Introduction à l'analyse géométrique à travers les mathématiques de la relativité générale

Cours spécialisé(6 semaines) : Géométrie et dynamique, Analyse, Physique Mathématique, EDP

Paul Laurain

Prérequis

— Géométrie différentielle et Riemannienne ([3] chapitres1-6, ou encore [1])
— Equation aux dérivées partielles (principalement elliptiques, [4] chapitres 5-6)

Programme

1. Semaine 1 : Fondements de la relativité restreinte et introduction aux équations d'Einstein
2. Semaine 2 : Le Problème de Cauchy : Le théorème de Choquet-Bruhat, équations de contraintes et méthode conforme.
3. Semaine 3 : Espaces asymptotiquement plats et définition de la masse
4. Semaine 4 : Le problème de Plateau
5. Semaine 5 (et 6) : Le théorème de la masse positive
6. Bonus : La masse de Hawking et l'inégalité de Penrose

Bibliographie d'initiation

Il s'agit de références d'analyse (sur les variétés) et de relativité générale claires qui peuvent être feuilletées mais qui ne sont en aucun cas un prérequis.

1. Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, E. Hebey (ou Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry, T. Aubin)
2. Variational Methods, M. Struwe.
3. Harmonic maps, conservation laws and moving frames, F. Hélein.
4. Introduction à la relativité générale d'un point de vue Mathématiques, J. Szeftel
5. General Relativity, Robert M. Wald.

1 De la relativité restreinte aux équations d'Einstein

1.1 Fondements de la relativité restreinte

Chapitre 1 de [5].

1.2 Une approche variationnelle de l'électromagnétisme

Après avoir obtenue les équations de contraintes et montrer l'existence d'une solutions sous ces même hypothèses, on y étudiera surtout comment le **théorème de Noether** nous permet d'obtenir des lois de conservations. On pourra consulter le chapitre 3 de [6] ou encore le chapitre 2 de [7], et pour les plus téméraires le chapitre *Classical Field Theory* de [2].

1.3 La relativité générale et les équations d'Einstein

Au vu du chapitre précédent on introduit la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert et on dérive les équations d'Einstein. Ce sera l'occasion de faire de très brefs rappels de géométrie Riemannienne.
Nous allons également résoudre les équations dans un cas simple : le cas statique dans le vide. Nous obtiendrons notament la solution de Schwarschild qui nous servira de modèle pour la notion de masse. Voir chapitre 6 de [12] pour plus d'explication sur cette solution.

2 Equations de Contraintes et "données de Cauchy"

Dans ce chapitre on explique quels sont les contraintes sur une 3-variété pour être une donnée initiale pour les équations d'Einstein. On énonce (sans aucune démonstration) le théorème de Choquet-Bruhat qui nous assure, en un certain sens, que ces contraintes sont suffisantes. Pour plus de détails sur l'aspect hyperbolique des équations d'Einstein on renvoie au cours de J. Szfeftel.
Enfin on donnera un grand nombre de solution des équations de contraintes dans le vide en démontrant l'existence de fonction de Green pour le Laplacien conforme sur certaines variétés compactes.

3 Espace asymptotiquement plat et masse

Dans ce Chapitre nous allons suivre le papier originel de Bartnik, sur la page web du cours. En fait la masse ADM a été découverte dans les années 60 mais c'est seulement dans les années 80 que la version géométrique optimale a été confirmée. En particulier il nous faudra introduire des coordonnées harmoniques à l'infini via une étude précise des comportement des opérateurs elliptiques et plus particulièrement le laplacien sur des variétés non-compactes.

4 Problème de Plateau

Dans cette partie on montre comment résoudre le problème classique de Plateau, c'est à dire trouver une surface minimale bordant un contour donné dans R^3. Ici on suivra essentiellement le premier chapitre de [11]. Puis j'expliquerai brièvement où se trouve les principales difficultés pour généraliser ce résultat à des variétés ambiantes riemanniennes. Enfin nous calculerons la variation seconde et nous verrons en quoi la courbure scalaire joue un rôle crucial dans l'existence de surface minimale stable.

Voici une autre référence sur le sujet pour ceux qui souhaite une introduction plus complète : [9].

5 Preuve du Théorème de la masse positive

Ici on va suivre la stratégie d'écrite dans [8]. On démontre déjà un cas, plus simple, lorsque la métrique est de la forme $g = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta + O(1/r^2)$ et ici on suit [10]. Puis dans un deuxième temps on montre qu'on peut se ramener à ce dernier cas en effectuant une déformation sur la métrique et en utilisant la continuité de la masse pour une telle déformation.

6 Inégalité de Penrose

Références

[1] Thierry Aubin. *A course in differential geometry*, volume 27 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[2] Pierre Deligne, Pavel Etingof, Daniel S. Freed, Lisa C. Jeffrey, David Kazhdan, John W. Morgan, David R. Morrison, and Edward Witten, editors. *Quantum fields and strings : a course for mathematicians. Vol. 1, 2.* American Mathematical Society, Providence, RI ; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 1999. Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997.

[3] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[5] Theodore Frankel. *Gravitational curvature.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. An introduction to Einstein's theory.

[6] Frédéric Hélein. *Constant mean curvature surfaces, harmonic maps and integrable systems.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Notes taken by Roger Moser.

[7] Amitabha Lahiri and Palash B. Pal. *A first book of quantum field theory.* Alpha Science International Ltd., Harrow, second edition, 2005.

[8] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1) :37–91, 1987.

[9] Robert Osserman. *A survey of Minimal surfaces.*

[10] Richard Schoen and Shing Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1) :45–76, 1979.

[11] Struwe. *Plateau's Problem and the Calculus of variations.*

[12] Robert M. Wald. *General relativity.* University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.