $m = 1$.*

   On fera cette hypothèse dans toute la suite du problème.

2. *Soit $v \in S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$.*
   On montrera tout d'abord que

$$F_v^+(x) = \limsup_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \lim_{k\to+\infty} \sup_{0<t<\frac{1}{k}} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t},$$

   définit une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Puis on admettra qu'il en est de même pour

$$F_v^-(x) = \liminf_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \lim_{k\to+\infty} \inf_{0<t<\frac{1}{k}} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

   En déduire que $A_v = \left\{ x \mid \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \text{ n'existe pas} \right\}$ est mesurable.

3. *Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in S^{n-1}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = f(x+tv)$. C'est une fonction Lipschitz donc absolument continue, le théorème fondamental de l'analyse nous assure que cette fonction est dérivable presque partout.*

   Montrer que $A_v \cap L$ est de mesure nulle, où $L = \{x + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.

   En déduire que A_v est de mesure nulle.

4. *Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\phi(x)-\phi(x-tv)}{t}\, dx$$

5. *En déduire que, pour presque tout x, on a*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \langle \nabla f(x), v\rangle,$$

où $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$.

6. *Soit (v_k) une suite dense de S^{n-1}, on note*

$$E_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_k)-f(x)}{t} \text{ et } \nabla f(x) \text{ existent} \right\}$$

et

$$E = \bigcap_k A_k$$

7. *Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus E$ est de mesure nulle.*
8. *Montrer que f est differentiable en chaque point de E.*

Problème 12.0.3 (Principe du min-max) *Soit H un espace de Hilbert séparable* **de dimension infinie** *et A un opérateur non-borné auto-adjoint sur H.*

On dit que A est positif, si

$$\langle A(x), x\rangle \geq 0 \text{ pour tout } x \in D(A).$$

1. *Montrer que A est positif si et seulement si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$.*

   On suppose maintenant que A est borné inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe c tel que $A + cId$ soit positif.

2. *Montrer que le spectre de A est borné inférieurement et que $A - mId \geq 0$ où $m = \inf \sigma(A)$.*

   Dans le reste de l'exercice, on suppose que si $\lambda \notin \sigma(A)$ alors $(A - \lambda Id)^{-1}$ est compact. L'opérateur est dit à résolvante compacte. C'est le cas du laplacien sur un domaine borné avec la condition de Dirichlet.

3. *Montrer que l'ensemble des valeurs valeurs propres de A forme un ensemble discret de la forme*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots.$$

4. *Montrer que*

$$\lambda_1 = \inf_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2}$$

5. *En déduire que*

$$\lambda_i = \inf_{x \in V_i^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2}$$

   où $V_i = \oplus_{j=1}^{i-1} Ker(A - \lambda_j Id)$.

   On pose

$$\mu_i = \sup_{\substack{V, \\ dim(V)=i-1}} \inf_{x \in (D(A) \cap V^{\perp})\{0\}} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2}$$

où le suprémum est pris sur les sous-espaces V de dimension $i-1$.

On rappelle que si E est un borélien de $\mathbb{R}$, on peut définir l'opérateur $\mathbf{1}_E(A)$ et que c'est un projecteur orthogonal.

6. *Montrer que si $\mu < \mu_n$ alors $dim(Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A)) < n$.*

7. *Montrer que si $\mu \geq \mu_n$ alors $dim(Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A)) \geq n$.*

8. *Montrer que $\mu < \infty$.*

9. *En déduire que μ_i est la i-ième valeur propre de A comptée avec multiplicité.*

10. *En déduire que si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement, dont les résolvante sont compactes et tels que $A-B$ soit positif alors pour tout i*

$$\lambda_i^B \leq \lambda_i^A,$$

où λ_i^X sont les i-ième valeurs propres de l'opórateur X.

11. *On rappelle que le spectre du laplacien avec condition de Dirichlet sur le carré $[-1,1]^2$ est*

$$\left\{\frac{\pi^2}{4}(k_1^2+k_2^2) \mid k_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

et que les vecteurs propres asscoiés sont les $x \mapsto \prod_{i=1}^2 \cos(\pi k_i \frac{x_i}{2})$.

Déduire de ce qui précède que sur tout ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, il existe C, qui dépend que du diamètre de Ω, telle que, les valeurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet vérifient

$$\lambda_n \geq Cn \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Solution 12.0.2

1. *Si A est positif et $t>0$ alors $\langle (A+tId)(x),x\rangle \geq t\|x\|^2$ donc $A+tId$ est injective. En fait, comme A est auto-adjoint, on a $\|A+tId(x)\|^2 \geq t^2\|x\|^2$, ce qui prouve que l'image est fermée. En effet si $y_n = (A+$*

$tId)(x_n)$ converge vers y alors y_n est de Cauchy et donc d'après l'inégalité x_n est de Cauchy donc converge vers x tel que $y = (A+tId)(x)$. Enfin, Soit $x \in (Im(A+tId))^\perp$ alors $0 = \langle (A+tId)(x), x\rangle \geq t\|x\|^2$ et donc $(Im(A+tId))^\perp = \{0\}$. Finalement $Im(A+tId) = H$ donc $A+tId$ est inversible et d'inverse borné (ça norme vaut au plus $\frac{1}{t}$. Ce qui prouve que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$.
Si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$ alors le théorème spectral assure que A est positif.

2. *Il est clair que $\sigma(A+cId) = \sigma(A)+c$, or d'après la question précédente $\sigma(A+cId) \subset \mathbb{R}^+$, d'ou $\sigma(A) \subset [-c, = \infty[$.*
   Donc m existe et par définition $\sigma(A-mId) \subset \mathbb{R}^+$ et donc d'après la question précédente $A-mId$ est positif.
3. *Soit $\lambda \notin \sigma(A)$ alors $(A-\lambda Id)^{-1}$ est compact, donc son spectre est ponctuel et les valeurs propres forment une suite (finieou dénombrable) décroissante minoré (λ_n). Or on a $\mu \in \sigma(A)$ si et seulement si $\frac{1}{\mu-\lambda} \in \sigma((A-\lambda)^{-1})$. En effet, on*
   $$A-\mu Id = \left((A-\lambda Id)^{-1} - \frac{1}{\mu-\lambda}\right)(A-\lambda)(\lambda-\mu),$$
   d'ou
   $$\sigma(A) = \left\{\lambda + \frac{1}{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$
4. *Soit x_1 un vecteur propre unitaire associé à λ_1 alors*
   $$\lambda_1 = \langle A(x_1), x_1\rangle \geq \inf_{x\in H\setminus\{0\}} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2}$$
   D'autre part $A-\lambda_1 Id$ étant positif, on a
   $$\frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_1 \text{ pour tout } x \in H\setminus\{0\},$$
   ce qui prouve l'égalité souhaitée.
5. *On établit le résultat par récurrence. D'après la question précédente le résultat est vrai pour $i=1$. Supposons le vrai jusqu'au rang k. Alors il est clair que sur $V = \left(\oplus_{j=1}^k Ker(A-\lambda_j Id)\right)^\perp$, qui est stable par A, le spectre de A est égale à $\lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} < \dots$. Toujours en appliquant la question précédente, on en déduit que*
   $$\lambda_{k+1} = \inf_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2}.$$

6. *On commence par remarquer que* $Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A) \subset D(A)$ *pour tout* μ. *En effet comme spectre est borné inférieurement par* m, *on a* $\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A) = \mathbf{1}_{[m,\mu]}(A)$. *Comme* $[m,\mu]$ *est borné, le théorème spectral nous assure que* $Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A) \subset D(A)$.
Supposons que $dim(Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A)) \geq n$, *alors si* V *est de dimension* $n-1$ *il existe* $x \in (V^{\perp} \cap Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A)) \setminus \{0\}$ *qui vérifient*

$$\langle A(x), x\rangle = \int_{-\infty}^{\mu} t d\mu_x(t) \leq \mu \int_{-\infty}^{\mu} d\mu_x(t) = \mu\|x\|^2$$

donc

$$\inf_{x\in(D(A)\cap V^{\perp})\setminus\{0\}} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2} \leq \mu,$$

En passant au sup on obtient $\mu < \mu_n \leq \mu$, *ce qui est une contradiction et achève la question.*

7. *Supposons que* $Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A)) \subset V$ *avec* $dim(V) = n-1$,*alors* $V^{\perp} \subset (Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A))^{\perp} = Im\mathbf{1}_{]\mu,+\infty[}(A)$, *et donc*

$$\inf_{x\in(D(A)\cap V^{\perp})\setminus\{0\}} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|^2} > \mu,$$

En passant au sup on obtient $\mu \geq \mu_n > \mu$, *ce qui est une contradiction et achève la question.*

8. *Sinon d'après la question 6. on aurait* $dim(Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A)) < n$ *pour tout* μ. *Comme, d'après le théorème spectral,* H *est la réunion de tout les* $(Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu]}(A))$, *on montre facilement que* $dim(H) \leq n$, *ce qui contredit les hypothèses de l'énoncé.*

9. *D'après 7.,* $Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu_n]}(A)$ *est de dimension au moins* n *et est stable par* A, *donc il contient au moins* n *vecteurs propres, associés à* n *valeurs propres* $E_1 \leq \cdots \leq E_n$. *Soit* x_n *un vecteur propre associé à* E_n *comme* $x_n \in Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu_n]}(A)$, *on a bien* $E_n \leq \mu_n$. *en fait l'inégalité est bien une inégalité sinon d'après 6. on aurait* $dim(Im\mathbf{1}_{]-\infty,\mu_n]}(A)) < n$ *ce qui serait absurde. Finalement* μ_n *est bien la n-ième valeur propre.*

10. *D'après la question 3. le spectre de* A *et* B *est ponctuel. On a alors*

$$\lambda_i^X = \sup_{\substack{V,\\ dim(V)=i-1}} \inf_{x\in(D(A)\cap V^{\perp})0\}} \frac{\langle X(x), x\rangle}{\|x\|^2}$$

où le suprémum est pris sur les sous-espaces V de dimension $i-1$ et $X = A$ ou B. Enfin, on conclut, en utilisant le fait que $\langle A(x), x\rangle \geq \langle B(x), x\rangle$ pour tout x.

11. *Il faut tout d'abord montrer que si l'on note λ_n les valeurs propres, rangés par ordre croissant, du laplacien sur le carré, alors il existe C tel que*

$$\lambda_n \geq Cn \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour cela on remarque que n correspond au nombre de points à coordonnées entières positives dans le disque de rayon $\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\pi}$. Ce nombre est contrôlé par le nombre de points à coordonnées entières positives dans le carré de coté $\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\pi}$ et dont le coin inférieur gauche est l'origine. On note $N = \left[\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\right]$ alors ce nombre est égal par N^2 d'ou finalement

$$n \leq \left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\right)^2,$$

En déduit alors facilement la propriété souhaité.

Soit maintenant, un domaine borné quelconque Ω. Il existe un carré C de coté égale au diamètre de Ω qui contient Ω. De plus on a $D(\Delta_\Omega) = H_0^1(\Omega) \subset D(\Delta_C) = H_0^1(C)$. en utilisant la caractérisation de la question 9., on en déduit facilement que $\lambda_n^{\Delta_C} \leq \lambda_n^{\Delta_\Omega}$. D'autre part $C = \frac{diam(\Omega)}{2}[-1,1]^2$ ce qui donne $\lambda_n^{\Delta_C} = \left(\frac{diam(\Omega)}{2}\right)^2 \lambda_n$ puisque si ϕ est fonction propre de Δ_C alors $\phi\left(\frac{diam(\Omega)}{2}\,.\,\right)$ est fonction propre de $\Delta_{[-1,1]^2}$. D'ou finalement

$$\left(\frac{diam(\Omega)}{2}\right)^2 Cn \leq \lambda_n^{\Delta_\Omega} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui achève la question.

Problème 12.0.4 (Peut-on entendre la forme un tambour ?) *Le but de ce problème est de démontrer la célèbre loi de Weyl : Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et λ_i les valeurs propres du laplacien alors*

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\lambda_i}{i} = \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{|\Omega|}.$$

Donc pour répondre au titre de ce problème, on peut "entendre" le volume d'un tambour, puisque la connaissance du comportement asymptotique des valeurs propres du domaine nous donne son volume.

Mais, en fait on peut obtenir beaucoup plus d'information en poursuivant le développement limité. En particulier on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1-r}{6} + o(1),$$

*où r est le nombre de trous. On trouvera un schéma de preuve de cette estimation dans l'excellent article de Kac [Kac66]. Par contre on ne peut pas retrouver le domaine simplement à partir de son spectre, puisqu'il existe des domaines isospectraux, voir les figures à la fin du sujet. On en trouvera une présentation claire dans [**?**].*

Préliminaire : Théorème de Mercer

1. *Soit $K \in C^0(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega},\mathbb{C})$ tel que $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Montrer que l'opérateur $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ défini par*

$$A(f)(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)\,dy$$

est compact et auto-adjoint.

Le théorème spectral nous assure l'existence d'une décomposition de l'orthogonal du noyau en une somme orthogonale de sous-espaces propres de dimension finie. On a alors une suite de valeurs propres réelles **non nulles** *$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq \ldots$, associées à des vecteurs propres ϕ_k que l'on supposera de norme égale à 1.*

A priori cette suite peut-être finie, mais on la supposera tout le temps infinie pour simplifier les notations.

2. *A l'aide d'une formule intégrale montrer que les ϕ_k sont continues.*
3. *Montrer que si A est positif alors les λ_k sont strictement positifs.*

Dans la suite A sera toujours supposé positif

4. *Soit alors $K_n(x,y) = K(x,y) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$. Montrer que l'opérateur A_n associé à K_n est un opérateur positif. En déduire que $K_n(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et qu'il existe M tel que*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\phi_k(x)|^2 \leq M \text{ pour tout } x.$$

Enfin montrer que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\phi_k(x)|^2$ converge.

5. *En majorant $\left|\sum_{k=n}^{m} \lambda_k \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}\right|^2$ et en utilisant la question précédente , montrer que,* **pour** *y* **fixé**, *$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$ converge uniformément et absolument en x. On pose alors*

$$K_\infty(x,y) = K(x,y) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}.$$

6. *Toujours à y fixé, à l'aide Parseval et de la continuité de $K_\infty(x,y)$, montrer que $K_\infty(x,y) = 0$ pour tout x.*

Ceci étant vraie pour tout $y \in \Omega$, on définit la suite décroissante de fonctions positives $k_n(y,y) = K(y,y) - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |\phi_k(y)|^2$

7. *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $y \in \Omega$ tel que $0 \leq k_n(y) \leq \varepsilon$.*
8. *En déduire que la convergence suivante*

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(x) \overline{\phi_k(y)},$$

est uniforme et absolue sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Noyau de la Chaleur :

Définition 12.0.1 *Soit* $p : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times (0,\infty)$ *une fonction* C^2 *en les deux premières variables et* C^1 *en la dernière. On dit que* p *est un noyau de la chaleur si*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta_x p \text{ sur } \Omega \times \Omega \times (0,\infty),$$

$$p(x,y,t) = 0 \text{ dés que } x \in \partial\Omega$$

et

$$\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega p(x,y,t) u_0(y)\, dy = u_0(x)$$

uniformément pour toute fonction continue u_0 *s'annulant au bord de* $\overline{\Omega}$.

On peut démontrer l'existence d'un tel noyau en calculant des solutions approchées en partant du noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$ *tout entier :* $\frac{1}{(4\pi t)^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$. *On démontre également, sans trop de peine, que* $\int_\Omega p(x,y,t) u_0(y)\, dy$ *est alors l'unique solution de l'équation de la chaleur avec* u_0 *comme condition initiale, mais on admettra ces résultats, ainsi que les conséquences suivantes :*

— $p(x,y,t) \geq 0$ *pour tout* $x, y \in \overline{\Omega}$,

— $p(x,y,t) = p(y,x,t)$ *pour tout* $x, y \in \overline{\Omega}$,

— $p(x,y,t+s) = \int_\Omega p(x,z,t) p(z,y,s)\, dz$ *pour tout* $x, y \in \overline{\Omega}$ *et* $t, s > 0$.

On définit $P(t) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *par*

$$P(t)(f)(x) = \int_\Omega p(x,y,t) f(y)\, dy$$

pour tout $f \in L^2(\Omega)$.

1. *Montrer que* $P(t)$ *est un opérateur compact auto-adjoint.*
2. *Montrer que* $P(t)$ *vérifie la propriété de semi-groupe et en déduire que* $P(t)$ *est positif.*
3. *Montrer que* $\|P(t)\| \leq 1$.

4. *Soit* $\phi_1, \ldots, \phi_k, \ldots$ *une base orthonormal de fonctionq propreq de* $(KerP(1))^{\perp}$ *associées aux valeurs propres* $\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots$.
5. *Montrer que pour tout* $i, k, l \geq 1$, *on a*

$$P\left(\frac{l}{k}\right)\phi_i = \mu_i^{\frac{l}{k}}\phi_i,$$

puis que pour tout $t > 0$ *et* $i \geq 1$

$$P(t)\,\phi_i = \mu_i^t \phi_i.$$

6. *En déduire qu'il existe* $\lambda_k > 0$ *tel que*

$$p(t,x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-t\lambda_k}\phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$$

7. *En utilisant le fait que* $P(t)\,\phi_i = e^{-\lambda_i t}\phi_i$ *est solution de l'équation de la chaleur montrer qu'en fait les* ϕ_k *forment aussi une base de vecteurs propres de l'orthogonal du noyau du laplacien.*

La fin du sujet est difficile et hors barème, n'essayez de la traiter que si le reste est fait correctement.

On rappel que $k(t,x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$ *ets le noyau de la chaleur pour* $\Omega = \mathbb{R}^n$.

8. *A l'aide du principe du maximum montrer qu'il existe* t_0 *tel que*

$$0 \leq k(t,x,y) - p(t,x,y) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{d(y,\partial\Omega)^2}{4t}} \text{ pour tout } 0 < t < t_0 \text{ et } x, y \in \Omega \times \Omega.$$

9. *Montrer qu'il existe* $t_1 > 0$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$0 \leq \frac{|\Omega|}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} - \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \leq C t^{-\frac{n-1}{2}} \text{ pour tout } 0 < t < t_1 \text{ et } x, y \in \Omega \times \Omega.$$

10. *Conclure à l'aide du théorème Taubérien suivant*

Théorème 12.0.2 *Soit $N(\lambda)$ une fonction croissante tel que $f(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda)$ converge pour tout $t > 0$. Si $f(t) \sim_{t \to 0^+} \frac{A}{t^\gamma}$ pour $\gamma > 0$ alors*

$$N(\lambda) \sim_{\lambda \to +\infty} \frac{A\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma + 1)}.$$

Chapitre 13

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 2.1.1 Il suffit de considérer l'intersection de toutes les σ-algèbres qui contiennent $\mathcal{F}$.

Solution de l'exercice 2.1.2 Considérons la σ-algèbre engendrée par les pavés ouverts bornés. Il est clair qu'elle contient les pavés ouverts non-bornés. Il n'est pas non plus difficile de voir qu'elle contient les pavés fermés. Enfin on remarque qu'elle contient les pavés semi-ouverts.
Enfin on considère alors la suite suivante de partitions $\mathbb{R}^k = \bigsqcup_{i1,\ldots,i_k} \left[\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n}\right) \times \cdots \times \left[\frac{i_k}{2^n}, \frac{i_k+1}{2^n}\right)$ pour montrer que tout ouvert est union dénombrable de pavés semi-ouverts et conclure.

Solution de l'exercice 2.1.3 Tout d'abord on remarque trivialement qu'il suffit de démontrer le résultat pour $(0,1)$. D'autre part comme $(0,1)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, on se place sur $\mathbb{R}$ dans ce qui suit. Par l'absurde, considérons que

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_k [a_k, b_k].$$

On note alors $E = \bigcup_k \{a_k, b_k\}$. C'est le complémentaire de $\bigcup_k (a_k, b_k)$, donc c'est un ensemble fermé. De plus chaque point est un point d'accumulation de E. On dit alors que E est un ensemble parfait. Or dans un espace complet tout ensemble parfait est indénombrable. Par l'absurde, considérons $X = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ un ensemble parfait. On note $B_1 = B(x_1, 1)$, en considérant une suite de point de X convergeant vers x_1, on remarque qu'il existe $B_2 \subset B_1$ centrée en un point de X de rayon inférieur à $1/2$ et disjointe de x_1, puis on trouve $B_3 \subset B_2$ centrée en un point de X de rayon inférieur à $1/4$ et disjointe

de x_2 (et de x_1), ... La suite des centres des B_i forme une suite de Cauchy donc converge vers un élément de X, or cette élément est disjoint de tous les x_i par construction, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 2.1.4 Pour la première assertion on note que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ et on utilise la positivité de la mesure. Pour la deuxième assertion on note que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B))$ et $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B))$ puis on conclut à l'aide l'hypothèse.

Solution de l'exercice 2.1.5 Lorsque la suite est croissante on pose $B_k = A_k \setminus (\cup_{i<k} A_i)$, les ensembles B_k sont disjoints et on donc

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_k\right).$$

Or, d'une part $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu\left(B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_k)$.

Dans le dans ou la suite n'est *a priori* pas croissante, on considère le même suite B_k et on a

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \mu\left(\bigcup_k B_k\right) = \sum_k \mu\left(B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right).$$

Solution de l'exercice 2.1.6 Il susdit de remarquer que $\{x \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$ est fini.

Solution de l'exercice 2.2.1 i) est évident, ii) est une conséquence du fait qu'un recouvrement pour B est aussi un recouvrement pour A. Montrons iii), pour cela on peut supposer que pour tout k on a $\mu^*(A_k) < +\infty$ sinon il y a rien à montrer. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout k, il existe alors une famille finie $B_k^j \in \mathcal{M}$ qui recouvre A_k et de sorte que

$$\sum_j \mu(B_k^j) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

puis en sommant ces inégalités sur k et en remarquant que la famille $(B_k^j)_{k,j}$ recouvre $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$, on obtient que

$$\mu^*\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon,$$

il suffit alors de faire tendre ε vers 0 pour conclure.

Solution de l'exercice 2.2.1 Il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre. En effet comme elle contient $\mathcal{F}$, elle contiendra nécessairement $\sigma(\mathcal{F})$ et $\sigma(\mathcal{F})$ étant une classe monotone on obtient l'égalité.
Pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, car dans ce cas $\mathcal{C}$ seta stable par union car $X \in \mathcal{C}$ donc on peut passer au complémentaire et on transforme une union en intersection via la formule

$$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)).$$

Enfin A_k est une suite d'éléments quelconque de $\mathcal{C}$, en posant $B_k = \cup_{i \leq k} A_i$, on transforme notre suite en suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$.

Soit $A \in \mathcal{F}$ posons alors $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{C} \mid A \cap B \in \mathcal{C}\}$. On montre sans difficulté que $\mathcal{C}_A$ est une classe monotone, comme elle contient $\mathcal{F}$, alors elle contient nécessairement $\mathcal{C}$. En particulier si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{C}$ alors $A \cap B \in \mathcal{C}$. Soit $A \in \mathcal{C}$ posons alors $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{C} \mid A \cap B \in \mathcal{C}\}$. Comme précédemment, on montre que $\mathcal{C}_A$ est une classe monotone, mais d'après le résultat précédent elle contient $\mathcal{F}$, donc elle contient nécessairement $\mathcal{C}$.

Solution de l'exercice 2.2.2 Soit A un ensemble mesurable et $B \subset N$ avec N négligeable. Alors le complémentaire de $A \cup B$ est égale à $X \setminus (A \cup N) \cup (N \setminus B)$ est bien de la forme voulue. Soient, maintenant, Soit A_k une famille d'ensembles mesurables et $B_k \subset N_k$ avec N_k négligeable, alors $\bigcup(A_k \cup B_k) = \bigcup A_k \cup \bigcup B_k$ avec $\bigcup B_k \subset \bigcup N_k$, or d'après l'exercice 2.1.5 on a bien $\mu\left(\bigcup N_k\right) = 0$, finalement $\overline{\mathcal{M}}$ est bien une σ-algèbre.
Soit $\overline{\mu}$ une mesure prolongeant μ alors, avec les même notations que plus haut, on a $\mu(A) = \overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(A \cup B) \leq \overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A \cup N) \leq \mu(A)$. On définit alors pour tout $E = A \cup B \in \overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mu}(E) = \mu(A)$. Il faut d'abord vérifier que la définition ne dépend pas de la décomposition choisie. Si $A \cup B = A' \cup B'$ avec $B \subset N$ et $B' \subset N'$ où N, N' sont négligeables. $\mu(A) = \mu(A \cap A') + \mu(A \setminus A') \leq \mu(A \cap A') + \mu(N') \leq \mu(A)$. Par symétrie on obtient l'égalité cherchée. On vérifie alors sans peine qu'il s'agit bien d'une mesure.

Solution de l'exercice 2.3.1 Il suffit de vérifier qu'il s'agit d'une σ-algèbre car toute σ-algèbre qui rend f mesurable est contenue dans $f\#\mathcal{M}$.

Solution de l'exercice 2.4.1 On procède par double inclusion. Soit $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, d'après l'exercice 2.1.2, $B_i = \cup_k P_k^i$ où les P_k^i sont des pavés ouverts bornés. On a donc $B_1 \times B_2 = \cup_{k,l} P_k^1 \times P_l^2$ ce qui prouve que

$B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.
Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ alors $B = \cup_k P_k = \cup_k P_k^1 \times P_k^2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Solution de l'exercice 2.4.2 Comme $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{G})$, on a nécessairement $\sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{G})$. Montrons alors l'autre inclusion. Soit $A \in \mathcal{F}$, comme X est union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$, on a $A \times Y \in \sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$. On pose alors

$$\mathcal{G}_A = \{B \in \sigma(\mathcal{G}) \mid A \times B \in \sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})\},$$

on vérifie facilement, en utilisant le fait que $A \times Y \in \sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, qu'il s'agit bien d'une σ-algèbre et que donc $\sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_A$ et ceci pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F})$. De même pour tout $B \in \sigma(\mathcal{G})$, on pose

$$\mathcal{F}_B = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) \mid A \times B \in \sigma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})\},$$

et on vérifie que $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}_B$ et ceci pour tout $B \in \sigma(\mathcal{G})$, ce qui achève la preuve.

Solution de l'exercice 2.4.3 D'après le lemme des classes monotones, il suffit de vérifier que l'intersection de deux pavés est un pavés et que $X \times Y$ est dans la plus petite classe monotone, ce qui est évident.

Solution de l'exercice 2.4.4 Quitte à décomposer f, on peut supposer qu'elle est à valeurs positives. D'après le théorème 2.1.1, f est limite d'une suite croissante de fonctions mesurables étagées $f_n = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{A_i}$. D'après la proposition 2.4.1, les $x \mapsto f(x, y)$ sont mesurables. On conclut en passant à la limite à l'aide du théorème de convergence monotone.

Solution de l'exercice 2.5.1 Par régularité, il existe une suite de compacts K_n et une suite d'ouverts O_n tels que

$$K_n \subset A \subset O_n$$

et

$$\mu(O_n) - \frac{1}{n} \leq \mu(A) \leq \mu(K_n) + \frac{1}{n}.$$

En posant, $K_1' = K_1$ et $K_n = K_{n-1}' \cup K_n$ d'une part et $O_1' = O_1$ et $O_n = O_{n-1}' \cap O_n$ d'autre part, on peut supposer que K_n est croissante et O_n décroissante. On vérifie alors sans peine à l'aide de l'exercice 2.1.5 que

$K = \cup_n K_n$ et $O = \cap_n O_n$ conviennent.

Enfin si $X = \cup_n K_n$ et E mesurable, en appliquant ce qui précède à $E_n = E \cap K_n$ on trouver F_n fermé et O_n G_δ tel que $\mu(O_n \setminus F_n) = 0$, dés lors $A = \cup_n F_n$ et $B = \cap_n O_n$ conviennent.

Solution de l'exercice 2.5.2 Supposons qu'il existe O ouvert union d'ouverts de mesures nulles tel que $\mu(O) > 0$. Alors il existe un compact $K \subset O$ tel que $\mu(K) > 0$. Pour tout $x \in K$ il existe un ouvert de mesure nulle O_x tel que $x \in O_x$. On obtient la contradiction souhaitée en extrayant un recouvrement fini.

Solution de l'exercice 3.1.1 Il suffit de le démontrer pour I un intervalle borné. Sinon on pose $I^l = I \cap [l, l+1)$ et $I_k^l = I_k \cap [l, l+1)$ et on vérifie sans peine que

$$|I| = \sum_l |I^l|$$

et

$$|I_k| = \sum_l |I_k^l|.$$

En supposant le résultat vrai pour un intervalle borné, le résultat général suit par interversion des sommes.

On peut même supposer que $I = [a, b]$, en effet le fait d'ajouter un point ou deux ne change rien à la longueur. Enfin quitte à dilater et translater, on suppose que $I = [0, 1]$.

Tout d'abord, il est clair que pour tout n on a

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \leq |I|,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq |I|.$$

Montrons l'autre inégalité. Pour cela on fixe $\varepsilon > 0$ et à l'intervalle I_k on associe un intervalle ouvert J_k de sorte que $I_k \subset J_k$ et $|J_k \setminus I_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$. Comme

les J_k recouvre I compact, on peut en extraire un recouvrement fini [1], ce qui donne

$$|I| \leq \sum_{i=1}^{n} |J_{k_i}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour ε, on peut conclure.

Solution de l'exercice 3.1.2 Soit μ une mesure sur les boréliens invariante par translation. Soit $C_k = [0, 2^{-k})$, d'après l'exercice **??**, les boréliens sont engendrés par les C_k et leur translation. Donc il suffit de montrer que λ et μ ne diffèrent que d'un facteur scalaire sur les C_k, ce qui est une simple conséquence de la σ-additivité.

Solution de l'exercice 3.1.3 On a $T\#\lambda(E) = \lambda(T^{-1}(E))$, on vérifie que cette mesure est invariante par translation sur $\mathbb{R}^k$. Donc elle est égale à $c.\lambda$ et on calcul sur en regardant l'image du cube unité.

Solution de l'exercice 3.1.4 Par régularité, il existe un ouvert O contenant E de mesure plus petite que $\frac{\varepsilon}{(2\sqrt{k})^k}$. En utilisant une fois de plus le fait que O est dénombrables union de pavés semi-ouverts de coté $\frac{\eta}{2\sqrt{k}}$, voir exercice **??**. Alors chaque pavés d'intersection non vide avec E est inclus dans une boule de centré en E et de rayon $\sqrt{k}\eta$. On conclut en remarquant que le volume d'une telle boule ne dépasse pas $2^k\sqrt{k}^k$ fois celle du pavé qu'elle contient.

Solution de l'exercice 3.2.1 Soit N un ensemble de mesure nulle de $\mathbb{R}^m$ et P un esemble non mesurable de $\mathbb{R}^n$, comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+n})$ est complète, on montre facilement que $N \times P$ est Lebesgue-mesurable. Mais d'après la proposition 2.4.1, si $N \times P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, ce qui donne la contradiction cherchée.

Solution de l'exercice 4.1.1 Considérer $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}$.

Solution de l'exercice 4.1.2 Appliquer le théorème 2.5.1.

Solution de l'exercice 4.1.3

1. Soit $f \in C_c(G)$ et $\varepsilon > 0$, on note K le support de f. Pour tout $x \in K$ il existe un voisinage U_x de e tel que

$$|f(yx) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall y \in U_x.$$

1. Quitte à réextraire, on peut même supposer que l'union des intervalles extrait forme un intervalle.

De plus, il existe un voisinage symétrique de e V_x tel que $V_x.V_x \subset U_x$. Or les $V_x.x$ recouvrent K on peut donc en extraire un recouvrement fini $(V_{x_i}.x_i)_{i=1}^n$. On pose alors $V = \cap_i V_{x_i}$. Soit $x \in K$ et $y \in V$ alors il existe i tel que $x \in V_{x_i}.x_i$ de sorte que $yx = y(xx_i^{-1})x_i \in U_{x_i}x_i$, d'ou

$$|f(yx) - f(x)| \leq |f(yx) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Enfin si $x \notin K$ et $yx \in K$ alors on échange le role de x et yx, et si $x, yx \notin K$ alors il n'y a rien à démonter.

2. Soit $V = \{x \,|\, \phi(x) > \frac{1}{2}\|\phi\|\}$, c'est un ouvert, et $x_0 \in V$. Alors

$$supp(f) \subset \bigcup_{x \in supp(f)} xx_0^{-1}V$$

$$\bigcup_{i=1}^n x_i x_0^{-1} V$$

On a alors

$$f \leq \sum_{i=1}^n \frac{2\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty} L_{y_i}\phi,$$

où $y_i = x_i x_0^{-1}$.

3. i) Soit c_i et y_i tels que

$$f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i}\phi,$$

alors

$$L_y f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{yx_i}\phi,$$

d'ou $(L_y f : \phi) \leq (f : \phi)$. On obtient de même l'autre inégalité.

ii) Si

$$f_1 \leq \sum_{i=1}^{n_1} c_i^1 L_{x_i^1}\phi$$

et

$$f_2 \leq \sum_{i=1}^{n_2} c_i^2 L_{x_i^2}\phi,$$

alors

$$f_1 + f_2 \leq \sum_{i=1}^{n_1} c_i^1 L_{x_i^1}\phi + \sum_{i=1}^{n_2} c_i^2 L_{x_i^2}\phi,$$

d'où en passant à l'infimum, $(f_1 + f_2 : \phi) \leq (f_1 : \phi) + (f_2 : \phi)$.

iii) immédiat

iv) immédiat

v) Si

$$f \leq \sum_{i=1}^{n} c_i L_{x_i} \psi,$$

et

$$\psi \leq \sum_{j=1}^{m} d_j L_{y_j} \phi,$$

alors

$$f \leq \sum_{i,j} c_i d_j L_{x_i y_j} \phi,$$

d'où le résultat.

4. Soit $g \in C^+(G)$ tel que $g \equiv 1$ sur $supp(f_1+f_2)$, on pose $h = f_1+f_2+\delta g$, pour un certain $\delta > 0$ qu'on choisira plus tard, et $h_i = \frac{f_i}{h} \in C_c^+(G)$. D'après 1), on sait qu'il existe V voisinage symétrique de e tel que

$$|h_i(x) - h_i(y)| < \delta \ \forall i \, , \forall y \in V.x \, .$$

Soit $\phi \in C_c^+(G) \setminus \{0\}$ tel que $supp(\phi) \subset V$. Si $h \leq \sum_j c_j L_{x_j} \Phi$ alors

$$\begin{aligned} f_i = hh_i &\leq \sum_j c_j \Phi(x_j^{-1}x)(h_i(x)) \\ &\leq \sum_j c_j (h_i(x_j) + \delta) \Phi(x_j^{-1}x) \end{aligned}$$

En passant à l'infimum, on a

$$(f_i : \phi) \leq \sum_j c_j (h_i(x_j) + \delta)$$

étant donné que $supp(\phi) \subset V$. En sommant et en utilisant le fait que $h_1 + h_2 \leq 1$, on a

$$(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leq \sum_j c_j \phi(x_j^{-1}x)(1 + 2\delta),$$

d'ou

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq (1 + 2\delta) I_\phi(h),$$

enfin
$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leq (1+2\delta)(I_\phi(f_1+f_2) + \delta I_\phi(g)),$$
il suffit alors de prendre δ assez petit.

5. D'après v)$(f:\phi) \leq (f:f_0)(f_0:\phi)$, ce qui prouve l'inégalité de droite. Toujours d'après v), on a $(f_0:\phi) \leq (f_0:f)(f:\phi)$, ce qui donne l'inégalité de gauche. Le théorème de Tychonov nous assure alors que les I_ϕ sont dans un compact.

6. $K(V)$ est compact car sous-ensemble fermé d'un espace compact.

7. Soit V_i une suite décroissante de voisinage qui tendent vers e. On choisit alors $I \in \cap K(V_i)$, ce dernier ensemble est non vide car intersection d'une suite décroissante de compacts non vides. Soit V un voisinage de e et $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n \in C_c^+(G)$. On pose
$$U_I = \{J \mid |J(f_i) - I(f_i)| < \varepsilon \ \forall i\}.$$
U_I est un voisinage de I donc il existe un $I_\phi \in U_I$ de support arbitrairement petit donc dans V.

   Appliquons ce qui précède à f_1, f_2 et f_1+f_2, $\varepsilon > 0$ alors
$$I(f_1) + I(f_2) \leq I(f_1+f_2) + 3\varepsilon.$$
Et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc I est sur-additive, mais comme chaque I_ϕ est sous-addtive, invariante à gauche et homogène, on obtient le résultat souhaité.

8. Soit $f \in C_c(G)$, alors $f = f_+ - f_-$ et on pose $I(f) = I(f_+) - I(f_-)$. Ce qui est une forme linéaire positive, le théorème de Riesz nous assure alors de l'existence d'une mesure μ associé àI. Notamment μ vérifie
$$\int_G L_y f \, d\mu = \int_G f \, d\mu \text{ pour tout } y.$$
Soit A un ensemble mesurable de mesure finie. D'après le théorème de Lusin, on sait qu'il existe $f_n \in C_c(G)$ de norme au plus 1 qui ne diffère de $\mathbf{1}_A$ d'un ensemble de mesure plus petite que $\frac{1}{n}$. On a alors
$$\mu(y.A) = \int_G L_y(\mathbf{1}_A) \, d\mu = \int_G L_y f_n \, d\mu + \delta_n = \int_G f_n \, d\mu + \delta_n,$$
où $0 \leq \delta \leq \frac{2}{n}$. On obtient le résulta voulu en passant à la limite.

9. Comme μ ne charge aucun ensemble $\mu+\nu$ négligeable, on a $\mu = f(\mu+\nu)$, d'après le corollaire 10.5, où f est une fonction mesurable positive. Soit K un compact, d'une part
$$\mu(K) = \int 1_K f(x)\, d(\mu+\nu)$$
d'autre part
$$\mu(K) = \mu(yK) = \int 1_{yK} f(x)\, d(\mu+\nu) = \int 1_K f(yx)\, d(\mu+\nu).$$
Par unicité de la dérivé de Radon-Nikodym on en déduit que pour tout $y \in G$ on a $f(yx) = f(x)$ pour presque tout x. En appliquant le théorème de Fubini à $|f(yx) - f(x)|$, on en déduit que $f(yx) = f(x)$ pour presque tout (x, y) par rapport à mesure produit, en particulier pour presque tout x on a $f(yx) = f(x)$ pour presque tout y. En choisissant un tel x_0, on en déduit que $f(x) = f(x_0)$. pour presque tout x, ce qui achève la preuve.
10. On alors $\mu = \frac{c}{c-1}\nu$ ou $\nu = \frac{c-1}{c}\mu$.

Solution de l'exercice 4.1.4 Soit G un groupe admettant une mesure de Haar finie. Soit U un voisinage compact de e. Alors il existe un nombre maximal de points tel que les x_iU soient disjoints. Soit $K = \cup_{x_i} x_iU$ alors K est compact et pour tout $x \in G$ on a $xK \cap K \neq \emptyset$ donc $x \in KK^{-1}$ qui est compact, ce qui achève la preuve.

Solution de l'exercice 4.1.5 Si O est un ouvert non vide négligeable, quitte à le translater on peut supposer qu'il contient e. Comme pour tout compact $K = \cup_{x\in K} x.O$, en extrayant un recouvrement finie, on voit que tout compact est négligeable, donc tout ouvert par régularité intérieur sur les ouverts, donc la mesure est triviale.

Soit $f \in L^1(G, \mu)$ et $A = \{x \mid f(x) \neq 0\}$. Alors $A = \cup_n A_n$ où $A_n = \{x \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. $\mu(A_n) < +\infty$, donc par régularité on peut trouver un d'ouvert U^n contrant A_n de mesure finie. Soit alors un sous-groupe H ouvert σ-compact, qui existe d'après la proposition 4.1.1. G est union disjointe des xH tel que $x \in G/H$. Mais U ne rencontre qu'un nombre dénombrable de xH puisque $xH \cap U$ est soit vide soit de mesure positive. Soit L le groupe engendré par les xH rencontrant U c'est un groupe ouvert σ-compact, d'après la proposition 4.1.1, qui contient U donc A_n. Donc A_n est inclus dans un groupe ouvert σ-compact. Ce qui achève la preuve.

Solution de l'exercice 4.1.6

Solution de l'exercice 4.1.7 La formule est évidente pour les fonctions caractéristiques, on l'obtient dans le cas général par approximation.
Avant de montrer la continuité de Δ, on montre d'abord que les opération de translation à gauche et à droite sur $L^1(G)$ sont continues. Par exemple, soit $f \in C_c(G)$ et $\varepsilon > 0$, soit U un voisinage de e alors pour tout $y \in U$ on a $supp(L_y f) \subset U supp(f)$. Soit V un voisinage inclus dans U donné par le 1) de l'exercice 4.1.3, de sorte que pour tout $y \in V$ on ait $\|L_y f - f - \|_\infty \leq \delta$, δ étant un nombre positif que l'on choisira plus tard. On a

$$\|L_y f - f\|_1 \int_G |f(y^{-1}x) - g(x)|\, dx \leq \delta |UK|.$$

Ce qui prouve bien, en choisissant δ assez petit, qu'il existe U voisinage de e tel que si $y \in U$ alors $\|L_y f - f\|_1 \leq \varepsilon$.

En récrivant la première formule démontrée comme suit,

$$\Delta(y) = \frac{1}{c} \int_G R_{y^{-1}}\, d\mu(x),$$

et on a donc la continuité.

D'autre part,

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu(Axy) = \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A),$$

ce qui prouve, en choisissant A tel que $0 < \mu(A) < +\infty$, que Δ est un morphisme.

Si G est abélien, il est clairement unimodulaire. si G est compact alors l'image de G par Δ est un groupe compact de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et donc est nécessairement réduit à $\{1\}$.

On montre sans trop de peine que $\Delta \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = |y|$.

Solution de l'exercice 4.1.8

Solution de l'exercice 4.1.9 On vérifie facilement qu'il s'agit d'un morphisme continue. Soit $x \in G$, on a

$$\begin{aligned}\langle L_x\phi, L_x\psi\rangle &= \int_G L_x\phi(y)\overline{L_x\psi(y)}\,d\mu(y)\\ &= \int_G \phi(x^{-1}y)\overline{L_x\psi(x^{-1}y)}\,d\mu(y)\\ &= \int_G \phi(y)\overline{\psi(y)}\,d\mu(y) = \langle\phi,\psi\rangle,\end{aligned}$$

donc la représentation est bien unitaire.

Solution de l'exercice 4.1.10

Solution de l'exercice 4.2.1 Montrons tout d'abord qu'il s'agit bien d'une mesure. Soit $A = \sqcup A_k$ avec $A_k \in \mathcal{M}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe A_k^i une partitionde A_k par dés éléments de $\mathcal{M}$ telle que $\sum_i |\mu(A_k^i)| \geq |\mu|(A_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Alors comme les A_k^i forme une partition de A, on a

$$|\mu|(A) \geq \sum_{k,i} |\mu(A_k^i)| \geq \sum_k \sum_i |\mu(A_k^i)| = \sum_k |\mu|(A_k) - \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient la sur-additivité, c'est à dire

$$|\mu|(A) \geq \sum_k |\mu|(A_k). \tag{13.1}$$

Soit une autre partition A'_l de A, on pose $B_{k,l} = A_k \cap A'_l$, on a

$$\begin{aligned}\sum_l |\mu(A'_l)| &= \sum_l \left|\sum_k \mu(B_{k,l})\right|\\ &\leq \sum_l \sum_k |\mu(B_{k,l})|\\ &\leq \sum_k \sum_l |\mu(B_{k,l})|\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (13.1), on a alors

$$\sum_l |\mu(A'_l)| \leq \sum_k |\mu|(A_k).$$

Puis en passant au sup sur toute les partition A'_l, on obtient la sous-additivité et donc la σ-additivité.

Supposons qu'il existe A tel que $|\mu|(A) = +\infty$. Il existe alors une partition A_k telle que

$$\sum_k |\mu(A_k)| \geq 2|\mu(A)| + 3.$$

il existe alors $I \subset \mathbb{N}$ fini tel que

$$\sum_{k\in I} |\mu(A_k)| \geq 2|\mu(A)| + 2.$$

D'ou, avec des notations évidente,

$$\sum_{k\in I^+} \mu(A_k) - \sum_{k\in I^-} \mu(A_k) \geq 2|\mu(A)| + 2.$$

On peut même supposer, par exemple, que

$$\sum_{k\in I^+} \mu(A_k) \geq |\mu(A)| + 1.$$

On note alors $B = \cup_{k\in I^+} A_k$. Finalement

$$|\mu(A \setminus B)| = |\mu(A) - \mu(E)| \geq |\mu(E)| - |\mu(A)| \geq 1.$$

En utilisant le fait que $|\mu|$ est additive, on a séparé A en un ensemble de mesure plus grande que 1 et un ensemble de variation totale infinie. En itérant ce processus, on trouve une famille C_k d'ensemble de mesure plus grande que 1, ce qui contredit la converge nécessaire de $\sum_k \mu(C_k)$.

Solution de l'exercice 4.2.3 Tout d'abord, on peut trouver une sous famille de boules $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ disjointes et maximale. Dans le sens où toute boule n'appartenant à $\mathcal{B}'$ intersecte une boule de $\mathcal{B}'$. Soit x_n une suite dense on construit la famille comme suit : on pose $\mathcal{B}_0 = \emptyset$, puis soit x_n est dans une boule $B_n \in\in \mathcal{B}$ disjointes des boules de $\mathcal{B}_{n-1}$et on pose $\mathcal{B}_n = \{B_n\} \cup \mathcal{B}_{n-1}$ sinon $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n-1}$. On vérifie aisément que l'union des $\mathcal{B}_n$ vérifie la condition de maximalité.
Maintenant on "ordonne" les boules comme suit : soit R le sup des rayons des boules on pose

$$\mathcal{B}_i = \left\{ b \in \mathcal{B} \mid \frac{R}{2^i} r(B) \leq \frac{R}{2^{i-1}} \right\}.$$

Puis on construit notre famille par récurrence, en choisissant $\overline{\mathcal{B}}_1$ une famille maximal de $\mathcal{B}_\infty$ et en choisissant $\overline{\mathcal{B}}_n$ une famille maximale parmi les $\{B \in \mathcal{B}_n \,||B \cap B' = \ \forall B \in \cup_{i<n} \overline{\mathcal{B}}_i$. On vérifie alors que la famille $\cup_n \overline{\mathcal{B}}_n$ convient.

Solution de l'exercice 4.2.4 $x \mapsto \frac{1}{(xln(x)^2}$ sur $(0, e)$ et 0 sinon.

Solution de l'exercice 4.2.6 La première partie est évidente. Pour la seconde, supposons que $\nu = f\mu$. On a nécessairement que $A = \{x \quad f(x) > 0\}$ est dénombrable d'après l'exercice 2.1.6. Mais alors $\int_A f\, d\mu = 0$, donc $f = 0$, contradiction.

Solution de l'exercice 4.2.7 Le théorème de Radon-Nykodim nous offre une une première décomposition $f\lambda + \mu_s$. Posons $\mu_2(\{x\}) = \mu(\{x\})$ et $\mu_1 = \mu_s - \mu_2$. Montrons tout d'abord que μ_2 est discrete. Comme μ est σ-fini, on peut supposer que μ est fini. Alors $\{x \,|\, \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\}$ est fini et donc $\{x \,|\, \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable. Il est alors claire que μ_2 est continue.

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ l'escalier de Kantor, on pose $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$, comme f est croissante cela définit une mesure. De plus elle est étrangère à la mesure de Lebesgue car supporté sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Enfin elle est continue car f est continue.

Solution de l'exercice 4.3.1 Soit x un point de discontinuité, alors il existe un rationnel $r_x \in (\lim_{y\to x^-} f(y), \lim_{y\to x^+} f(y))$. On vérifie sans peine que $x \mapsto r_x$ est injective, ce qui prouve la première partie de l'exercice.

Par construction $f - J_f$ est croissante et continue, Posons $E_\varepsilon = \Big\{x \mid \limsup_{h\to 0} \frac{J(x+h)-J(x)}{h} >$ Tout d'abord E_ε est mesurable, car $\limsup_{h\to 0} \frac{J(x+h)-J(x)}{h}$ est mesurable. En effet posons, pour $k > m$, $E^N_{k,m} = \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\frac{1}{m}} \left|\frac{J_N(x+h)-J_N(x)}{h}\right|$ où $J_N = \sum_{n=1}^N s_n h_n(x)$. On remarque que chaque $F^N_{k,m}$ est mesurable et on conclut en passant à la limite en N, puis k et enfin m.
Pour démontrer la deuxième partie, il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|E_\varepsilon| = 0$. Soit $\eta > 0$, il existe N tel que

$$\sum_{n>N} s_n < \eta,$$

D'ou, si

$$J_0(x) = \sum_{n>N} s_n h_n(x),$$

alors

$$J_0(b) - J_0(a) < \eta.$$

Comme $J - J_0$ est une somme finie de sauts, l'ensemble des points tels que $\limsup_{h\to 0} \frac{J_0(x+h)-J_0(x)}{h} > \varepsilon$ a la même mesure que E_ε, donc il existe K compact tel que $|K| > \frac{|E_\varepsilon|}{2}$ et $\limsup_{h\to 0} \frac{J_0(x+h)-J_0(x)}{h} > \varepsilon$ pour tout $x \in K$. K est donc recouvert par des intervalle (a_x, b_x) tel que $J_0(b_x) - J(a_x) > \varepsilon(b_x - a_x)$, on peut en extraire un recouvrement fini, dont on réextrait un recouvrement de Vitali, noté (a_j, b_j) finalement on a

$$J_0(b) - J_0(a) \geq \sum_{j=1}^{N} J_0(b_j) - J_0(a_j) \geq \varepsilon \sum_j (b_j - a_j) \geq \frac{\varepsilon}{3}|K| \geq \frac{\varepsilon|E_\varepsilon|}{6}.$$

On conclut en faisant tendre η vers 0.

Solution de l'exercice 4.3.2 E est clairement ouvert et on montre facilement que tout ouvert est union dénombrable d'intervalles disjoints. Soit (a_k, b_k) un intervalle fini de cette décomposition, comme $a_k \notin E$, on a nécessairement $f(b_k) \leq f(a_k)$. Supposons que l'inégalité soit stricte, on choisi alors $c \in (a_k, b_k)$ le point le plus à près de b_k tel que

$$f(c) = \frac{f(b_k) + f(a_k)}{2}$$

, ce potin existe par le théorème des valeurs intermédiaire. Comme $c \in E$, il existe $d > c$ tel que $f(d) > f(c)$, mais comme $b_k \notin E$, on a $d \in (c, b_k)$, on trouve une contradiction puisque le théorème des valeurs intermédiaires fourni un $c' \in (d, b_k)$ tel que $f(c') = f(c)$.

Solution de l'exercice 4.3.4 On suppose que $\delta < |E|$ sinon il y a rien à montrer. En appliquant le lemme de Vitali on peut trouver une une famille finie de boule disjointe B_i telle que $\sum_i |B_i| \geq \frac{\delta}{5^d}$. Soit $\sum_{i=1}^{N} |B_i| \geq |E| - \delta$. et c'est fini, sinon on pose $E_2 = E \setminus \cup \overline{B_i}$ comme $|E_2| > \delta$ on trouve une nouvelle famille B_i^2 tel que $\sum_i |B_i^2| \geq \frac{\delta}{5^d}$. On peut même supposer que les B_i^2 sont disjoints des B_i quitte à travailler sur un sous-recouvrement de E_2 étant donné que E_2 est ouvert. On ibère ainsi le processus qu'y s'arrête puis qu'a l'étape n on possède une famille de boule disjointe tell que $\sum_{i,n} |B_i^n| \geq \frac{n\delta}{5^d}$.

Solution de l'exercice 6.3.1 Il suffit de remarquer que $\lambda^{-1}\mathbf{1} + \lambda^{-1}b(\lambda\mathbf{1} - ab)^{-1}a$ est l'inverse de $\lambda\mathbf{1} - ba$.

Solution de l'exercice 6.3.2 La première assertion est évidente. Soit $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)$, il existe λ_n tel que $x - \lambda_n\mathbf{1}$ soit inversible dans $\mathcal{B}$ si $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ alors $x - \lambda\mathbf{1}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et donc dans $\mathcal{B}$, car $\mathcal{B}$ est fermé. Ce qui est une contradiction puisque $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.

Solution de l'exercice 6.3.3 Il suffit de démontrer que $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ et d'appliquer la formule du rayon spectral.

Solution de l'exercice 6.4.1 Soit $\phi \in \mathcal{M}$, $x \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| > \|x\|$. Alors $\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}$ est inversible, donc $\phi(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}) \neq 0$, d'ou $\phi(x) \neq \lambda$. On en déduit que $\|\phi\| \leq 1$. Enfin comme $\phi(\mathbf{1}) = 1$ on a $\|\phi\| = 1$.

Solution de l'exercice 6.4.2 Montrons que l'ensemble des idéaux stricts est inductif. Soit I_j une famille croissante d'idéaux. On pose $I = \cup_i I_i$, on vérifie sans peine que c'est un idéal. De plus $I \neq \mathcal{A}$ sinon $\mathbf{1} \in I_i$ pour un certain i et on aurait $I_i = \mathcal{A}$.
En appliquant le lemme de Zorn, on trouve un idée maximal et donc un caractère d'après le théorème 6.4.1.
Si $x \in \mathcal{A}$ il est clair que $\phi(x) \neq 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Si $x \in \mathcal{A}$ est non inversible. Il engendre un idéal strict de $\mathcal{A}$, qui contient un idéal maximal et donc, d'après le théorème 6.4.1, il existe $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tel que $\phi(x) = 0$. strict de $\mathcal{A}$

Solution de l'exercice 6.4.4 Commençons par établir la bijectivité. Soit $\chi, \chi' \in \mathcal{M}_{L^1(G)}$ tels que $m_\chi = m_{\chi'}$, on a alors

$$\int_G f(x)\overline{\chi(x) - \chi'(x)}\, dx = 0,$$

pour tout $f \in C_c(G)$. D'ou, par continuité, $\chi = \chi'$. Soit maintenant $m \in \mathcal{M}_{L^1(G)}$, on peut supposer $m \neq 0$ dans ce cas il existe $g \in C_c(X)$ tel que $m(g) \neq 0$ on pose alors

$$\chi(x) = \frac{\overline{m(L_x g)}}{\overline{m(g)}}.$$

On montre alors que χ est continue et de plus, comme

$$m(L_x g)m(L_y(g) = m(L_X g * L_y g) = m(L_{xy} g * g) = m(L_{xy} g)m(g),$$

on en déduit que χ est compatible avec la multiplication. Enfin Soit $f \in C_c(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, dx &= \frac{1}{m(g)} \int_G f(x) m(L_x g)\, dx \\
&= \frac{1}{m(g)} m\left(\int_G f(x) L_x g(y)\, dx\right) \\
&= \frac{1}{m(g)} m\left(f * g\right) = m(f).
\end{aligned}$$

Ici on a utilisé la proposition 5.2.1 et l'exercice 5.2.3. Reste à vérifier que $\chi \in \mathbb{U}$, pour cela on considère une approximation de l'unité f_j de sorte que

$$\begin{aligned}|\chi(x)| &= \left|\lim_j f_j * \chi\right| \\ &= \left|\lim_j \int L_x f_j \overline{\chi}\, dx\right| \\ &= \left|\lim_j m(L_x f_j)\right| \leq \lim_j \|L_x f_j\|_1 = 1.\end{aligned}$$

Comme $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1}$, on en déduit que $|\chi(x)| = 1$.

Soit χ_n une suite de caractères convergeant sur tout compact, $f \in \mathcal{M}_{L^1(G)}$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver $g \in C_c(G)$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$|m_{\chi_n}(g) - m_\chi(g)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$|m_{\chi_n}(f) - m_\chi(g)| \leq |m_{\chi_n}(f) - m_{\chi_n}(f)| + |m_{\chi_n}(g) - m_\chi(g)| + |m_\chi(g) - m_\chi(f)| \leq \varepsilon,$$

Ce qui prouve la continuité de $\chi \mapsto m_\chi$.

Enfin les intersections finies de $V(K, U)$ forment une base de voisinages de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Donc pour montrer la continuité de l'application réciproque il suffit de montrer que pour tout caractère χ_0, K compact et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $f_1, \ldots, f_l \in L^1(G)$ tel que si

$$|m_{\chi_0}(f_i) - m_\chi(f_i)| \leq \delta \text{pour tout } 1 \leq i \leq l$$

alors

$$\|\chi - \chi_0\|_{L^\infty(K)} \leq \varepsilon.$$

Remarquons tout d'abord que, vu que $\chi \in \mathbb{U}$, on a

$$\begin{aligned}m_\chi(f) - m_{\chi_0}(f) &= \int_G f\, \overline{(\chi - \chi_0)} \\ &= \int_G f\, \overline{\chi_0}(\overline{\chi\overline{\chi_0} - 1}) \\ &= m_{\overline{\chi}\chi_0}(f\overline{\chi_0}) - m_{\mathbf{1}}(f\overline{\chi_0})\end{aligned}$$

Donc afin d'évaluer cette différence on peut supposer que $\chi_0 = 1$. Soit $f \in L^1(G)$ tel que $m_{\mathbf{1}}(f) = 1$ et U un voisinage symétrique de e tel que

$$\|L_x(f) - f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour tout } x \in U.$$

On peut trouver un ensemble fini de points $x_i \in G$ tel que $K \subset \cup_{i=1}^n x_i U$. On pose alors $f_i = L_{x_i^{-1}}(f)$ et $f_0 = f$ et $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Si

$$|m_\chi(f_i) - 1| \leq \delta \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n, \tag{13.2}$$

alors si $x \in K$, il existe i tel que $x \in x_i U$ et on a

$$|\chi(x) - 1| \leq |\chi(x) - \chi(x) m_\chi(f_0)| + |\chi(x) m_\chi(f_0) - m_\chi(f_i)| + |m_\chi(f_i) - 1|$$

Le premier et le troisième terme du membre de droite sont plus petit $\frac{\varepsilon}{3}$ vu (13.2). Et

$$|\chi(x) m_\chi(f_0) - m_\chi(f_i)| = |m_\chi(L_{x^{-1}} f) - m_\chi(f_i)|,$$

car

$$\begin{aligned}
\chi(x) m_\chi(f_i) &= \chi(x) \int_G f(y) \overline{\chi(y)}\, dy \\
&= \int_G f(y) \overline{\chi(x^{-1}) \chi(y)}\, dy \\
&= \int_G f(y) \overline{\chi(x^{-1} y)}\, dy \\
&= \int_G L_{x^{-1}}(f)(y) \overline{\chi(y)}\, dy.
\end{aligned}$$

Au final, comme $x^{-1} x_i \in U$, le second terme vérifie

$$|\chi(x) m_\chi(f) - m_\chi(f_i)| \leq \|L_{x^{-1}}(f) - f_i\|_1 \leq \|L_{x_i x^{-1}}(f) - f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui achève la preuve.

Pour montrer que $\hat{f}$ s'annule à l'infini, il suffit de remarquer que $\mathcal{M}_{L^1(G)} \cup \{0\}$ est compact.

Solution de l'exercice 7.0.1 Sauf l'indication tout est relativement immédiat. Pour Montrer l'indication on remarque tout d'abord que

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \Re \langle y, A(x) \rangle.$$

C'est une simple conséquence de Cauchy-Schwarz. Puis il suffit de polariser cette relation en montrant que

$$4\Re\langle y, A(x)\rangle = \langle (y+x), A(y+x)\rangle - \langle (y-x), A(y-x)\rangle.$$

En effet on écrivant $2y = (y+x) + (y-x)$ et $A(x) = A(x+y) + A(x-y)$, on a

$$4\langle y, A(x)\rangle = \langle (y+x), A(y+x)\rangle - \langle (y-x), A(y-x)\rangle + \langle (y-x), A(y+x)\rangle - \langle (x+y), A(y-x)\rangle,$$

or

$$\langle (y-x), A(y+x)\rangle = \overline{\langle A(x+y), (y-x)\rangle} = \overline{\langle (x+y), A(y-x)\rangle},$$

ce qui prouve que le second terme est imaginaire, on vérifie facilement que le premier est réel.

Ce qui donne,

$$\|A\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle| \|y+x\|^2 - \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle| \|y-x\|^2 \leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle| 2(\|y\|^2 + \|x\|^2,$$

Ce qui au passant au sup

$$\|A\| \leq sup_{\|x\|\leq 1} \langle Ax, x\rangle.$$

L'autre inégalité étant évidente au peut conclure.

Solution de l'exercice 7.0.2 Attention le premier résultat n'est vrai que dans le cas complexe. Pour cela on remarque $\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, A(x)\rangle} = \langle x, A(x)\rangle$, puisque toutes les quantités sont positives donc réelles. On conclut alors à l'aide des identités de polarisation suivantes

$$\langle x, A(y)\rangle = \frac{1}{4}\left((\langle x+y, A(x+y)\rangle - \langle x-y, A(x-y)\rangle) + i\left(\langle x+iy, A(x+iy)\rangle - \langle x-iy, A(x-iy)\rangle\right)\right)$$

et

$$\langle A(x), y\rangle = \frac{1}{4}\left((\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle) + i\left(\langle A(x+iy), x+iy\rangle - \langle A(x-iy), x-iy\rangle\right)\right).$$

D'ailleurs son vérifiera que si S n'est pas autoadjoint, alors $I - S$ non plus, par contre $I - S$ est positif dés que $\|S\| \leq 1$.

Pour le deuxième point, il suffit d'écrié $\|(Id - A)\| = \sup_{x\in H} |\langle (Id - A)(x), x\rangle|$.

Enfin, quitte à multiplier A par un scalaire positif, supposons que $\|A\| \leq 1$. Considérons la série suivant

$$\sqrt{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

qui converge absolument sur le disque fermé. Donc $\sum c_n(Id - A)^n$ converge normalement vers un opérateur B. Comme la série converge absolument on peut calculer B^2 et réarrangeant les termes et montrer qu'on a bien $B^2 = A$. Comme , $0 \leq Id - A \leq Id$ on a $0 \leq \langle x, (Id - A)^n(x)\rangle \leq 1$ pour tout x, d'ou

$$\langle x, B(x)\rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle x, (Id - A)^n(x)\rangle \geq 1 + \sum_{n=1} \infty c_n \geq 0,$$

ici on utilisé le fait que les c_n sont négatifs pour $n \geq 1$. Donc B est positif. Reste à montrer l'unité. Soit C positif tel que $C^2 = A$ alors $CA = A^3 = AC$ donc C commute avec A donc avec B. On a donc

$$(C - B)B(C - B) + (C - B)C(C - B) = (C^2 - B^2)(C - B) = 0,$$

or comme $C - B$ est auto-adjoint on vérifie que les deux termes de gauche sont positifs. comme leur somme est nulle, leur différence aussi , donc $(C-B)^3 = 0$, d'où $\|(C - B)^4\| = \|C - B\|^4 = 0$, ce qui achève la preuve.

Solution de l'exercice 7.0.3 Pour tout x on a $x^*\mathbf{1}^* = (x\mathbf{1})^* = x^* = (\mathbf{1}x)^* = \mathbf{1}^*x$, dou $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$. Pour tout x on a $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x^*\|\|x\|$ d'ou $\|x\| \leq \|x^*\|$, on conclut par symétrie.

Solution de l'exercice 7.0.4 On remarque $\|a^2\| = \|a\|^2$ et on procède comme dans l'exercice 6.3.3.
On vérifie facilement que $a - \lambda\mathbf{1}$ est inversible si et seulement si $(a - \lambda\mathbf{1})^*$ est inversible, ce qui répond à la deuxième partie de l'exercice.

Solution de l'exercice 9.2.1 Tout d'abord on remarque que $\sigma(T)$ et $\sigma(T')$ sont inclus dans $B_f(0, 1)$. En effet $\|T\| = \|T'\| = 1$. Soit $|\lambda| < 1$ alors $T(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ donc $B(0, 1) \subset \sigma_p(T)$. En déduit que $\sigma(T) = B_f(0, 1)$ puisque le spectre est fermé. On montre facilement qu'en fait $\sigma_p(T) =$

$B(0,1)$ et $\sigma_p(T) = \emptyset$.
Soit $|\lambda| = 1$ si $\overline{Im(T - \lambda Id)} \neq l^1$ alors il existe $a \in l^\infty$ tel que

$$\langle (T - \lambda Id)(b), a \rangle = 0 \; \forall b \in l^1$$

ce qui implique

$$\langle b, (T' - \lambda^* Id) a \rangle = 0 \; \forall b \in l^1$$

et donc $\lambda^* \in \sigma_p(T')$, ce qui est absurde. Donc $\sigma_r(T) =$, on en déduit immédiatement que $\sigma_c(T) S^1$. De même on montrer que $B(0,1) \subset \sigma_r(T')$.
Enfin montrons que si $|\lambda| = 1$ alors $\overline{Im(T' - \lambda Id)} \neq l^\infty$. En fait on va d'abord montrer que $T' - \lambda Id$ n'est pas surjectif. En effet si $b = (T' - \lambda Id)(a)$ alors $b_n = a_{n-1} - \lambda a_n$ ce qui implique $a_n = \overline{\lambda}(a_{n-1} - b_n)$ ce qui donne $a_n = -\overline{\lambda} b_n - \cdots - \overline{\lambda}^n b_1$, donc si $b_n = \overline{\lambda}^n$ il est clair que l'antécédent n'est pas dans l^∞. Montrons qu'en fait l'image est disjointe de $B(b, \frac{1}{2})$ pour $b_n = \overline{\lambda}^n$. Si ce n'est pas le cas il existe $a \in l^\infty$ tel que $b = T'(a) - \lambda a + \delta$ avec $|\delta_n| \leq \frac{1}{2}$. On a alors $a_n = \overline{\lambda}(a_{n-1} - b_n + \delta_n)$ et donc $a_n = -(1-n)\overline{\lambda}^n + \sum_{k=1}^n \delta_k \overline{\lambda}^{n-k-1}$. Ce qui donne

$$|a_n + (1-n)\overline{\lambda}^n| \leq \frac{n}{2},$$

ce qui prouve que $a \notin l^\infty$. Finalement $\sigma_r(T') = B_f(0,1)$.

Solution de l'exercice 9.2.2 Soit $x \in H$, on a

$$\langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, T^*(T(x)) \rangle = \langle x, T(T^*(x)) \rangle = \langle T^*(x), T^*(x) \rangle,$$

ce qui démontre l'indication. Soit maintenant $\lambda \notin \sigma_p(T)$ alors

$$\overline{Im(T - \lambda Id)} = (Ker(T^* - \lambda^* Id))^\perp = (Ker(T - \lambda Id))^\perp = H,$$

donc $\lambda \notin \sigma_r(T)$.

Solution de l'exercice 9.3.1 Supposons que 0 n'est pas dans le spectre. Par le théorème du graphe fermé, l'application inverse est continue. Soit $K = T^{-1}(B(0,1))$, K est borné par continuité de l'inverse. Donc l'image de K est compact, ce qui est une contradiction.

Solution de l'exercice 9.3.2 Soit x_n une suite borné de H, on peut alors en extraire une sous-suite convergeant au sens-faible vers x. On a alors

$$\|T^*(x_n) - T^*(x)\| = \langle T(T^*(x_n - x)), x_n - x \rangle$$

Or on peut réxtraire une suite tel que le membre de droite du produit scalaire converge fortement, par compacité de T. Finalement le produit scalaire tendra vers 0, ce qui montre bien qu'on peut extraire une suite telle que $T^*(x_n)$ converge.

Solution de l'exercice 9.3.3 Soit $x_n \rightharpoonup x$, on a pour tout $y \in H$,

$$\langle T(x_n), y\rangle = \langle x_n, T^*y\rangle \to \langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle.$$

Donc $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$. Soit une suite extraite, toujours notée, x_n, de sorte que $T(x_n)$ converge vers y. Mais par unicité de de la limite faible, on a $y = T(x)$. Comme toutes les suites extraites convergentes on la même limite, on en déduit que $T(x_n)$ converge fortement.

Solution de l'exercice 9.4.1 D'après l'alternative de Fredholm si $\lambda \neq 0$ alors $T - \lambda Id$ est inversible si et seulement si elle est injective. Donc $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T)$.
Soit λ un point d'accumulation, alors il existe une suite λ_n injective d'éléments du spectre qui converge vers λ. On peut supposer que $\lambda_n \neq 0$ pour tout n et donc d'après ce qui précède il existe x_n tel que $\|x_n\| = 1$ et $T(x_n) = \lambda_n x_n$. On extrait de x_n une sous suite qui converge faiblement vers x. Alors $T(x) = \lambda x$. Mais comme $\lambda \neq \lambda_n$ pour tout n, on a $\langle x_n, x\rangle = 0$. En passant à la limite on a $x = 0$. or si $\lambda \not\emptyset$ alors $x_n = \frac{T(x_n)}{\lambda_n}$ converge fortement, ce qui est une contradiction et pouce que la seul point d'accumulation est 0.

Solution de l'exercice 9.5.1 On le montre par récurrence sur le nombre de variable. En dimension 1 c'est évident. On va montrer comment passer de k à $k+1$ variables. Soit $p(x, y) = \sum_{i=0}^{l} x^i q_i(y)$, où y représente k variables, on a

$$\Delta p = -\sum_{i=0}^{l-2} x^i q_{i+2}(y) + \sum_{i=0}^{l} x^i \Delta q_i(y).$$

Donc pour résoudre $\delta p = r = \sum_{k=0}^{l} x^i s_i(y)$ il suffit d'avoir $\Delta q_i = s_i + q_{i+2}$ pour tout $l \leq l-2$, $\delta q_l = s_{l-2}$ et $\delta q_l = s_{l-2}$. Ce système emboité admet une solution par hypothèse de récurrence, ce qui achève la preuve.

Solution de l'exercice 9.5.2 Soit $P(x, y, z) = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k$, on fait agir

$$g_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur P. En particulier $P(g_\theta(r,0,0)) = P(g_0(r,0,0)$ pour tout θ, ce qui donne le résultat.

Solution de l'exercice 9.6.1 Attention,il n'est pas vrai en général qu'un espace de codimension finie est fermé. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. D'après le lemme de Zorn il existe une base albégrique $(e_i)_{i\in I}$. Cette base est nécessairement indénombrable, sinon L'espace serait union dénombrable de fermé d'intérieur vide. On extrait alors $I_0 \subset I$ dénombrable de sorte que les $(e_i)_{i\in I_0}$ soient dense. Soit $i_0 \in I \setminus I_0$, il est alors clair que $F = Vect((e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})$ est dense et de codimension 1.

Dans notre cas qui a regarder $T : Ker(T)^\perp \to H$ on peut supposer que T est injective. Il existe V tel que $IM(T) \oplus V = H$ et $dim(V) < \infty$. Comme $dim(V) < +\infty$ on a $H = V \oplus V^\perp$. Soit π la projection sur $V^\perp$ et $S = \pi \circ T$. On montre sans peine que S est inversible. Soit alors x_n une suite telle que $T(x_n) \to y$ alors $S'x_n) \to \pi(y)$ et $x_n \to S^{-1}(\pi(y)) = x$. Finalement on a bien $y = T(x)$, ce qui prouve que l'image est fermée.

Solution de l'exercice 9.6.2 Comme tout spectre il s'agit d'un compact non vide. Soit maintenant $\|ambda \in \sigma_e(T)$ alors $\overline{T - \lambda Id}$ n'est pas inversible et donc il en va de même de $T - \lambda Id$.

Solution de l'exercice 9.6.3 Soit $b \in l^2$ tel que $b = (T - \lambda Id)(a)$, alors $a_{n+1} = b_n + \lambda a_n$. Si $|\lambda| < 1$ alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{n+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

. On en déduit facilement que pour tout $b \in l^2$, la suite a définie par récurrence en posant $a_1 = 0$ est bien un antécédent dans l^2.
Par contre si on considère le cas $|\lambda| = 1$ et $(b_\mu)_n = \mu^n$ avec $\mu \in (0,1)$. Si a est un antécédent de μ on a $a_{n+1} = \mu^n + \lambda a_n$, dou $y_{n+1} = \mu^{-1} + \frac{\lambda}{\mu} y_n$, où $y_n = \mu^{-n} x_n$. En posant $l = \frac{1}{\mu - \lambda}$ on a $x_n = l\mu^n + \lambda^n(x_1 - l)$. Comme x_n doit converger vers 0 on a $x_1 = l$ et alors $x_n = x_1\mu^n$ ce qui impose $\lambda + 1 = \mu$ ou $x_1 = 0$, dans les deux cas c'est absurde. Donc l'image est de codimension infinie, $T - \lambda Id$ n'est pas fredholm, donc $\overline{T - \lambda Id}$ n'est pas inversible.

Solution de l'exercice 9.6.4 On sait qu'il existe $S \in \mathcal{B}(H)$ et $R \in \mathcal{K}(H)$ tel que $TS = Id + R$. Dés lors $(T + K)S = Id + R'$ où $R' \in \mathcal{K}(H)$. Or

$Ind(Id+R) = Ind(Id+R') = 0$. D'ou $Ind(T) = Ind((Id+R)S^{-1}) = Ind(S^{-1}) = Ind((Id+R')S^{-1}) = Ind(T+K)$.

Solution de l'exercice 9.7.1 Commençons par montrer que $\mathcal{I}_1(H)$ est stable par somme. Soit $A, B \in \mathcal{I}_1(H)$, alors il existe U, V et W unitaire tel que $A = U|A|$, $B = V|B|$ et $A+B = W|A+B|$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle e_n, |A+B|e_n\rangle &= \sum_n \langle e_n, W^{-1}(A+B)e_n\rangle \\
&= \sum_n \langle e_n, W^{-1}Ae_n\rangle + \sum_n \langle e_n, W^{-1}Be_n\rangle \\
&= \sum_n \langle e_n, W^{-1}U|A|e_n\rangle + \sum_n \langle e_n, W^{-1}V|B|e_n\rangle \\
&= \sum_n \langle (W^{-1}U|A|^{\frac{1}{2}})e_n, |A|^{\frac{1}{2}}e_n\rangle + \sum_n \langle (W^{-1}V|B|^{\frac{1}{2}})e_n, |B|^{\frac{1}{2}}e_n\rangle \\
&\leq \left(\sum_n \||A|^{\frac{1}{2}}(W^{-1}Ue_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \||A|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \leq \left(\sum_n \||B|^{\frac{1}{2}}(W^{-1}Ve_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \||B|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Tr(|A|) + Tr(|B|)
\end{aligned}$$

La stabilité par multiplication scalaire et adjoint est évidente. Montrons que c'est un idéal.D'après lemme précédent, il suffit de montrer que que si Soit $A \in \mathcal{I}_1(H)$ et U unitaire alors $AU, UA \in \mathcal{I}_1(H)$. Or on vérifie aisément que $|AU| = U^*|A\|U$ et $|UA| = |A|$, ce qui nous permet de conclure. Enfin montrons que $Tr(AU) = Tr(UA)$ pour tout $A \in \mathcal{I}_1(H)$ et U unitaire, le lemme nous permettra de conclure. Or

$$\begin{aligned}
Tr(AU) = \sum_n \langle e_n, AUe_n\rangle = \sum_n \langle U^*e_n, Ae_n\rangle \\
= \sum_n \langle e_n, UAe_n\rangle = \leq Tr(UA).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9.8.1 B commute avec tout les polynôme en A et donc par passage à la limite avec tout les $f(A)$ avec f continue sur le spectre. On veut montrer que $\langle x, Bf(A)y\rangle = x, f(A)By\rangle$ pour tout $x, y \in H$, c'est à dire

$$L_f(x, Bf(A)y) = L_f(x, f(A)By) \text{ por tout } x, y \in H.$$

Or ceci est vrai pour toute fonction continue et comme on l'a vu lors de la preuve de la proposition 9.8.2, il suffit d'appliquer le théorème de Lusin pour passer à la limite.

Solution de l'exercice 9.8.2 Comme T commute avec $\mathbf{1}_E(T)$ d'après l'exercice précédent, il clair que V_E est stable par T.

Toujours d'après l'exercice précédent chaque élément de l'ensemble irréductible avec tout les $\mathbf{1}_E(T)$. Et donc chaque V_E est soit nulle soit égale à H. En appliquant le corollaire 9.8.1 autour d'un élément λ du spectre, on obtient que $\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(T) = Id$, donc d'après e corollaire 9.8.1 il n'y a qu'un élément dans le spectre, puisque la mesure spectrale doit être nulle sur le voisinage de tout autre élément. Finalement T est bien proportionnel à l'identité.

Solution de l'exercice 9.8.3 On commence par écrie la formule d'inversion de Fourier,

$$f(x) = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}\hat{f}(y) e^{i2\pi xy}\, dy.$$

Puis en utilisant la continuité de l'application linéaire $f \mapsto f(T)$ sur les fonction continue, les propriétés de l'intégrale de Bochner nous permette de conclure.

Solution de l'exercice 10.1.1 Notons M_g la multiplication par g, il est clair que $\{f \,|\, gf \in L^2\} = D(M_g)$. Supposons que μ est finie, alors si $f \in L^2$ on pose $f_n(x) = f(x)$ si $|g(x)| \leq n$ et 0 sinon. Comme f_n est bornée elle est dans $D(M_g)$. Enfin on montre à l'aide du théorème de convergence dominée que $\|f - f_n\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers l'infinie.

Solution de l'exercice 10.1.2 Si $T \subset S$ alors le graphe de T est inclus dans celui de S et donc l'adhérence du graphe de T est également inclus dans celui de S puisque S est fermé. Donc l'adhérence du graphe de T définit bien une application, il est alors clair que c'est la plus petite extension fermé de T.

Solution de l'exercice 10.1.3 le graphe de $i\frac{d}{dx}$ est exactement $\{(f, i\frac{df}{dx} \,|\, f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}$ dont la fermeture pour la norme $\|f\|_2 + \|\frac{df}{dx}\|_2$ est exactement $H^1(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 10.1.4 Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ alors

$$2\pi i U(f) = -\int_{\mathrm{I}} \mathrm{R} f(t) \frac{d}{dt} e^{-2\pi i x t}\, dt$$

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{R} \frac{df(t)}{dt} e^{-2\pi i x t}\, dt$$

$$U\left(\frac{df(t)}{dt}\right),$$

donc on a bien $xU(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\frac{d}{dx} \subset U^{-1} M_{2i\pi x} U.$$

Solution de l'exercice 10.1.5 Soit $y \in D(T)^*$ alors comme $x \mapsto \langle x, T(y)\rangle$ est continue, on peut la prolonger par continuité à l'adhérence du de $D(T)$ et par 0 en dehors. Donc le théorème de Riesz nous assure l'existence de $T^*(y)$. Enfin si le domaine est dense alors comme $D(T)^\perp = \{0\}$ alors $T^*(y)$ est unique.

Solution de l'exercice 10.1.6 On commence par construire un opérateur non fermable. On considère une base de hilbert e_n et $V = Vect(e_n)$. Comme H est de dimension infinie il n'admet pas de base algébrique dénombrable (conséquence du théorème de Baire), donc il existe $z \in H \setminus V$. On définit alors $T : V \oplus \mathbb{C}z \to H$ par $T(x + \lambda z) = \lambda z$. On montre alors que l'adhérence du graphe de T est $H \times Cz$ et donc n'est pas le graphe d'une application.
On va complexifier cette exemple de sorte que l'adhérence du graphe soit $H \times H$ et dans ce cas comme le graphe de T^* est l'orthogonal du graphe de T, il sera réduit à $\{0\} \times \{0\}$. Pour cela on considère $e'_n = e_n = \frac{z}{n}$, c'est une famille dense de H et $V = Vect(e'_n)$ est un supplémentaire de V. On définit alors $T : V \oplus W \to H$ par $T(x + y) = \lambda y$. On montre alors que l'adhérence du graphe de T est $H \times H$, ce qui nous permet de conclure.

Solution de l'exercice 10.1.7 On a $D(M_x) = \{f \,|\, xf(x) \in L^2\}$. Soit $g \in D(M_x)$ alors

$$\left|\int x f \overline{g}\right| \leq \|xg\|_2 \|f\|$$

donc $f \mapsto \int x f \overline{g}$ est continue et on a $D(M_x) \subset D(M_x)^*$. Si $g \in D(M_x)^*$ alors il existe C tel que

$$\left|\int x f \overline{g}\right| \leq C\|f\|.$$

on applique cela à $f_R = xg\mathbf{1}_{[-R,R]}$ alors

$$\int_{-R}^{R} |xg|^2 \leq C^2,$$

pour tout R. Donc $g \in D(M_x)$ et on peut conclure que M_x est autoadjoint.

Solution de l'exercice 10.1.8 Soit $x, x' \in H$ et $y = R(z)x$ et $y' = R(z^*)x'$ alors $(T - zId)y = x$ et $(T - z^*)y' = x'$ d'ou

$$\langle R(z)x, x'\rangle = \langle y, (T^* - z^*)y'\rangle = \langle (T^* - z^*)y, y'\rangle = \langle x, R(z^*)x'\rangle,$$

ce qui prouve que $R(z^*) = R(z)^*$.

Solution de l'exercice 10.1.9 T est essentiellement auto-adjoint si et seulement si $Im(\overline{T} + iId) = Im(\overline{T} - iId) = H$. Or $Im(\overline{T} + iId) = Im(\overline{T + iId}) = \pi_2(Gr(\overline{T + iId})) = \pi_2(\overline{Gr(T + iId)}) = \overline{pi_2(Gr(T + iId))} = \overline{Im(T + iId}$. Pour cela il faut utiliser (**??**) qui nous assure que si $T(x_n) \to y$ alors x_n converge. On la même égalité pour $T - iId$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 10.1.10 En suivant l'indication on remarque

$$(T - wId)(T - zId)((z - w)R(z)R(w) = (T - wId)(T - zId)(R(z) - R(w))$$

Puis en utilisant le fait que $T - zId$ et $T - wId$ sont injectives, on a

$$\begin{aligned}
&(T - wId)(T - zId)((z - w)R(z)R(w) = (T - wId)(T - zId)(R(z) - R(w)) \\
&\Rightarrow (T - zId)((z - w)R(z)R(w) = (T - zId)(R(z) - R(w)) \\
&\Rightarrow (z - w)R(z)R(w) = R(z) - R(w).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10.1.11 Soit $g \in D(T)^*$ alors il existe C tel que pour tout $f \in C_c^\infty$ on ait

$$|\langle d, T(f)\rangle| \leq C\|f\|$$

ce qui implique que la dérivé au sens des distribution de g est dans L^2 donc $g \in H^1((0,1))$. On vérifie par une intégration par partie que $T \subset T^*$. Par contre le domaine de $\overline{T}$ est $H_0^1((0,1))$ donc l'opérateur n'est pas auto-adjoint. Soit S une extension auto-adjointe de T différente de T^* alors le domaine de S est un sous-espace stricte de $H^1((0,1))$ contrant $H_0^1((0,1))$, il est donc

de codimension 1, quitte à échanger les roles de 0 et 1 on a $D(S) = \{f \in H^1((0,1)) \mid f(1) = \alpha f(0))\}$. On doit alors avoir pour tout $f, g \in D(S)$,

$$0 = \langle f, Sg\rangle - \langle S(f), g\rangle = i(|\alpha|^2 - 1)f(0)\overline{g}(0),$$

D'ou $|\alpha| = 1$. Les extension auto-adjointes différentes de T^* sont paramétrées par S^1. Si on regarde un fibré en droite complexe au dessus de $(0,1)$, ces extensions correspondent au différentes façon de le récoler en un vibré en droite au fessu de S^1.

Solution de l'exercice 10.2.1 Soit $\lambda \notin \sigma(T)$ et t tel que $|t-\lambda|\sqrt{1}\|R(\lambda)\|$ alors

$$T - tId = (T - \lambda Id) - (t-\lambda)Id = (T - \lambda Id)(Id - (t-\lambda)R(\lambda))$$

est invisible et on a une expression analytique pour l'inverse à l'aide de la série de Neumann, ce qui permet de conclure.

Solution de l'exercice 10.3.1 Soit $\lambda \in supp(\mu_x^T)$ alors pour tout n on a

$$\langle x, \mathbf{1}_{]\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n}[}(T)(x)\rangle = \int_{]\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n}[} d\mu_x^T \neq 0,$$

On pose $y_n = \frac{\mathbf{1}_{]\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n}[}(T)(x)}{\|\mathbf{1}_{]\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n}[}(T)(x)\|}$ et on a , en utilisant le fait que $y_n = \mathbf{1}_{]\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n}[}(T)(y_n)$,

$$\|(T - \lambda Id)(y_n)\|^2 = \int_{]\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n}[} (t-\lambda)^2 d\mu_{y_n}^T \leq \frac{1}{n^2},$$

donc $\lambda \in \sigma(T)$.

Solution de l'exercice 10.3.2 Soit $x \in \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H)$ alors $x = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(y)$ et $T(x) = g(T)(y)$ avec $g(t) = t$ si $t = \lambda$, 0 sinon. D'où pour tout $z \in D(T)$, on a

$$\langle T(x), z\rangle = \int_{\{\lambda\}} t d\mu_{x,z}^T = \lambda \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}\mathbf{1}_{\{\lambda\}} d\mu_{x,z}^T = \lambda\langle d\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(x), z\rangle = \lambda\rangle x, z\rangle.$$

Ce qui prouve bien que x est une valeur propre.

Réciproquement soit λ est une valeur propre et x un vecteur propre associé à λ. Soit p_n une suite polynôme qui converge simplement vers $\mathbf{1}_{\{\lambda\}}$ sur un voisinage V de λ. Alors en utilisant le fait que $\mathbf{1}_V T = T\mathbf{1}_V = (\mathbf{1}_V t)(T)$, on a

$$(\mathbf{1}_V p_n)(T)(x) = p_n(\lambda)x,$$

Enfin en passant à la limite à l'aide du théorème de convergence dominé on obtient

$$(\mathbf{1}_{\{\lambda\}})(T)(x) = x,$$

Ce qui prouve bien que $x \in \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H)$.

Solution de l'exercice 10.3.3 Comme $supp\mu_x^T \subset \sigma(T)$ pour tout x il suffit de montrer que

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\mu^T(\lambda),$$

or on a exactement pour tout $x \in D_c$

$$T(x) = \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} \lambda \, d\mu^T(\lambda).$$

Solution de l'exercice 10.3.4 Comme dans le cas borné il suffit de se ramener à un sous-espace cyclique. Ici on dira que H est cyclique s'il existe un vecteur $x \in D(T)$ tel que $\{f(T)(x) \mid f \text{ borélienne bornée}\}$ est dense dans H. On pose, pour x vecteur cyclique,

$$\begin{array}{rcl} V : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & H \\ f & \mapsto & f(T)(x) \end{array},$$

où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\left(\int |f| \, d\mu_x^T\right)^{\frac{1}{2}}$. On vérifie sans peine que cette application se prolonge en $V : L^2(\mathbb{R}, \mu_x^T) \to H$ unitaire. On a alors

$$TV(f) = VM_t(f)$$

dés que $xf \in L^2$ donc T est bien équivalent à la multiplication par t sur $L^2(\mathbb{R}, \mu_x^T)$. On conclut en décomposant H en somme de sous-espace cyclique comme dans le théorème .

Solution de l'exercice 10.3.5 On a déjà vu que le spectre de tout opérateur borné est compact. Supposons que le spectre est inclus dans $[-R, R]$ alors pour $x \in D(T)$ on a

$$\langle x, T(X) \rangle = \int_{-R}^{R} t \, d\mu_x^T \leq R\mu_x^T(\mathbb{R}) = R\|x\|^2$$

En passant au sup et en utilisant que l'opérateur est auto-adjoint on a $\|T\| \leq R$, on peut alors le prolonger en un opérateur borné par densité du domaine.

Solution de l'exercice 10.4.1 On a $D(T) = H^2(\mathbb{R}) \cap \{f \,|\, Vf \in L^2\}$. Soit $g \in D(T)$ alors $|\langle \Delta f + Vf, g\rangle| = |\langle f, \Delta g + Vg\rangle| \leq \|f\|\|\Delta g + Vg\|_2$ donc $T \subset T^*$
Soit $g \in D(T)^*$, on pose $h = T^*g$ on a alors, pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\langle \Delta f + Vf, g\rangle = \langle f, h\rangle$$

d'ou

$$\langle \Delta f, g\rangle = \langle f, h - Vg\rangle$$

Il existe C tel que $V \geq -C$. On note $T = \Delta + V + (C+1)Id$ alors on a

$$\langle T(f), f\rangle \geq \|f\|^2,$$

ce qui implique que T est injective et que de plus comme T est auto-adjoint, alors T admet un inverse borné (reprendre la preuve effectuée pour $R(z)$). Montrons que l'inverse est compact, soit f_n une suite borné dans L^2 alors $u_n = T^{-1}(f_n)$ est borné dans $H^1(\mathbb{R})$. Pour voir cela il suffit de tester l'équation contre u_n. L'injection de H^1 dans L^2 étant compact, on peut extraire une sous suite qui converge. Le théorème spectral pour les opérateurs compacts permet de conclure.

Bibliographie

[Arv76] William Arveson. *An invitation to C^*-algebras*. Springer-Verlag, New York, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 39.

[Arv02] William Arveson. *A short course on spectral theory*, volume 209 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[CQ] Denis Choimet and Hervé Queffélec. *Analyse mathématique, grands théorèmes du vingtième siècle*. C&M.

[DS09] Anton Deitmar and Echterhoff Siegfried. *Principles of harmonic analysis*. Universitext. Springer, New York, 2009.

[EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[Fol95] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[Hal13] Brian C. Hall. *Quantum theory for mathematicians*. GTM. Springer, 2013.

[HL97] Qing Han and Fanghua Lin. *Elliptic partial differential equations*, volume 1 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1997.

[Kac66] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum ? *Amer. Math. Monthly*, 73(4, part II) :1–23, 1966.

[KS10] Yvette Kosmann-Schwarzbach. *Groups and symmetries*. Universitext. Springer, New York, 2010. From finite groups to Lie groups,

Translated from the 2006 French 2nd edition by Stephanie Frank Singer.

[Lan93] Serge Lang. *Real and functional analysis*, volume 142 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1993.

[Rud80] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, Paris, 3ième edition, 1980.

[Sim05] Barry Simon. *Trace ideals and their applications*, volume 120 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2005.

[Tao] Terence Tao. The peter-weyl theorem, and non-abelian fourier analysis on compact groups. *2011*.

[Tao11a] Terence Tao. Cayley graphs and kazhdan's property (t). *http ://terrytao.wordpress.com/2011/12/06/254b-notes-2-cayley-graphs-and-kazhdans-property-t/*, 2011.

[Tao11b] Terence Tao. *An introduction to measure theory*, volume 126 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[Tes09] Gerald Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics*, volume 99 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With applications to Schrödinger operators.

[Vil10] Cedric Villani. *Intégration et Analyse de Fourier*. http ://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/IAF.pdf, 2010.

[Zet05] Anton Zettl. *Sturm-Liouville theory*, volume 121 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.